

УДК: 539.142:539.143

УНИФИЦИРОВАННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СФЕРИЧЕСКИХ АТОМНЫХ ЯДЕР

А.Н. Зарубин

«Научно-производственное объединение ООО «Центротех»

г. Новоуральск, Свердловская обл., 624130, Россия

e-mail: zarubin44@mail.ru

Аннотация—Представлена математическая модель, предназначенная для расчета характеристик атомных ядер и бесконечной ядерной материи. Атомное ядро моделируется в виде сферического объекта, сжатого давлением компактизации и заполненного заряженной несжимаемой ядерной материей из взаимодействующих между собой нуклонов. Изменение давления ядерной материи в представленной модели происходит по уравнению адиабаты в зависимости от объемной плотности конфигурационной упаковки нуклонов в атомном ядре. В данной работе в рамках представленной математической модели по значениям удельной энергии связи вычисляются значения двух характеристик атомных ядер—“показателя эффективности нуклонов” и “среднего числа эффективных нуклонов”, равного произведению показателя эффективности нуклонов на массовое число атомного ядра. Отличительная особенность вычисленных характеристик от ранее известных характеристик атомного ядра состоит в том, что значения показателя эффективности нуклонов достаточно точно описываются гладкими аналитическими зависимостями от произвольного сочетания количества нейтронов и протонов на карте нуклидов. По соответствующим для каждого ядра значениям среднего числа эффективных нуклонов аналитически вычисляются значения характеристик 3149 ядер нуклидов. Переход к достаточно простой задаче по определению среднего числа эффективных нуклонов устраняет необходимость решения задачи многих тел для системы взаимодействующих нуклонов в объеме атомных ядер. Результаты расчетов значений характеристик атомных ядер, бесконечной ядерной материи и ее уравнения состояния хорошо согласуются со

значениями соответствующих экспериментальных или расчетных данных, опубликованных в открытых источниках информации. Расчеты проведены с использованием системы аналитических вычислений свободного программного обеспечения Maxima.

Ключевые слова: структура ядра, конфигурационная упаковка, давление компактизации, уравнение состояния, энергия связи, карта нуклидов, ядерная материя

PACS: 21.10.Dr; 21.10.Gv; 21.60.-n; 21.65.Mn

UDC: 539.142:539.143

A UNIFIED MATHEMATICAL MODEL FOR SPHERICAL ATOMIC NUCLEI

A.N. Zarubin

CentroTech Research and Production Association LLC

Novouralsk, Sverdlovsk Reg., 624130, Russia

e-mail: zarubin44@mail.ru

Abstract—A mathematical model is presented for calculating the characteristics of atomic nuclei and infinite nuclear matter. An atomic nucleus is modelled as a spherical object compressed by compaction pressure and filled with charged incompressible nuclear matter consisting of interacting nucleons. In the proposed model, the pressure change of nuclear matter follows an adiabatic equation depending on the bulk packing density of nucleons within the nucleus. Within the framework of this mathematical model, two nuclear characteristics are calculated based on specific binding energy values: the "nucleon efficiency index" and the "average number of effective nucleons" (defined as the product of the nucleon efficiency index and the mass number). A distinctive feature of these calculated characteristics, compared to previously known nuclear properties, is that the nucleon efficiency index values are accurately described by smooth analytical functions of arbitrary neutron and proton combinations on the nuclide map. Using the corresponding average number of effective nucleons for each nucleus, the characteristics of 3149 nuclides are analytically calculated. Transitioning to the relatively

simple task of determining the average number of effective nucleons eliminates the need to solve the many-body problem for a system of interacting nucleons within the nuclear volume. The calculated characteristics of atomic nuclei, infinite nuclear matter, and its equation of state are in good agreement with experimental and theoretical data available in open sources. Calculations were performed using the Maxima open-source computer algebra system.

Keywords: nucleus structure, nucleon packing, compaction pressure, equation of state, binding energy, nuclide chart, nuclear matter

PACS: 21.10.Dr; 21.10.Gv; 21.60.-n; 21.65.Mn

1. ВВЕДЕНИЕ

Унифицированная математическая теория атомного ядра с возможностью расчета/прогноза значений характеристик нуклидов на всем известном/предполагаемом диапазоне изменения числа протонов и числа нейтронов в составе их ядер—одна из главных целей развития ядерной физики. Необходимость в такой теории особенно проявилась в результате активного изучения так называемых “экзотических” ядер—ядер сверхтяжелых нуклидов и ядер-изобар с предельным количеством нейтронов или протонов. Кроме того, в связи с ростом объема астрофизических исследований требуется информация о свойствах почти всех (более 7000) ядер нуклидов, значительная часть которых экспериментально не изучалась вследствие их крайней нестабильности.

Атомное ядро представляет собой открытую квантовую систему, внутри которой взаимодействуют друг с другом ограниченное число нуклонов (нейтронов и протонов)—от одного до нескольких сотен. Поэтому расчет значений характеристик атомных ядер осложнен двумя проблемами—необходимостью формализовать причину объединения нуклонов в компактное и устойчивое атомное ядро и решить задачу многих тел для системы взаимодействующих нуклонов в атомном ядре.

Основная причина появления этих проблем—взаимодействие нуклонов между собой в объеме атомного ядра. Общепринято, что протоны и нейтроны внутри объема атомных ядер взаимодействуют и удерживаются за счет так называемых ядерных сил сильного взаимодействия [1, с. 154]. Теоретический подход к моделированию ядерных сил берет свое начало от опубликованной в 1935 году пионерской концепции Х. Юкавы—мезонной теории сильного взаимодействия. Согласно принятому в настоящее время теоретическому подходу, расчет характеристик атомных ядер опирается на уравнение Шредингера и на выражения для вычисления эффективного гамильтониана системы нуклонов в атомном ядре. Развитие этого подхода идет по двум основным направлениям: поиска потенциала нуклон-нуклонного взаимодействия между всеми парами, тройками и т.д. нуклонов в ядре и поиска потенциала взаимодействия независимого нуклона с эффективным средним полем, которое совместно создают все нуклоны в атомном ядре. Оба направления исследования ядерных сил требуют исключительно больших вы-

числительных усилий даже для относительно легких нуклидов [2, р. 21]. Предполагаемые выражения для вычисления эффективного гамильтониана системы нуклонов в атомном ядре содержат несколько подгоночных коэффициентов, значения которых определяются в результате согласования расчетных и экспериментальных данных. Поэтому результаты сильно зависят как от использованных процедур и способа проведения расчета, так и от области их применения на протон-нейтронной диаграмме (карте нуклидов) [3, с. 35; 4, р. 5]. В настоящее время в области расчета нуклон-нуклонного взаимодействия доминирует подход под названием “киральная теория эффективного поля” (Chiral Effective Field Theory — ChEFT).

Отсутствие адекватного выражения для потенциала сильного взаимодействия между нуклонами способствовало появлению многочисленных моделей структуры атомных ядер, опирающихся на экспериментально выявленные особенности их характеристик—энергии связи, геометрических размеров, объемной и численной плотности заполнения и т.п. [5]. В ядерной физике получили развитие три основных модели для описания структуры атомных ядер: капельно-жидкостная (Я. И. Френкель, Н. Бор — 1936 год); оболочечная (М. Гепперт-Майер, Х. Йенсен — 1950 год); кластерная (Дж. А. Уилер — 1937 год).

В капельно-жидкостной модели предполагается, что нуклоны в объеме атомного ядра подобны молекулам в капле жидкости. Теоретическое обоснование энергии связи атомного ядра на основе капельно-жидкостной модели в 1935 году предложил К. Ф. фон Вайцзеккер. В дальнейшем К. Ф. фон Вайцзеккером и Х. Бете была представлена полуэмпирическая формула для оценки энергии связи атомного ядра $B(N, Z)$, которая кроме свойств несжимаемой заряженной ядерной материи учитывала еще и квантовую природу нуклонов:

$$B(N, Z) = a_{\text{vol}} \cdot A - a_{\text{surf}} \cdot A^{2/3} - a_{\text{coul}} \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_{\text{sym}} \frac{(N-Z)^2}{A} + a_{\text{pair}} \frac{1 - \text{mod}(Z, 2) - \text{mod}(N, 2)}{A^{3/4}},$$

где a_{vol} —коэффициент объемной энергии; a_{surf} —коэффициент поверхностной энергии; a_{coul} —коэффициент кулоновской энергии; a_{sym} —коэффициент энергии симметрии состава ядра; a_{pair} —коэффициент энергии разрыва нуклонной пары; $\text{mod}(x, 2)$ —число x по модулю 2; $A=Z+N$ —массовое число ядра; Z —число протонов в ядре; N —число нейтронов в ядре.

В оболочечной модели предполагается, что нуклоны в объеме атомного ядра образуют газовую фазу и совместно создают среднее поле. Находясь в этом среднем поле нуклоны независимо друг от друга заполняют оболочки, содержащие орбиты нуклонов с близкими значениями энергии и возможными значениями квантовых чисел. Оболочечная модель хорошо объяснила повышенную стабильность атомных ядер с так называемыми “магическими” числами протонов и нейтронов в составе ядер.

В кластерной модели предполагается, что ядерная материя в объеме атомного ядра представляет собой кластер из α -частиц и отдельных нуклонов. В зависимости от основного или возбужденного состояния кластерной конфигурации в объеме атомного ядра возможно моделирование либо газообразного, либо жидкообразного состояния ядерной материи. Главное достоинство кластерной модели—объяснение α -распада атомных ядер.

Созданные до настоящего времени модели атомного ядра позволили провести достаточно точные вычисления значений различных характеристик атомных ядер, но только на ограниченном диапазоне изменения числа протонов и числа нейтронов в составе атомных ядер. Например, в рамках интегрированной модели атомных ядер расчет удельной энергии связи 92 наиболее известных стабильных нуклидов произведен с относительной погрешностью $\sim 1\%$ [6]. Оптимизированный подбор коэффициентов в формуле Бете-Вайцзеккера позволил произвести расчет удельной энергии связи ядер 79 нуклидов с относительной погрешностью $\sim 0.3\%$ [7]. Подробный анализ достоинств и недостатков известных в настоящее время моделей структуры атомных ядер приведен в [8].

В данной работе представлена математическая модель атомного ядра, в которой предполагается, что объединение системы нуклонов в компактное и устойчивое атомное ядро обусловлено не ядерными силами сильного взаимодействия, а давлением сжатия (компактизации) объема атомного ядра. Благодаря давлению компактизации нуклоны, независимо от их электрического заряда, удерживаются в объеме ядра нуклида. Под действием давления компактизации и при условии отсутствия теплообмена атомного ядра с окружающей средой потенциальная энергия давления переходит в кинетическую энергию нуклонов, что обеспечивает равновесное состояние атомного ядра. Преодоление кулоновской силы отталкивания протонов друг от друга в объеме ядра нуклида требует чрезвычайно большого значения давления компактизации, а это означает, что ядерная

материя в объеме атомного ядра должна находиться в несжимаемом состоянии. Экспериментально выявленная линейная зависимость объема атомного ядра от его массового числа свидетельствует об одинаковом значении плотности ядерной материи в ядрах всех нуклидов, что подтверждает ее несжимаемость.

Предположение о давлении компактизации на внешнюю поверхность объема атомного ядра не отличается новизной. Например, с учетом давления компактизации на внешнюю поверхность атомного ядра получены аналитические выражения для расчета значений объемного и поверхностного коэффициентов в формуле Бете-Вайцзеккера [9]. В работе [10] утверждается, что стабильность протона и большинства элементов из Периодической системы Д. И. Менделеева вызвана давлением компактизации, которое действует на внешнюю поверхность объема протона и на внешнюю поверхность объема ядер нуклидов. Автор [10] ссылается на экспериментально выявленное в работе [11] радиальное распределение давления в объеме протона.

Представленная в данной статье математическая модель сферического атомного ядра включает в себя: 1) аналитическую зависимость удельной энергии связи от объемной плотности конфигурационной упаковки нуклонов в объеме атомного ядра; 2) алгоритм расчета объемной плотности конфигурационной упаковки нуклонов в сферический объем ядра нуклида при условии его послойного заполнения взаимодействующими между собой сферическими нуклонами; 3) алгоритм расчета среднего числа эффективных не взаимодействующих между собой нуклонов, создающих требуемое значение объемной плотности заполнения эффективного объема ядра нуклида; 4) аналитические выражения для расчета значений характеристик атомного ядра в зависимости от среднего числа эффективных нуклонов; 5) выбор наиболее подходящего значения степени свободы нуклонов в ядерной материи; 6) расчет значений характеристик бесконечной нуклонной и кварк-глюонной материи; 7) формулировка уравнения состояния ядерной материи.

2.МОДЕЛЬ АТОМНОГО ЯДРА В ВИДЕ СФЕРИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

При условии равновесного состояния несжимаемого ядра нуклида давление внутри его объема равно давлению компактизации $P(N,Z)$. Произведение давления внутри атом-

ного ядра на его объем равно потенциальной энергии давления атомного ядра. Потенциальная энергия давления атомного ядра в не возбужденном состоянии и с массовым числом $A=Z+N$ создает его энергию связи $B(N,Z)$:

$$B(N, Z) = P(N, Z) \cdot V, \quad (1)$$

где $B(N,Z)$ —энергия связи атомного ядра, МэВ; $V=(4/3)\pi R^3$ —объем сферического атомного ядра, фм^3 ; $R=r_0 \cdot A^{1/3}$ —эмпирическая корреляция для радиуса объема атомного ядра, хорошо подтвержденная в результате систематических измерений Р. Хофstadтера [12], фм ; r_0 —радиус ячейки Вигнера-Зейтца для нуклонов в объеме атомного ядра [13, р. 2], фм .

Значения $B(N,Z)$ вычисляются в энергетических единицах по дефекту массы атомного ядра, равному разнице между массой ядра нуклида и суммарной массой всех его нуклонов в свободном состоянии. Значение массы ядра нуклида определяют либо в результате измерений, либо в результате расчетов по формулам подобным формуле Бете-Вайцеккера.

Из (1) получается уравнение состояния ядерной материи для расчета давления в объеме атомного ядра:

$$P(N, Z) = \frac{\varepsilon(N, Z)}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} = \varepsilon(N, Z) \cdot \rho, \quad (2)$$

где $\varepsilon(N,Z) = B(N,Z)/A$ —удельная энергия связи атомного ядра, МэВ/нуклон; $\rho = 3/(4\pi r_0^3)$ —численная плотность конфигурационной упаковки атомного ядра, фм^{-3} .

Расчет давления в объеме бесконечной ядерной материи $P_{\max}$ производится по уравнению состояния ядерной материи (2) после подстановки соответствующих параметров:

$$P_{\max} = \frac{\varepsilon_{\max}}{\frac{4}{3}\pi r_{0\max}^3} = \varepsilon_{\max} \cdot \rho_{\max}, \quad (3)$$

где $\varepsilon_{\max}$ —удельная энергия связи бесконечной ядерной материи, МэВ/нуклон; $r_{0\max}$ —радиус ячейки Вигнера-Зейтца для бесконечной ядерной материи, фм ; $\rho_{\max} = 3/(4\pi r_{0\max}^3)$ —численная плотность конфигурационной упаковки бесконечной ядерной материи, фм^{-3} .

Параметр $\varepsilon_{\max}$ —аналог объемного коэффициента в формуле Бете-Вайцеккера для капельно-жидкостной математической модели атомного ядра. Расчетное значение объемного коэффициента в формуле Бете-Вайцеккера может находиться в диапазоне от

10.5 МэВ/нуклон до 20 МэВ/нуклон в зависимости от процедуры его расчета или способа обработки экспериментальных данных [3, с. 38].

Атомное ядро представляет собой открытую квантовую систему без теплообмена с окружающей средой. Поэтому, для описания зависимости давления внутри объема атомного ядра от его объемной плотности конфигурационной упаковки нуклонами, используется уравнение адиабаты:

$$\frac{P(N,Z)}{P_{\max}} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_{\max}} \right)^{\gamma} = \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)^{\gamma}, \quad (4)$$

где $\sigma = (r_p/r_0)^3$ —объемная плотность конфигурационной упаковки нуклонов в атомном ядре; $\sigma_{\max} = (r_p/r_{0\max})^3$ —объемная плотность конфигурационной упаковки нуклонов в бесконечной ядерной материи; $r_p = 0.84075 \pm 0.00064$ —радиус объема ядра водорода, равный среднеквадратичному зарядовому радиусу протона [14], фм; $\gamma = 1+2/\varphi$ —показатель адиабаты; $1 \leq \varphi \leq 3$ —число степени свободы одного сферического нуклона.

Число степени свободы нуклона—это число независимых координат, в направлении которых нуклон может отклоняться от своего равновесного положения в объеме атомного ядра.

После подстановки (2) и (3) в (4), учета зависимости между радиусом ячейки Вигнера-Зейтца и объемной плотностью конфигурационной упаковки нуклонов в объеме атомного ядра, получается зависимость удельной энергии связи от плотности заполнения нуклонами ядра нуклида

$$\frac{\varepsilon(N,Z)}{\varepsilon_{\max}} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_{\max}} \right)^{2/\varphi} = \left(\frac{r_{0\max}}{r_0} \right)^{6/\varphi}. \quad (5)$$

Соотношение для оценки объемной плотности заполнения сферического атомного ядра идентичными сферическими нуклонами получается далее с помощью Z-алгоритма послойной конфигурационной упаковки нуклонов в объеме ядра. Результат работы Z-алгоритма будет называться Z-упаковкой.

2.1 Z-алгоритм послойной конфигурационной упаковки идентичных сферических нуклонов в сферический объём атомного ядра

Z-алгоритм определяет процесс конфигурационной упаковки нуклонов в ядро нуклида. Основной принцип Z-алгоритма—заполнение объема ядра нуклида нуклонами

происходит от внешней границы ядра к его центру. Процесс заполнения производится послойно, слой за слоем. Результат процесса послойной Z-упаковки нуклонов в атомное ядро определяется двумя характерными размерами: радиусом объема атомного ядра R и радиусом нуклона r_p . Отношение этих характерных размеров будет называться индексом размеров атомного ядра

$$\lambda = \frac{R}{r_p} = \frac{r_0 \cdot A^{1/3}}{r_p}.$$

Каждый слой нуклонов условно создаёт новую границу на расстоянии двух радиусов нуклона от положения предыдущей границы. Радиус срединной поверхности R_j , проходящей через центры нуклонов в j -ом слое атомного ядра, равен:

$$R_j = R - r_p - 2r_p \cdot j, \quad (6)$$

где $j = 0, \dots, j_{\max}$ —номер слоя нуклонов в объеме атомного ядра.

Заполнение нуклонами ядра нуклида завершается при достижении центра объема ядра, когда образуется слой нуклонов с максимальным значением его номера:

$$j_{\max} = [(\lambda - 1)/2],$$

где $[x]$ —целочисленная часть числа x .

2.2 Математическая модель послойной Z-упаковки нуклонов в сферическое атомное ядро

С учетом понятия индекса размеров соотношение (6) преобразуется:

$$\lambda_j = \lambda - 1 - 2j, \quad j = 0, \dots, j_{\max},$$

где $\lambda_j = R_j/r_p$ —индекс размера в j -ом слое Z-упаковки.

Каждый нуклон в j -ом слое дает из центра ядра раствор лучей с углом θ_j

$$\sin\left(\frac{\theta_j}{2}\right) = \frac{r_p}{R_j} = \lambda_j^{-1}. \quad (7)$$

Соответствующее значение телесного угла раствора лучей с углом θ_j вычисляется следующим образом:

$$\omega_j = \Omega \cdot \sin^2\left(\frac{\theta_j}{4}\right), \quad (8)$$

где $\Omega = 4\pi$ —полный телесный угол трехмерной сферы.

После преобразований (8) с учетом (7) получается

$$\omega_j = 2\pi \left(1 - \sqrt{1 - \lambda_j^{-2}}\right).$$

Тогда максимальное число нуклонов в j -ом слое ядра, без учета потери части срединной поверхности между соседними нуклонами, равно

$$\Psi_j(\lambda) = \left\lfloor \frac{\Omega}{\omega_j} \right\rfloor = \left\lfloor 2 / \left(1 - \sqrt{1 - \lambda_j^{-2}}\right) \right\rfloor.$$

Полученное выражение трудно вычислить при больших значениях индекса размера ядра, т.к. в его знаменателе получается разность очень близких к единице чисел. Можно заметить, что указанное выражение для $\Psi_j(\lambda)$ является одним из корней квадратного уравнения $[x/(2\lambda_j)]^2 - x + 1 = 0$.

Существует и другое выражение для этого корня, в котором разность заменяется сложением и которое не теряет точность при произвольно большом значении индекса размера ядра

$$\Psi_j(\lambda) = \left\lfloor 2 / \left(1 - \sqrt{1 - \lambda_j^{-2}}\right) \right\rfloor = \left\lfloor 2\lambda_j^2 \left(1 + \sqrt{1 - \lambda_j^{-2}}\right) \right\rfloor.$$

Суммарное число нуклонов в сферическом атомном ядре с индексом размера λ равно

$$\Psi(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda < 1 \\ 1, & \text{если } 1 \leq \lambda < 2 \\ 1 + \sum_{j=0}^{j_{\max}-1} \Psi_j(\lambda), & \text{если } \lambda - 1 - 2j_{\max} < 1 \\ \sum_{j=0}^{j_{\max}} \Psi_j(\lambda), & \text{если } \lambda - 1 - 2j_{\max} \geq 1 \end{cases}.$$

Объемная плотность Z -упаковки нуклонов в атомном ядре с индексом размера λ оценивается следующим образом

$$\sigma(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda = 0 \\ \frac{\Psi(\lambda) \frac{4}{3}\pi r_p^3}{V} = \frac{\Psi(\lambda)}{\lambda^3}, & \text{если } \lambda > 0 \end{cases}. \quad (9)$$

Максимальное значение объемной плотности Z -упаковки нуклонов в бесконечной ядерной материи определяется из условия бесконечного увеличения ее индекса размера

$$\sigma_{\max} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sigma(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^{j_{\max}} \Psi_j(\lambda)}{\lambda^3} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^{j_{\max}} \left[2\lambda_j^2 \left(1 + \sqrt{1 - \lambda_j^{-2}}\right) \right]}{\lambda^3} = \frac{2}{3} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right) = \frac{2}{3}.$$

Найденное максимальное значение объемной плотности Z-упаковки нуклонов в бесконечной ядерной материи оказалось равным граничному значению под названием “плотность Kauzmann”, которая соответствует критической точке, когда происходит фазовый переход от разупорядоченной, случайной упаковки к регулярной, кристаллической упаковке [15].

Соответствующие значения радиуса ячейки Вигнера-Зейтца и численной плотности конфигурационной упаковки для бесконечной ядерной материи вычисляются следующим образом:

$$r_{0\max} = \frac{r_p}{\sigma_{\max}^{1/3}} = \frac{0.84075 \pm 0.00064}{\left(\frac{2}{3}\right)^{1/3}} = 0.96242 \pm 0.00073 \text{ фм} ;$$

$$\rho_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{\frac{4}{3}\pi r_p^3} = \frac{2/3}{\frac{4}{3}\pi(0.84075 \pm 0.00064)^3} = 0.26780 \mp 0.00061 \text{ фм}^{-3} .$$

Значение $r_{0\max}$ получилось больше значения радиуса нуклона, что соответствует бесконечной нуклонной материи, когда все нуклоны отделены друг от друга.

При условии задания значений параметров $\varepsilon_{\max}$ и φ соотношение (5) позволяет вычислить значения радиуса ячейки Вигнера-Зейтца для атомных ядер по известным из эксперимента или расчета значениям их удельной энергии связи

$$r_0 = r_{0\max} \left(\frac{\varepsilon(N,Z)}{\varepsilon_{\max}} \right)^{-\varphi/6} .$$

После определения значений r_0 появляется возможность расчета объемной плотности конфигурационной упаковки взаимодействующих между собой нуклонов в атомных ядрах по соотношению аналогичному для объемной плотности Z-упаковки (9)

$$\sigma_A(\lambda) = \frac{A}{\lambda^3} .$$

Экспериментальные и расчетные значения удельной энергии связи 3149 атомных ядер были взяты из базы данных ЦДФЭ НИИЯФ МГУ [16] с минимальным и максимальным значениями массового числа $A_{\min} = 2$, $A_{\max} = 292$; минимальным и максимальным значениями числа протонов $Z_{\min} = 1$, $Z_{\max} = 117$ и числа нейтронов $N_{\min} = 1$, $N_{\max} = 176$.

Результаты расчёта объемной плотности конфигурационной упаковки 3149 атомных ядер, Z-упаковки и случайной упаковки идентичных 3D сфер в объем 3D сферы для различных значений их индекса размера приведены на рис. 1.

Из рис. 1 следует, что расчетные значения объемной плотности Z-упаковки достаточно хорошо соответствуют значениям объемной плотности случайной упаковки идентичных 3D сфер в объем 3D сферы, которые получены экспериментально G. D. Scott в 1960-1969 годах [17; 18]. Согласно экспериментальным данным G. D. Scott максимальное значение объемной плотности случайной упаковки идентичных 3D сфер в объем сосуда в виде 3D сферы равно $0.6366 \approx 2/\pi$, что на 4.5% меньше найденного выше значения $\sigma_{\max} = 2/3$ из-за не устранимого воздействия стенок сосуда, трения и защемления между соседними 3D сферами.

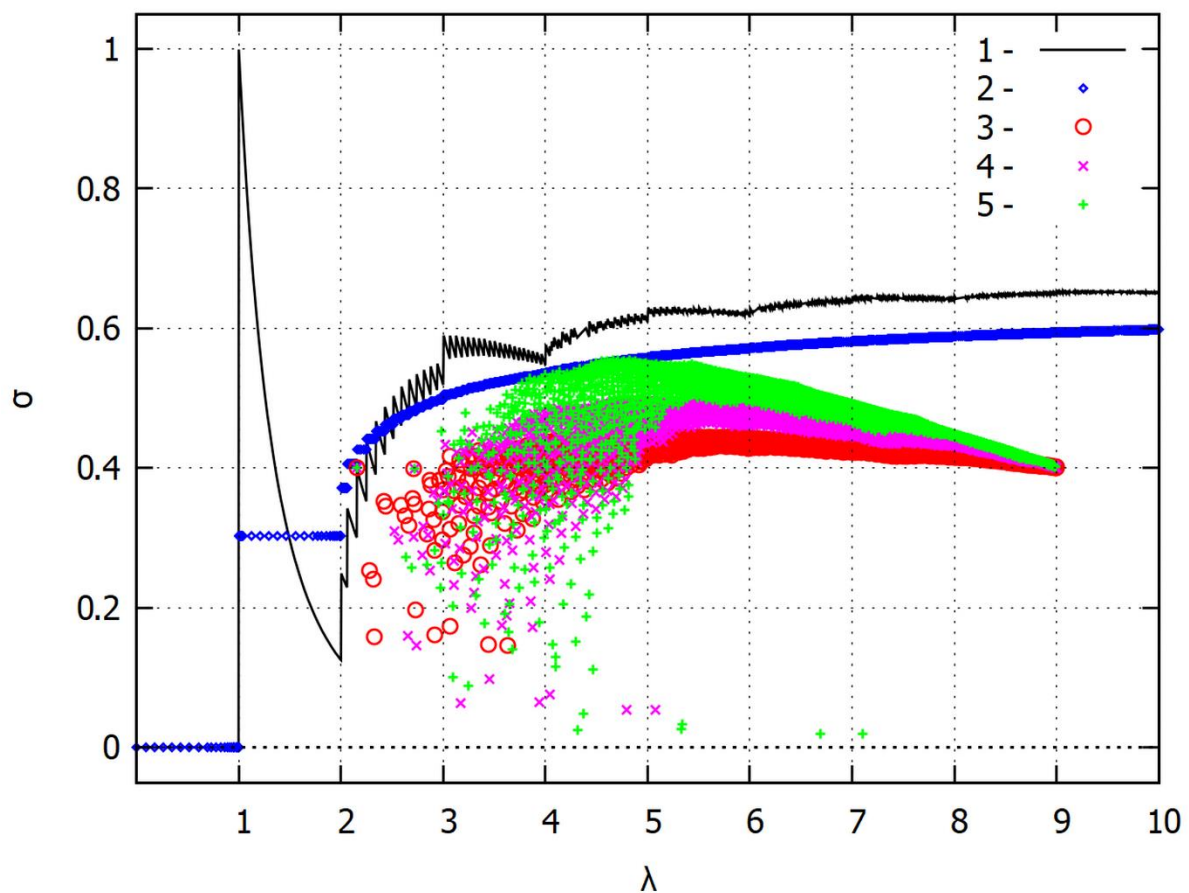


Рис. 1 Объемная плотность упаковки идентичных 3D сфер в объем 3D сферы при различных значениях индекса их размера (1—расчетная кривая $\sigma(\lambda)$ для Z-упаковки; 2—эмпирическая корреляция $\sigma_{\text{exp}}(\lambda) = 0.6366 - 0.33/\Psi(\lambda)^{1/3}$ из экспериментов G. D. Scott; 3—расчетные значения $\sigma_A(\lambda)$ для 3149 атомных ядер, когда $\varepsilon_{\max} = 19.6643$ МэВ/нуклон и φ

= 1; 4—расчетные значения $\sigma_A(\lambda)$ для 3149 атомных ядер, когда $\varepsilon_{\max} = 11.7942$ МэВ/нуклон и $\varphi = 2$; 5—расчетные значения $\sigma_A(\lambda)$ для 3149 атомных ядер, когда $\varepsilon_{\max} = 9.9464$ МэВ/нуклон и $\varphi = 3$)

2.3 Показатель эффективности нуклонов в сферических атомных ядрах

Объемная плотность Z-упаковки получена для не взаимодействующих между собой трехмерных сфер. Поэтому на рис. 1 расчетные значения $\sigma_A(\lambda)$ для объемной плотности конфигурационной упаковки нуклонов, взаимодействующих друг с другом в объеме атомных ядер, плохо согласуются с кривой $\sigma(\lambda)$ для Z-упаковок, за исключением ядра гелия ${}^4_2\text{He}^{2+}$ у которого значение объемной плотности конфигурационной упаковки нуклонов в объеме α -частицы $\sigma_\alpha(\lambda_\alpha) = \max(\sigma(\lambda_\alpha))$, где $\lambda_\alpha = 2.1547$ при любом значении числа степени свободы нуклона $1 \leq \varphi \leq 3$ согласно рис.1.

Взаимодействие нуклонов в ядре нуклида далее будет учитываться показателем эффективности нуклонов в объеме атомного ядра $0 < \xi \leq 1$. Предполагается, что только эффективные нуклоны создают требуемые значения характеристик атомного ядра не взаимодействуя друг с другом. Введенное понятие эффективности нуклонов отчасти напоминает понятие валентности нуклонов, когда за характеристики атомного ядра отвечают в основном только валентные нуклоны ядра (создающие так называемое “гало” ядра), а остальные нуклоны в объеме атомного ядра (образующие так называемый “кор” ядра) себя мало проявляют [4, р. 11; 19, р. 42].

В ядре нуклида с массовым числом A имеется в среднем $\xi \cdot A$ эффективных нуклонов, для которых условие Z-упаковки выглядит следующим образом:

$$\Psi(\lambda_{\text{eff}}) = \xi \cdot A, \quad (10)$$

где $\lambda_{\text{eff}} = r_0(\xi \cdot A)^{1/3}/r_p$ —индекс эффективного размера атомного ядра с массовым числом A.

Среднее число эффективных нуклонов $\xi \cdot A$ —это число не взаимодействующих квазичастиц, которые в эффективном объеме атомного ядра создают объемную плотность, значение которой равно объемной плотности взаимодействующих нуклонов в реальном

атомном ядре. Кроме объемной плотности нуклонов в ядре нуклида, среднее число эффективных нуклонов однозначно определяет значения и других характеристик атомного ядра.

В данной статье при заданных значениях параметров $\varepsilon_{\max}$ и φ поиск в (10) значений показателя эффективности нуклонов ξ производится методом дихотомии с помощью функции **find-root** из системы аналитических вычислений СПО **Maxima** с постоянным начальным интервалом поиска $[10^{-5}; 2]$. Выбор метода дихотомии для поиска ξ , значение которого минимизирует невязку уравнения (10), объясняется тем, что ступенчатую функцию $\Psi(\lambda)$ невозможно продифференцировать.

Значения объемной плотности конфигурационной упаковки нуклонов в атомном ядре (с учетом найденных значений ξ) вычисляются следующим образом

$$\sigma_A(\lambda_{\text{eff}}) = \frac{\xi \cdot A}{\lambda_{\text{eff}}^3}. \quad (11)$$

Для заданного числа степени свободы нуклона в атомном ядре φ значение параметра $\varepsilon_{\max}$ определяется из условия, что максимальное значение показателя эффективности одного нуклона в объеме атомного ядра не может превышать единицы $\max(\xi) = 1$, т.к. среднее число эффективных нуклонов в объеме атомного ядра $\xi \cdot A$ не может быть больше значения его массового числа.

Например, при значении параметра $\varphi = 1$ условие $\max(\xi) = 1$ выполняется в случае $\varepsilon_{\max} = 19.6643$ МэВ/нуклон, при значении параметра $\varphi = 2$ получается $\varepsilon_{\max} = 11.7942$ МэВ/нуклон, а при $\varphi = 3$ получается $\varepsilon_{\max} = 9.9464$ МэВ/нуклон. Среди всех исходных 3149 нуклидов равенство $\xi = 1$ достигается только для ядра гелия ${}^4\text{He}^{2+}$ (α -частицы) при всех значениях числа степени свободы нуклонов в атомном ядре. Такое выделенное положение α -частиц подтверждается как экспериментально [20], так и результатами расчетов квантового фазового перехода α -подобных атомных ядер [21].

В результате определения показателя эффективности нуклонов в объеме атомных ядер в случае значений параметров $\varepsilon_{\max} = 19.6643$ МэВ/нуклон и $\varphi = 1$ произошло разделение исходного массива из 3149 атомных ядер на восемь классов нуклидов, согласно численным значениям их индекса эффективного размера λ_{eff} , рис. 2.

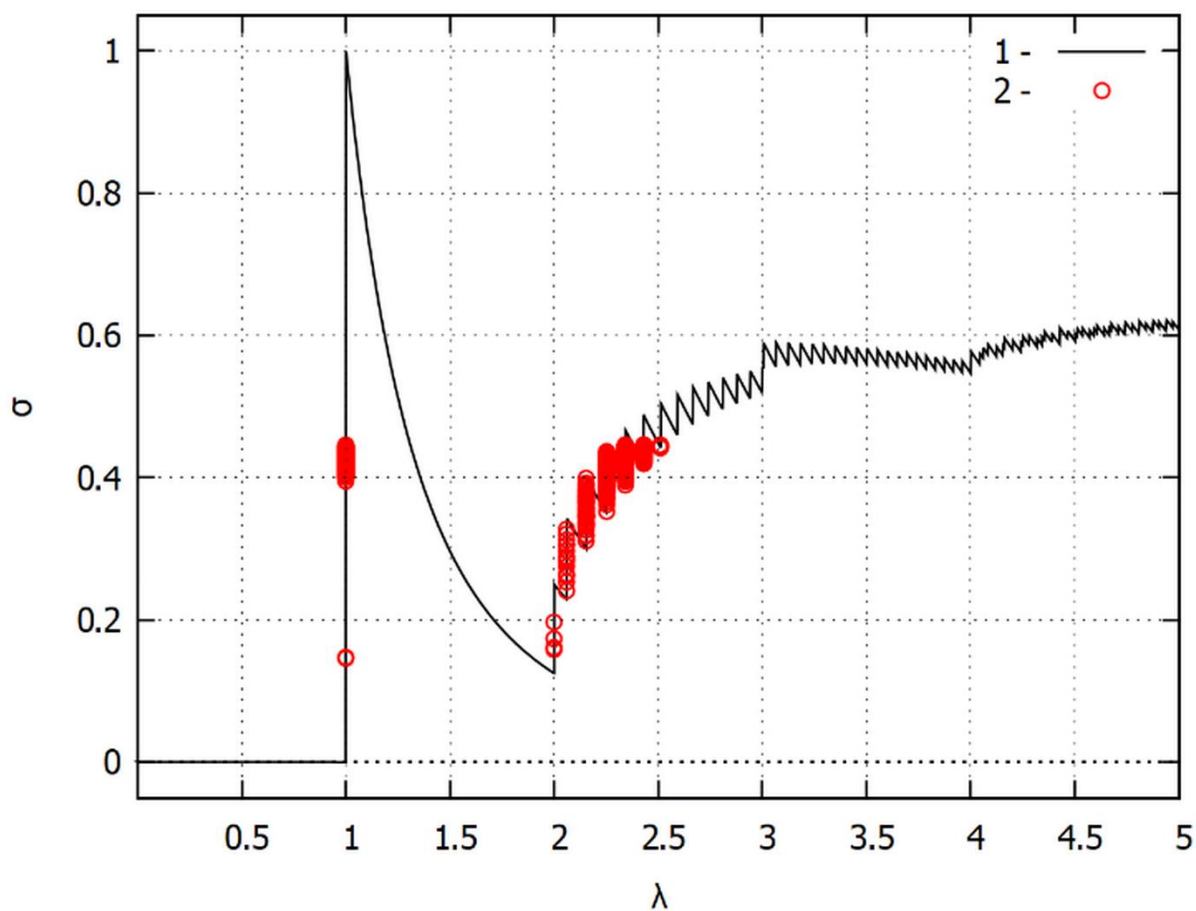


Рис. 2 Распределение 3149 нуклидов по расчетной кривой $\sigma(\lambda)$ в зависимости от их индекса эффективного размера, когда значения параметров $\varepsilon_{\max} = 19.6643$ МэВ/нуклон и $\varphi = 1$ (1—расчетная кривая $\sigma(\lambda)$ для Z-упаковки; 2—объемная плотность конфигурационной упаковки 3149 ядер нуклидов $\sigma_A(\lambda_{\text{eff}})$)

Выделенное среди всех ядер нуклидов положение α -частицы позволяет сделать следующие выводы:

- все четыре нуклона в составе α -частицы эффективны ($A_\alpha = 4$; $\xi_\alpha = 1$);
- индекс эффективного размера α -частицы, попавшей в четвертый класс нуклидов, согласно рис. 2 равен $\lambda_\alpha = 2.1547$;
- нуклоны в объеме α -частицы упакованы наиболее плотно среди всех ядер нуклидов четвертого класса.

После подстановки значений характеристик α -частицы в соотношения (5) и (11) получается выражение для расчета значений $\varepsilon_{\max}$ в зависимости от числа степени свободы нуклонов в объеме атомного ядра:

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_{\alpha} \left(\frac{\sigma_{\max} \cdot \lambda_{\alpha}^3}{\xi_{\alpha} \cdot A_{\alpha}} \right)^{2/\varphi}, \quad (12)$$

где $\varepsilon_{\alpha} = 7.073916$ МэВ/нуклон — удельная энергия связи нуклонов в α -частице, измеренная с погрешностью <0.5 эВ [22].

Результаты поиска значений параметра $\varepsilon_{\max}$ и значений показателя эффективности нуклонов в 3149 атомных ядрах приводятся на рис. 3 и в табл. 1.

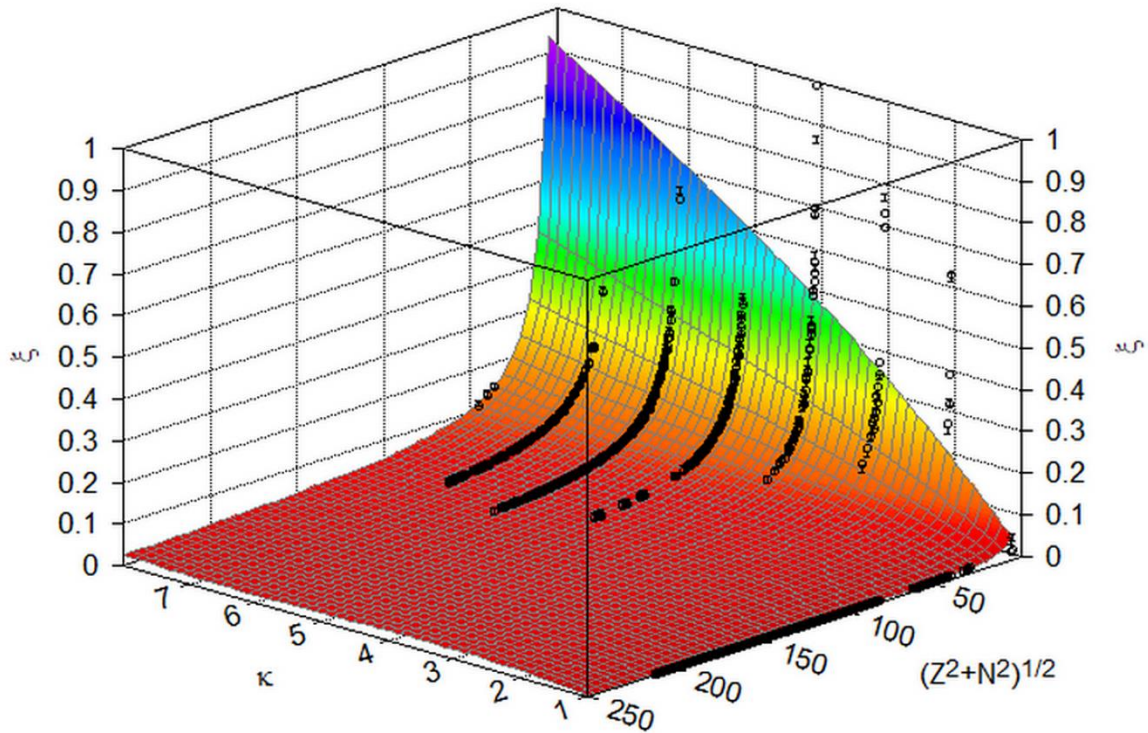


Рис. 3 Показатель эффективности нуклонов в ядрах 3149 нуклидов, когда число степени свободы нуклона $\varphi = 1$

Таблица 1. Результаты обработки экспериментальных значений удельной энергии связи 3149 атомных ядер, взятых из [22]

Параметр	Значения параметра		
Число степени свободы нуклона, φ	1	2	3
ε_{max} , МэВ/нуклон	19.6643	11.7942	9.9464
Число классов нуклидов	8	11	17

На рис. 3 расчетные значения показателя эффективности нуклонов в атомных ядрах представлены в виде трехмерного изображения в зависимости от двух факторов: класса нуклида (κ) и параметра $r_A = (Z^2 + N^2)^{1/2}$ для нуклида с массовым числом $A = Z + N$. Необходимо отметить, что гладкая зависимость трехмерной поверхности показателя эффективности нуклонов от числа нейтронов и числа протонов в атомном ядре получилась в результате устранения скачков в значениях удельной энергии связи благодаря разделению исходного массива из 3149 нуклидов на восемь классов с использованием ступенчатой функции $\Psi(\lambda)$.

Трехмерные поверхности показателя эффективности нуклонов в атомных ядрах, для трех вариантов значения числа степени свободы нуклонов, аппроксимировались наиболее адекватными математическими моделями с помощью программы TableCurve3d. Соответствующие значения критериев качества отображения расчетных данных наиболее адекватными математическими моделями представлены в табл. 2, 3 и 4.

Таблица 2. Критерии качества отображения трехмерной поверхности показателя эффективности нуклонов в случае $\varphi = 1$ наиболее адекватной математической моделью №151232740 по каталогу программы TableCurve3d: $\ln(\xi) = a + b/\kappa^{1/2} + c \cdot \ln(r_A)$

Коэффициент детерминации	Скорректированный коэффициент детерминации	Стандартная ошибка	Критерий Фишера
0.9965390327	0.9965357313	0.0044896241	452924.22136
Параметры модели			

Параметр	Значение параметра	Ошибка	t-критерий	Доверительные пределы 95%
a	2.954285927	0.011335984	260.6113463	2.932059256 2.976512598
b	-4.16639895	0.018670895	-223.149398	-4.20300732 -4.12979059
c	-0.96519273	0.001327660	-726.987656	-0.96779590 -0.96258956
Дисперсионный анализ				
Источник изменчивости	Сумма квадратов	Число степени свободы	Средний квадрат	Критерий Фишера
Фактор	18.258938	2	9.1294688	452924
Ошибка	0.063413056	3146	$2.01567 \cdot 10^{-5}$	
Сумма	18.322351	3148		

Таблица 3. Критерии качества отображения трехмерной поверхности показателя эффективности нуклонов в случае $\varphi = 2$ наиболее адекватной математической моделью №151239776 по каталогу программы TableCurve3d: $\ln(\xi) = a + b \cdot \kappa / \ln(\kappa) + c / \kappa + d \cdot \ln(r_A)$

Коэффициент детерминации	Скорректированный коэффициент детерминации	Стандартная ошибка	Критерий Фишера	
0.9960521669	0.9960471443	0.0045827237	264498.18744	
Параметры модели				
Параметр	Значение параметра	Ошибка	t-критерий	Доверительные пределы 95%
a	0.711307549	0.015581899	45.64960557	0.680755830 0.741859267

b	0.317927641	0.003598286	88.35530783	0.310872415 0.324982867
c	-2.90269494	0.023790641	-122.009951	-2.94934169 -2.85604819
d	-0.97405808	0.001322449	-736.556165	-0.97665103 -0.97146513
Дисперсионный анализ				
Источник изменчивости	Сумма квадратов	Число степени свободы	Средний квадрат	Критерий Фишера
Фактор	16.664462	3	5.5548208	264498
Ошибка	0.066049267	3145	$2.10014 \cdot 10^{-5}$	
Сумма	16.730512	3148		

Таблица 4. Критерии качества отображения трехмерной поверхности показателя эффективности нуклонов в случае $\varphi = 3$ наиболее адекватной математической моделью №151360429 по каталогу программы TableCurve3d: $\ln(\xi) = a + b \cdot \kappa + c \cdot \kappa \cdot \ln(\kappa) + d \cdot \kappa^{1/2} \cdot \ln(\kappa) + e(\ln(\kappa))^2 + f \cdot \ln(r_A)$

Коэффициент детерминации	Скорректированный коэффициент детерминации	Стандартная ошибка	Критерий Фишера	
0.9941958716	0.9941847880	0.0072797175	107673.62225	
Параметры модели				
Параметр	Значение параметра	Ошибка	t-критерий	Доверительные пределы 95%
a	279.3602973	2.608224956	107.1074397	274.2463009 284.4742936
b	-281.717008	2.624115045	-107.356958	-286.862160 -276.571855

c	37.74269163	0.352910734	106.9468507	37.05073284 38.43465043
d	251.5354886	2.326735366	108.1066168	246.9734143 256.0975630
e	-30.3517875	0.285408696	-106.344999	-30.9113938 -29.7921813
f	-0.98439523	0.001830309	-537.830121	-0.98798395 -0.98080650
Дисперсионный анализ				
Источник изменчивости	Сумма квадратов	Число степени свободы	Средний квадрат	Критерий Фишера
Фактор	28.530434	5	5.7060868	107674
Ошибка	0.16656104	3143	$5.29943 \cdot 10^{-5}$	
Сумма	28.696995	3148		

Согласно значениям критерия Фишера, указанным в табл. 2, 3 и 4, наиболее адекватное математическое отображения значений показателя эффективности нуклонов в ядрах 3149 нуклидов получилось в случае, когда значение параметра $\varphi = 1$. При проведении дальнейших расчетов будет использоваться только это значение числа степени свободы нуклонов в объеме атомных ядер.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Сводные данные по результатам расчета показателя эффективности нуклонов в ядрах 3149 нуклидов для значений параметров $\sigma_{\max} = 2/3$, $\epsilon_{\max} = 19.6643$ МэВ/нуклон и $\varphi = 1$ приводятся в табл. 5.

Таблица 5. Сводные данные по результатам расчетов показателя эффективности нуклонов

Номер класса нуклидов, k	Мощность класса нуклидов, $ A_k $	Нижняя граница $\xi \cdot A$	Верхняя граница $\xi \cdot A$	Индекс эффективного размера, λ_{eff}
1	1701	0	1	1

2	4	1	2	2
3	14	2	3	2.060660...
4	44	3	4	2.154700...
5	139	4	5	2.2499948...
6	747	5	6	2.341640...
7	492	6	7	2.428869...
8	8	7	8	2.51185789...

Значения индекса эффективного размера нуклидов из восьми классов в табл. 5 соответствуют восьми точкам на оси индекса размера в интервале $[0.5; 3.0]$, где наблюдается скачкообразное изменение объемной плотности Z-упаковки, рис. 2.

Согласно рис. 2 объемная плотность Z-упаковки нуклонов в ядрах нуклидов из первого класса ($\lambda_{\text{eff}} = 1$) имеет предельное значение $\sigma_{\text{lim}} = 1$. Такое предельное значение соответствует либо объемной плотности конфигурационной упаковки протона в ядре атома водорода, либо второму возможному варианту объемной плотности конфигурационной упаковки бесконечной ядерной материи. Для предельного значения $\sigma_{\text{lim}} = 1$ из (2) и (5) получаются следующие предельные значения удельной энергии связи, численной плотности конфигурационной упаковки, радиуса ячейки Вигнера-Зейтца и предельного давления:

$$\varepsilon_{\text{lim}} = \varepsilon_{\text{max}} \left(\frac{\sigma_{\text{lim}}}{\sigma_{\text{max}}} \right)^{2/\varphi} = 19.6643 \left(\frac{1}{2/3} \right)^{2/1} = 44.244675 \frac{\text{МэВ}}{\text{нуклон}};$$

$$\rho_{\text{lim}} = \frac{\sigma_{\text{lim}}}{\frac{4}{3}\pi r_p^3} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi (0.84075 \pm 0.00064)^3} = 0.401708 \mp 0.00092 \text{ фм}^{-3};$$

$$r_{0\text{lim}} = \frac{r_p}{\sigma_{\text{lim}}^{1/3}} = \frac{0.84075 \pm 0.00064}{1^{1/3}} = 0.84075 \pm 0.00064 \text{ фм};$$

$$P_{\text{lim}} = \varepsilon_{\text{lim}} \cdot \rho_{\text{lim}} = 44.244675 \cdot (0.40171 \mp 0.00092) = (17.77353 \mp 0.040705) \frac{\text{МэВ/нуклон}}{\text{фм}^3}.$$

Второй вариант бесконечной ядерной материи, согласно значению $r_{0\text{lim}}$, соответствует полному слиянию нуклонов друг с другом, что возможно либо в ядре атома водорода, либо в бесконечной кварк-глюонной материи.

В случае бесконечной нуклонной материи значение давления вычисляется следующим образом (3)

$$P_{\max} = \varepsilon_{\max} \cdot \rho_{\max} = 19.6643 \cdot (0.26780 \mp 0.00061) = (5.2661 \mp 0.011995) \frac{\text{МэВ/нуклон}}{\text{фм}^3}.$$

В работе [11] экспериментально определено радиальное распределение давления по объему протона $P(r)$. Эксперимент проведен с использованием глубокого виртуального комптоновского рассеивания высоко энергетических (6 ГэВ) электронов протонами в жидком водороде. Последующая обработка результатов эксперимента разделила объем протона на две области: область с положительными значениями давления расширения и область с отрицательными значениями давления сжатия (компактизации). Найденное в [11] радиальное распределение давления взаимодействующих между собой кварков в объеме протона подчиняется выполнению условия фон Лауэ

$$\int_0^{\infty} r^2 \cdot P(r) \cdot dr = 0.$$

Область с давлением расширения расположена около центра объема протона и на расстоянии $r_+ \approx 0.254$ фм от центра имеет экстремум $r_+^2 \cdot P(r_+) \approx 0.074892$ ГэВ/фм. Область с давлением компактизации расположена на периферии объема протона и на расстоянии $r_- \approx 0.84075$ фм от центра объема протона имеет значение $r_-^2 \cdot P(r_-) \approx 0.030797$ ГэВ/фм. Из приведенных выше данных, полученных после оцифровки результатов [11, Fig. 1], следует:

$$P(r_+) \cong \frac{0.074892 \cdot 10^3}{0.254^2} = 1160.8283 \frac{\text{МэВ/нуклон}}{\text{фм}^3};$$

$$P(r_-) \cong \frac{0.030797 \cdot 10^3}{0.84075^2} = 43.568706 \frac{\text{МэВ/нуклон}}{\text{фм}^3}.$$

Давление компактизации на границе объема протона $P(r_-)$, учитывая указанную автором погрешность ($\sim 100\%$) полученных в [11] результатов, удовлетворительно согласуется с расчетным предельным значением давления кварк-глюонной материи $P_{\text{lim}} = 17.77353$ (МэВ/нуклон)/фм³.

Результат разделения 3149 нуклидов на восемь классов фиксируется в виде двумерной матрицы классов атомных ядер $\mathcal{M}[Z_{\max}, N_{\max}]$. Значение элемента матрицы классов $\mathcal{M}[Z, N]$ равно номеру того класса атомных ядер, к которому принадлежит ядро нуклида с числом протонов Z и числом нейтронов N .

График распределения нуклидов из каждого класса на карте нуклидов приводится на рис. 4. Область расположения нуклидов из первого класса на карте нуклидов свидетельствует о том, что только в первом классе нуклидов возможно появление сверхтяжелых нуклидов.

В рамках одного класса нуклидов, характеризующихся постоянным значением индекса эффективного размера их ядер λ_{eff} , справедлива линейная зависимость (11) объемной плотности Z-упаковки нуклида от среднего числа эффективных нуклонов в объеме его ядра (рис. 5)

$$\sigma_A(\lambda_{\text{eff}}) = \frac{\xi \cdot A}{\lambda_{\text{eff}}^3} = \sigma_\alpha \frac{\xi \cdot A}{\xi_\alpha \cdot A_\alpha} \left(\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_{\text{eff}}} \right)^3, \quad (13)$$

где $\sigma_\alpha = \xi_\alpha \cdot A_\alpha / \lambda_\alpha^3 = 1 \cdot 4 / 2.1547^3 = 0.39985196$ —объемная плотность конфигурационной упаковки нуклонов в α -частице.

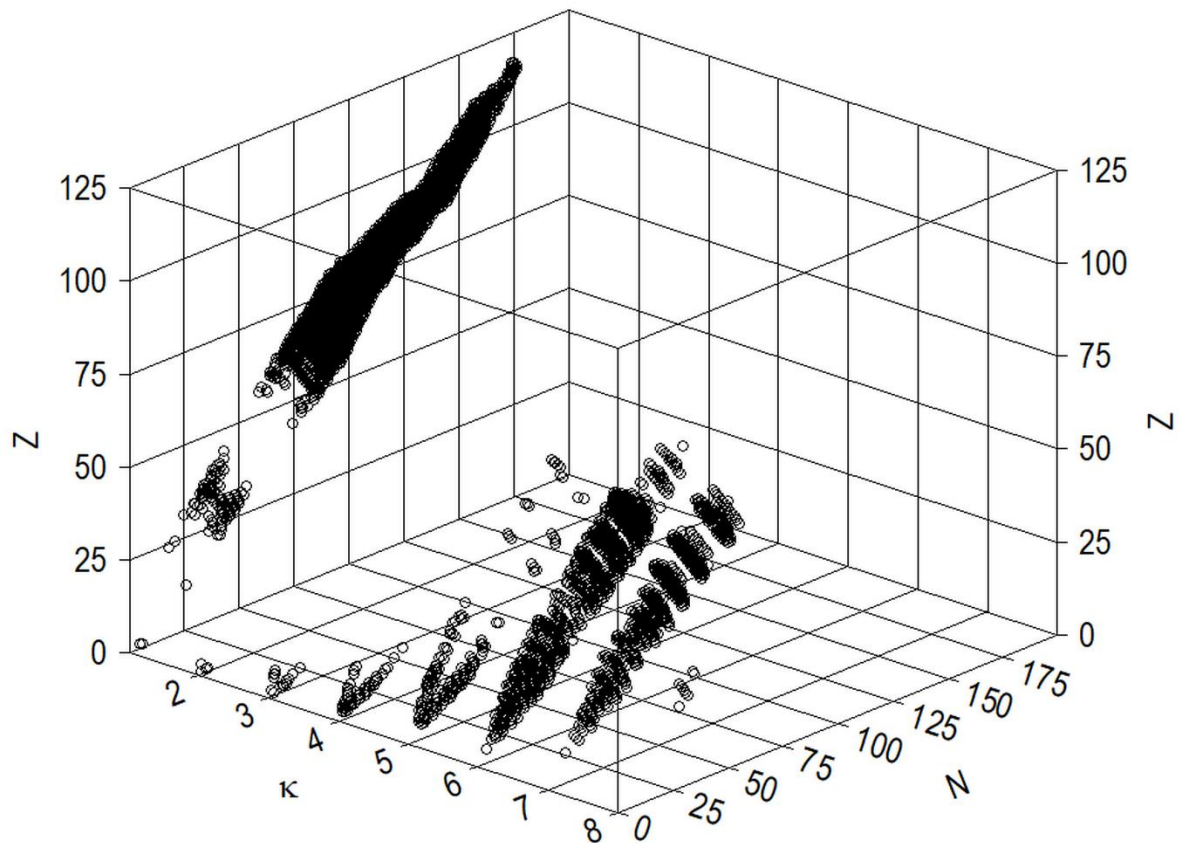


Рис. 4 Распределение восьми классов нуклидов на карте нуклидов

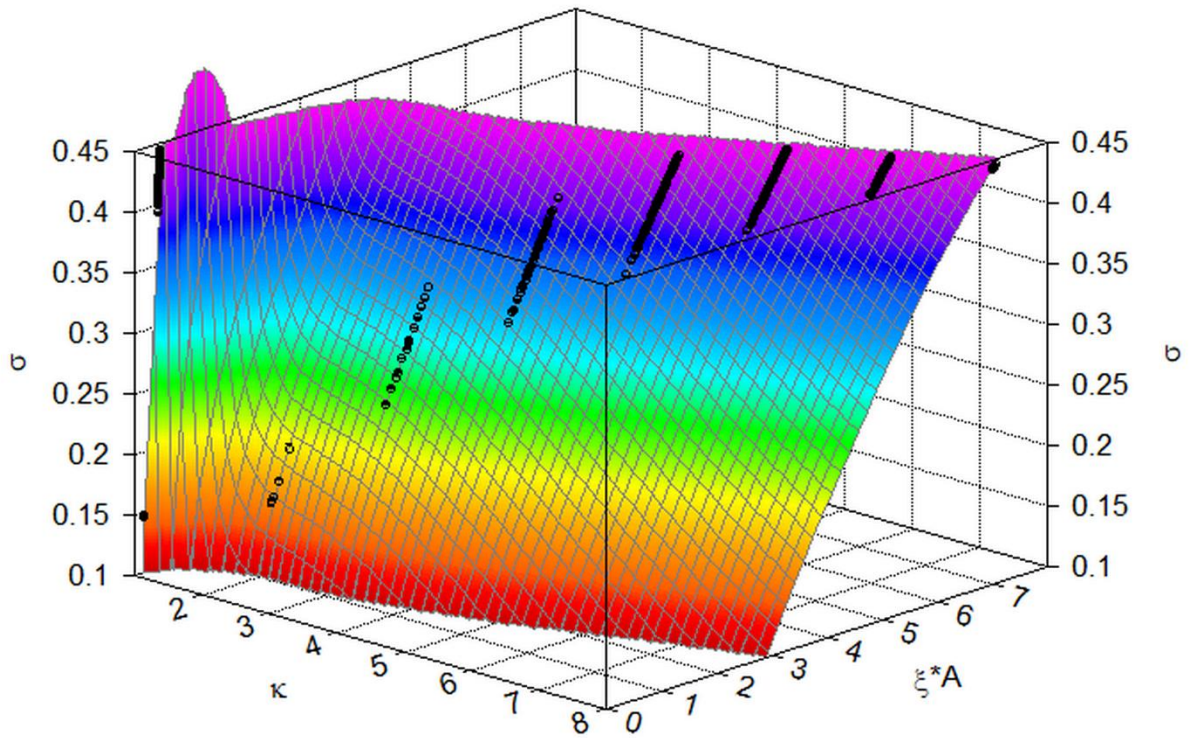


Рис. 5 Объемная плотность конфигурационной упаковки ядер нуклидов из всех классов в зависимости от среднего числа эффективных нуклонов в их ядре

Согласно рис. 5 и вычисленному значению σ_α конфигурационная упаковка нуклонов в объеме α -частицы не самая плотная среди всех ядер нуклидов, хотя объемная плотность конфигурационной упаковки нуклонов в α -частице имеет наибольшее возможное значение среди нуклидов 4-го класса (рис. 2).

После подстановки (11) в (5) и в (4), с учетом (12) получаются зависимости значений удельной энергии связи (рис. 6) и радиуса ячейки Вигнера-Зейтца (рис. 7) от среднего числа эффективных нуклонов в ядре нуклида с массовым числом A :

$$\varepsilon(N, Z) = \varepsilon_{\max} \left(\frac{\xi \cdot A}{\sigma_{\max} \cdot \lambda_{\text{eff}}^3} \right)^2 = \varepsilon_\alpha \left(\frac{\xi \cdot A}{\xi_\alpha \cdot A_\alpha} \left(\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_{\text{eff}}} \right)^3 \right)^2; \quad (14)$$

$$r_0 = r_{0\max} \left(\frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon} \right)^{1/6} = \frac{r_p \cdot \lambda_{\text{eff}}}{(\xi \cdot A)^{1/3}} = r_{0\alpha} \frac{\lambda_{\text{eff}}}{\lambda_\alpha} \left(\frac{\xi_\alpha \cdot A_\alpha}{\xi \cdot A} \right)^{1/3}, \quad (15)$$

где $r_{0\alpha} = r_p \cdot \lambda_\alpha / (\xi_\alpha \cdot A_\alpha)^{1/3} = (0.84075 \pm 0.00064) \cdot 2.1547 / (1 \cdot 4)^{1/3} = 1.1412138 \pm 0.0008687$ — радиус ячейки Вигнера-Зейтца для α -частицы, фм.

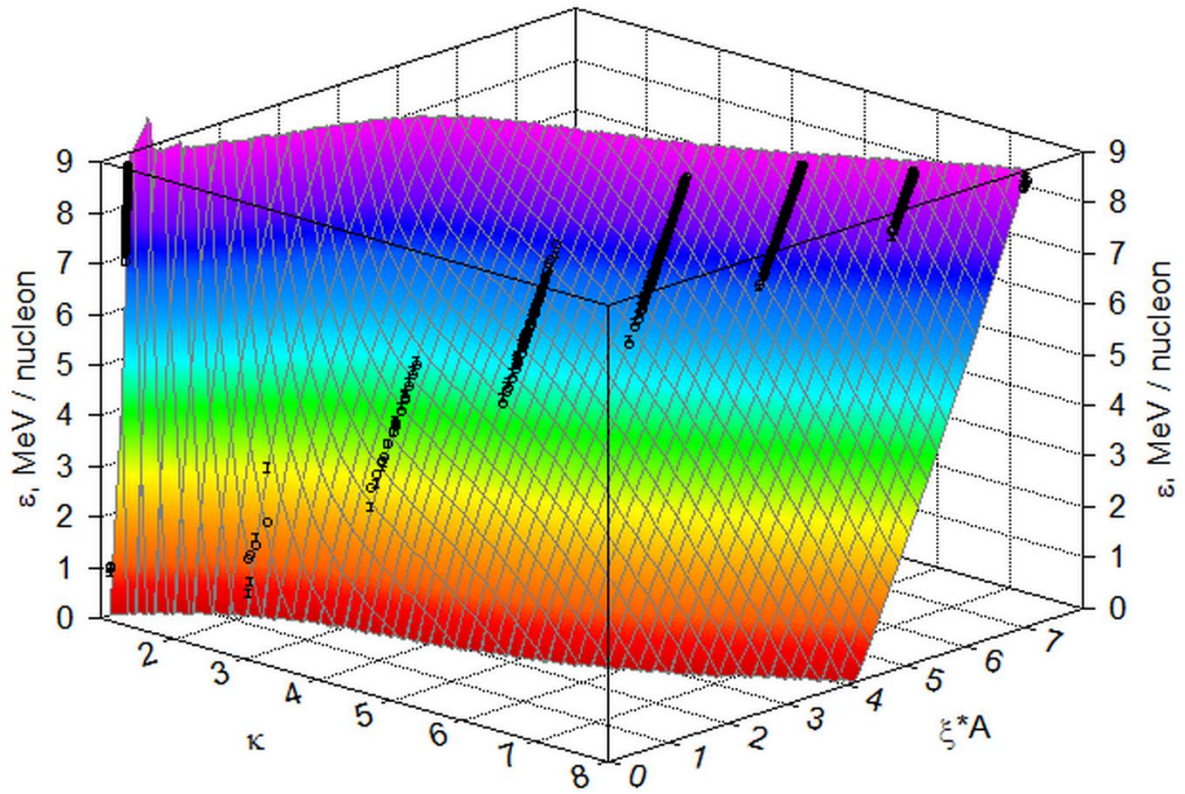


Рис. 6 Удельная энергия связи нуклидов из всех классов в зависимости от среднего числа эффективных нуклонов в их ядре

Уравнение состояния ядерной материи (рис. 8):

$$P(N, Z) = \varepsilon(N, Z) \cdot \rho = P_{\alpha} \left(\frac{\xi \cdot A}{\xi_{\alpha} \cdot A_{\alpha}} \left(\frac{\lambda_{\alpha}}{\lambda_{\text{eff}}} \right)^3 \right)^3 = \frac{P_{\alpha}}{\rho_{\alpha}^3} \rho^3, \quad (16)$$

где $\rho = \rho_{\alpha} \cdot \xi \cdot A \cdot (\lambda_{\alpha} / \lambda_{\text{eff}})^3 / (\xi_{\alpha} \cdot A_{\alpha})$;

$\rho_{\alpha} = 3 / (4\pi \cdot r_{0\alpha}^3) = 3 / (4\pi (1.1412138 \pm 0.0008687)^3) = 0.160624 \pm 0.000366$ —численная плотность конфигурационной упаковки α -частицы, фм^{-3} ;

$P_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha} \cdot \rho_{\alpha} = 7.073916 \cdot (0.160624 \pm 0.000366) = 1.136241 \pm 0.002589$ —давление компактизации α -частицы, $(\text{МэВ/нуклон})/\text{фм}^3$.

Уровень давления в бесконечной нуклонной материи создает условия стабильного присутствия в объеме этой материи α -частиц, т.к. уровень давления компактизации α -частицы значительно меньше уровня давления в объеме бесконечной нуклонной материи $P_{\alpha} < P_{\text{max}}$.

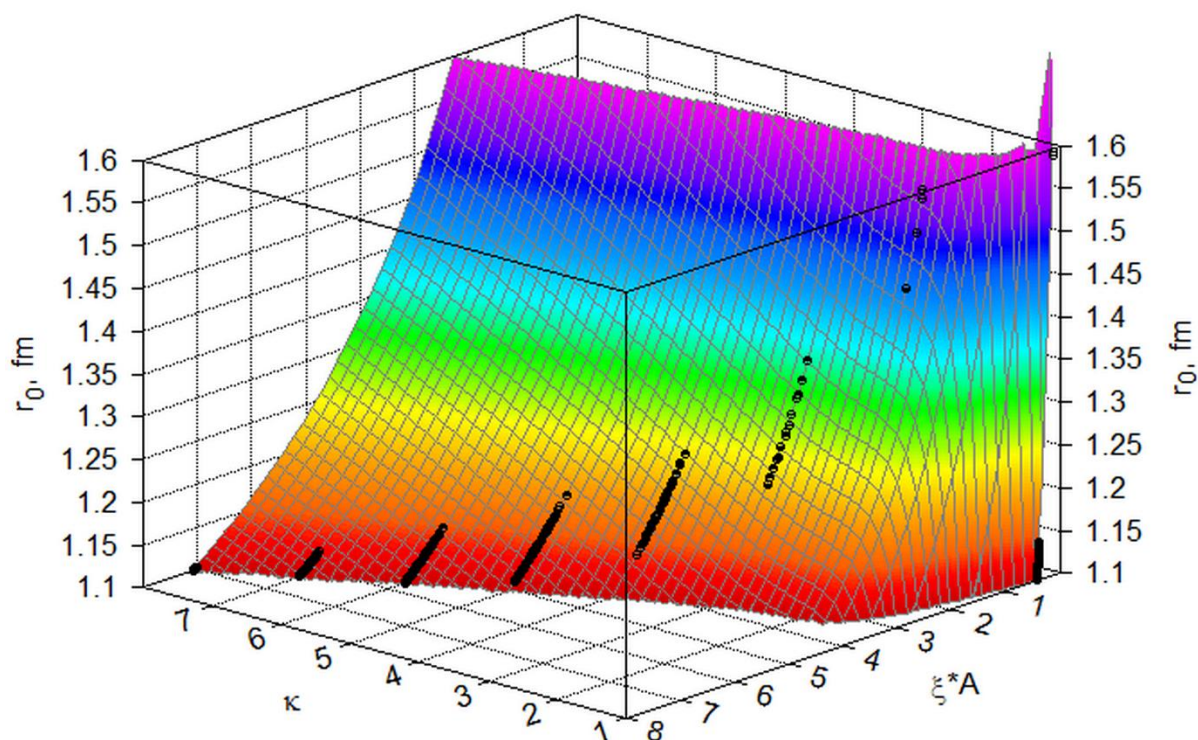


Рис. 7 Радиус ячейки Вигнера-Зейтца для нуклидов всех классов в зависимости от среднего числа эффективных нуклонов в их ядре

Рис. 8 свидетельствует о том, что результаты расчета состояния ядерной материи по соотношению (16) очень хорошо согласуются с результатами аналогичных расчетов, ранее проведенных другими авторами. Данный вывод подтверждает правильность выбора значения степени свободы нуклонов $\phi = 1$ как в ядрах нуклидов, так и в бесконечной нуклонной и кварк-глюонной материи.

Соотношения (13), ... (16) подчеркивают особенное положение α -частицы среди ядер всех нуклидов, т.к. значения характеристик α -частицы служат масштабными факторами при расчете значений аналогичных характеристик ядер других нуклидов.

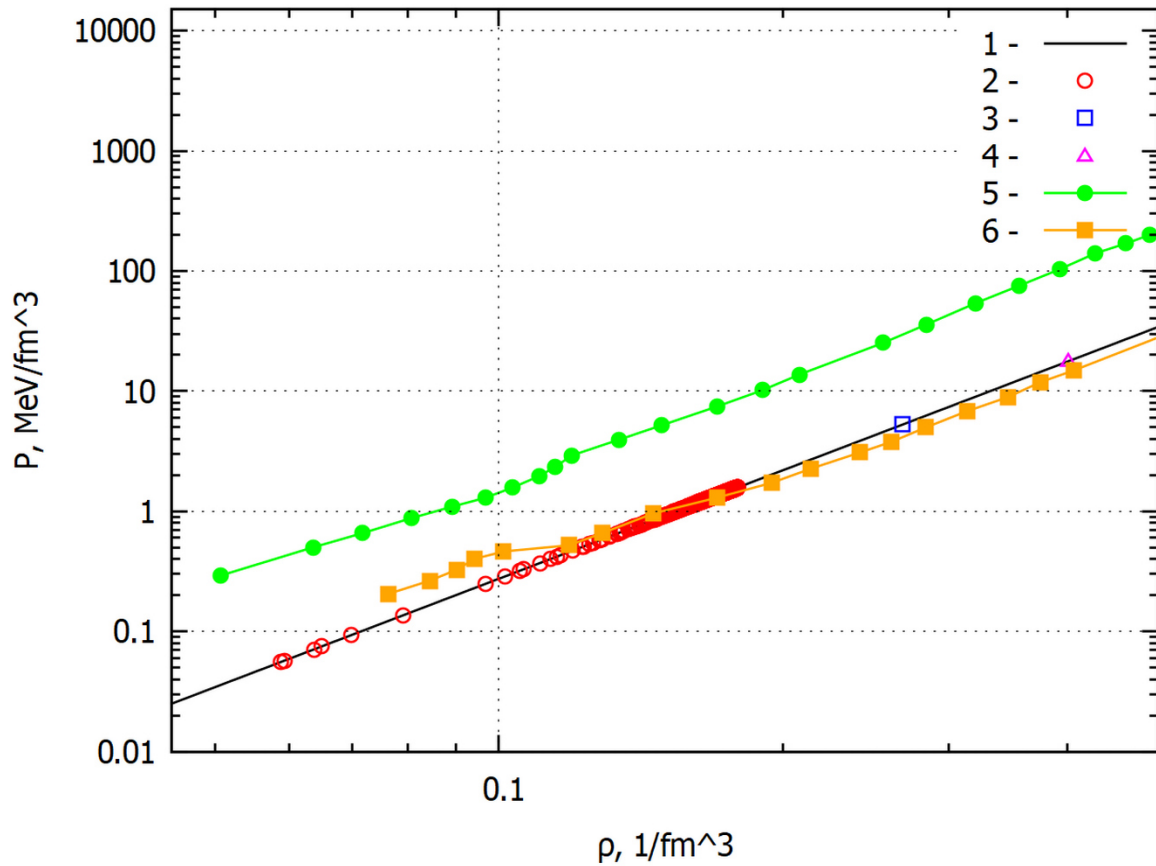


Рис. 8 Давление в ядерной материи в зависимости от ее численной плотности конфигурационной упаковки, когда степень свободы нуклонов $\phi = 1$ (1—уравнение состояния $P(N,Z) = P_\alpha \cdot \rho^3 / \rho_\alpha^3$; 2—расчетные значения давления компактизации по экспериментальным и расчетным данным 3149 нуклидов; 3—давление в бесконечной нуклонной материи; 4—давление в бесконечной кварк-глюонной материи; 5—верхняя граница давления согласно оцифрованным данным из [24, Fig. 7(a)]; 6—нижняя граница давления согласно оцифрованным данным из [24, Fig. 7(a)])

Подстановка (15) в эмпирическую корреляцию для расчета значения радиуса объема атомного ядра дает следующее соотношение, отображенное графически на рис. 9

$$R = r_0 \cdot A^{1/3} = \frac{r_p \cdot \lambda_{\text{eff}}}{\xi^{1/3}}. \quad (17)$$

На рис. 9 наглядно видно выделенное положение α -частицы—если число нуклонов в атомном ядре больше одного, то α -частица имеет наименьшее значение радиуса объема.

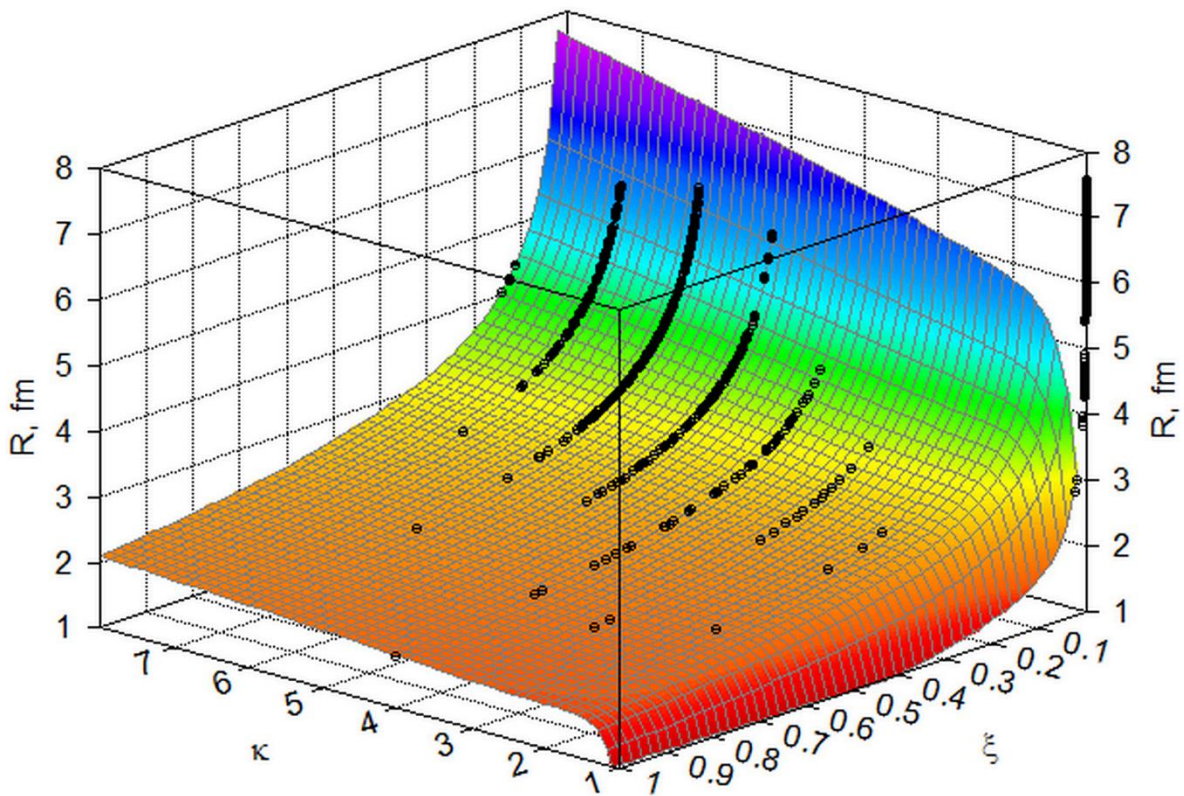


Рис. 9 Радиус объема ядер для нуклидов из всех классов в зависимости от показателя эффективности нуклонов в их объеме

В случае α -частицы из (17) получается следующее значение радиуса ее объема

$$R_{\alpha} = \frac{r_p \cdot \lambda_{\alpha}}{\xi_{\alpha}^{1/3}} = \frac{(0.84075 \pm 0.00064) \cdot 2.1547}{1^{1/3}} = 1.811564 \pm 0.001379 \text{ фм} .$$

Согласно [25] экспериментально измеренное значение зарядового радиуса α -частицы $R_{\alpha \text{exp}} = 1.67824$ фм получилось меньше расчетного значения R_{α} на $\sim 7.36\%$. Сравнение экспериментально измеренных значений зарядового радиуса объема ядер 909 изотопов 92 элементов [26] с результатами расчетов по (17) выявило, что при увеличении числа нуклонов в атомных ядрах с 4 до 250 превышение расчетных данных над экспериментально измеренными постепенно увеличивается с $\sim 5\%$ до $\sim 17\%$, рис. 10.

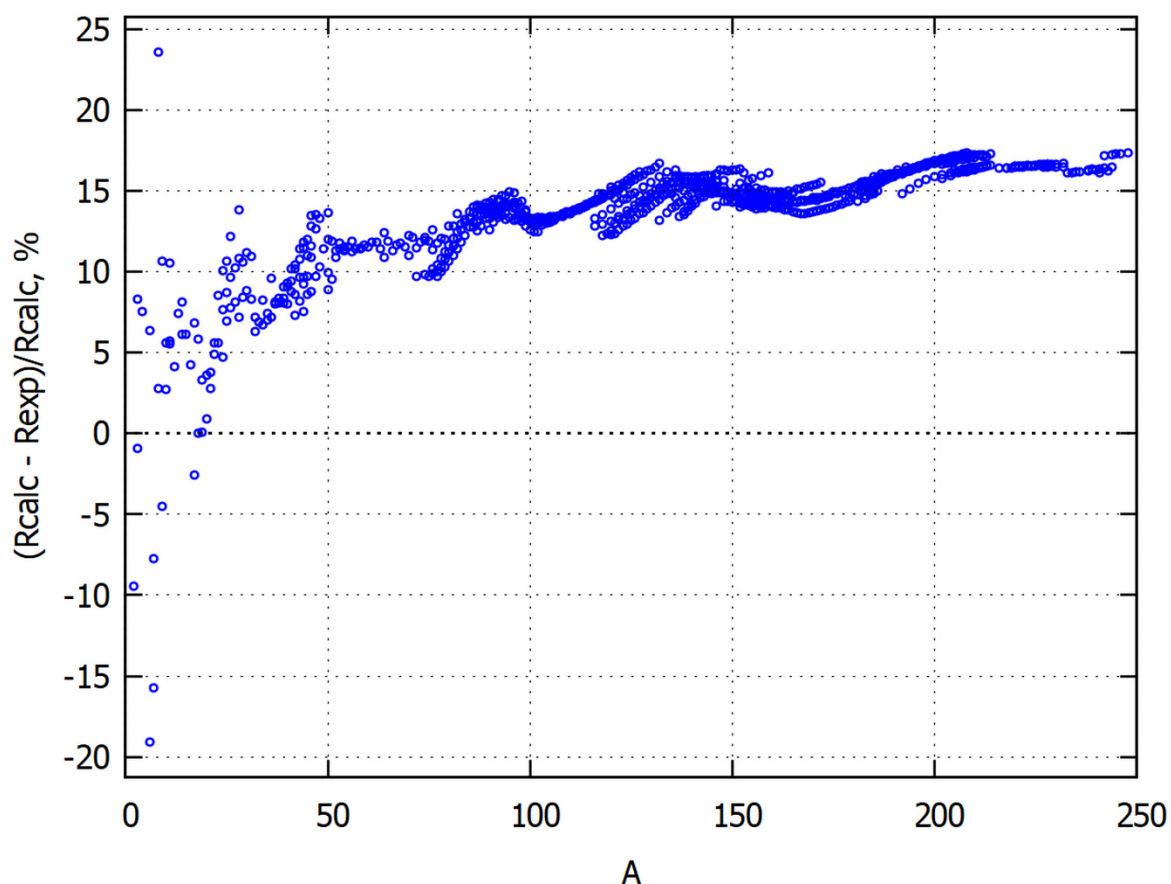


Рис. 10 Относительное отклонение результатов экспериментального измерения зарядового радиуса объема атомных ядер R_{exp} от аналогичных расчетных результатов R_{calc}

Значения характеристики g_0 , использованные в (17) для расчета значений радиуса объема атомных ядер, вычислены в (15) по экспериментально измеренным значениям удельной энергии связи ядер нуклидов. Поэтому относительная погрешность расчета по соотношению (17) значений радиуса объема атомных ядер определяется относительной погрешностью измерения удельной энергии связи, значения которой меньше одного процента и не увеличиваются с ростом числа нуклонов в атомных ядрах. Следовательно, наблюдаемое выше систематическое отличие результатов расчетов от результатов экспериментального измерения зарядового радиуса объема атомных ядер объясняется, по всей вероятности, систематической погрешностью методик измерения и последующих процедур обработки результатов измерений.

Вычисленные значения давления компактизации ядер α -подобных нуклидов свидетельствуют о возможной причине крайней нестабильности ядра атома ${}^8\text{Be}$. Оказалось,

что это единственный α -подобный нуклид, у которого значение давления компактизации меньше значения давления компактизации α -частицы, табл. 6. Крайняя нестабильность ядра атома ${}^4_8\text{Be}$ вызвана, по всей вероятности, тем, что низкий уровень давления компактизации ядра атома ${}^4_8\text{Be}$ не может создать условия для стабильного присутствия двух кластеров в виде α -частиц, обладающих более высоким уровнем давления компактизации.

Соотношения (13), ... (17), двумерная матрица классов атомных ядер $\mathcal{M} [N, Z]$ и эмпирическая корреляция показателя эффективности нуклонов от числа протонов и числа нейтронов в объеме атомных ядер позволяют провести достаточно точные расчеты характеристик атомных ядер—радиуса объема атомного ядра, объемной и численной плотности конфигурационной упаковки нуклонов, удельной энергии связи, радиуса ячейки Вигнера-Зейтца и давления компактизации атомных ядер.

В следующем сообщении будут приведены более точные эмпирические корреляции для вычисления значений показателя эффективности нуклонов в зависимости от числа протонов и числа нейтронов в атомных ядрах отдельно для каждого класса нуклидов. Найденные эмпирические корреляции позволили вычислить значения удельной энергии связи 3149 атомных ядер со следующими значениями их погрешности:

- средним значением абсолютной погрешности 19.6408 КэВ;
- средним значением относительной погрешности 0.2474%.

Таблица 6. Значения характеристик атомных ядер α -подобных нуклидов с массовым числом от $A=4$ до $A=40$

Число нуклонов		Класс нуклида, k	Показатель эффективности нуклона, ξ	$P(N,Z)/P_\alpha$	Период полураспада $T_{1/2}$, с	Радиус объема ядра R , фм	
N	Z					Статья [26]	Расчет (17)
2	2	4	1.0	1.0	∞	1.6755	1.81156
4	4	6	0.6412392770	0.997585	$82 \cdot 10^{-18}$	—	2.28304
6	6	6	0.4457971040	1.131293	∞	2.4702	2.57716

8	8	7	0.3802447045	1.197332	∞	2.6991	2.81870
10	10	6	0.2735406193	1.209971	∞	3.0055	3.03281
12	12	7	0.2579774270	1.261956	∞	3.057	3.20782
14	14	7	0.2236131638	1.305063	∞	3.1224	3.36438
16	16	7	0.1961861310	1.315589	∞	3.2611	3.51437
18	18	7	0.1746624023	1.321816	∞	3.3905	3.65318
20	20	7	0.1574856127	1.329131	∞	3.4776	3.78144

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлена математическая модель атомного ядра в виде сферического объекта, сжатого давлением компактизации и наполненного заряженной несжимаемой ядерной материей из взаимодействующих между собой нуклонов. Модель дополнена алгоритмом расчета объемной плотности конфигурационной упаковки сферических нуклонов в объеме сферического атомного ядра. Введено понятие эффективности нуклонов в объеме сферического ядра нуклидов, что позволило исключить влияние взаимодействия между нуклонами и получить аналитические выражения для расчета и прогноза значений характеристик атомных ядер с произвольным сочетанием числа протонов и числа нейтронов. Обнаружено, что наиболее хорошее соответствие расчетных и экспериментальных значений характеристик ядерной материи получается в том случае, когда значение степени свободы ее нуклонов равно единице. Найдено выражение для уравнения состояния ядерной материи справедливое как для атомных ядер, так и для бесконечной нуклонной и бесконечной кварк-глюонной материи. Найденное уравнение дает результаты расчета состояния ядерной материи, которые хорошо согласуются с результатами аналогичных расчетов, проведенных ранее другими авторами. Представленная в статье математическая модель сферических атомных ядер позволила провести расчеты значений характеристик ядер 3149 нуклидов с относительной погрешностью определяемой только относительной погрешностью измерения их удельной энергии связи. Предложено объяснение аномального поведения α -подобного ядра атома бериллия. Показано, что характеристики α -частицы служат масштабными факторами для расчета значений аналогичных характеристик ядер других нуклидов вплоть до бесконечной ядерной материи.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

У автора нет конфликтов интересов в отношении содержания этой статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю. М. Широков, Н. П. Юдин *Ядерная физика*. (Наука, Москва, 1972).
2. Hammer H.-W., König Sebastian, van Kolck U., Reviews of modern physics. **92**, April-June, 1-66 (2020). doi.org/10.1103/RevModPhys.92.025004
3. В. А. Даниленко, Спектральные функции для изучения равновесных и кинетических свойств ядерных систем. Дисс. на соискание ученой ст. к.ф.-м.н. (Санкт-Петербургский гос. Университет. С.-Пб, 2015).
4. Hergert Heiko A, Frontiers in Physics **8**, October, Article 379, 1-33 (2020). doi.org/10.3389/fphy.2020.00379
5. Cook Norman D., *Model of the Atomic Nucleus. Unification through a Lattice of Nucleons. Second Edition*. (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010).
6. Ghahramany N., Gharaat Sh., and Ghanaatian M., Physics of Particles and Nuclei Letters **8**, No2 (165), 169-181 (2011).
7. П. Б. Кац, С. М. Удовенко, Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4: Фізіка. Матэматыка, №2, 26-45 (2021) [Brest University Bulletin, Series 4: Physics and Mathematics, No2, 26-45 (2021)].
8. Р. В. Джолос, Е. А. Колганова, Физика элементарных частиц и атомного ядра **55**, вып.5, 1399-1424 (2024) [Physics of particles and nuclei **55**, No.5, 1399-1424 (2024)].
9. Mahboub K., Annals of Nuclear Energy **35**, 1381-1385 (2008). doi/org/ 10.1016/j.an-nucene.2008.01.005
10. Avelino P. P., Physics Letters, B **795**, 627-631 (2019). doi.org/10.1016/j.phys-letb.2019.05.056
11. Burkert V. D., Elouadrhiri L. & Girod X., Nature **557**, 396-399 (2018). doi.org/10.1038/s41586-018-0060-z
12. Р. Хофстадтер, УФН **LXIII**, Декабрь, вып.4, 693-759 (1957) [Phys. Rev. **28**, 214 (1956)].

13. Reinhard P.-G., Bender M., Nazarewicz W. and Vertse T. Physical Review **C73**, 014309, 1-11 (2006). doi.org/10.1103/physrevc.73.014309
14. Proton rms charge radius (The NIST Reference on Constants, Units, and Uncertainty. CODATA. Internationally recommended 2022 values of the Fundamental Physical Constants).
15. Anikeenko A. V., and Medvedev N. N., Aste T., Physical Review. **E77** (3), 031101(9) (2008). doi.org/10.1103/PhysRevE.77.031101
16. Параметры основных и изомерных состояний атомных ядер. База данных ЦДФЭ НИИЯФ МГУ. <http://www.cdfе.sinp.msu.ru/services/gsp.ru.html>. Дата обращения 05.10.2020.
17. Scott G. D., NATURE **188**, December 10, 908-909 (1960).
18. Scott G. D. and Kilgour D. M., Brit. J. Appl. Phys. (J. Phys. D). **2**, Ser.2, 863-866 (1969).
19. Epelbaum E., Hammer H.-W., Ulf-G. Meißner, arXiv: 0811.1338v1 [nucl-th] 9 Nov (2008).
20. Ю. А. Бережной, В. П. Михайлюк, Физика элементарных частиц и атомного ядра **39**, вып. 2, 437-500 (2008) [Physics of particles and nuclei **39**, No. 2, 437-500 (2008)].
21. Elhatisari Serdar, Li Ning, Rokash Alexander, Jose Manuel Alarcon, Dechuan Du, Nico Klein, Bing-nan Lu, Ulf-G. Meißner, Evgeny Epelbaum, Herman Krebs, Timo A. Lähde, Dean Lee, and Gautam Rupak, Physical Review Letters. **117**, 132501, 19 September (2016); arXiv:1602.04539v2 [nucl-th] 23 Jul (2016). doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.132501
22. Live Chart of Nuclides Nuclear Data Services International Atomic Energy. <http://www-nds.iaea.org/relnsd/vcharthtml/VChartHTML.html>. Accessed 11.11.2024.
23. Özel Feryal and Freire Paolo, Annu. Rev. Astron. Astrophys. **54**, 401-440 (2016). doi.org/10.1146/annurev-astro-081915-023322
24. Krauth Julian J., Schuhmann Karsten, Marwan Abdou Ahmed, Fernando D. Amaro, Pedro Amaro, François Biraben, Tzu-Ling Chen, Daniel S. Covita, Andreas J. Dax, Marc Diepold, Luis M. P. Fernandes, Beatrice Franke, Sandrine Galtier, Andrea L.

Gouvea, Johannes Götzfried, Thomas Graf Jan Vogelsang, et al., *Nature* **589**, 527-531 (2021). doi.org/10.1038/s41586-021-03183-1

25. Angeli I., Marinova K. P., *Atomic Data and Nuclear Data Tables* **99**, 69-95 (2013). doi.org/10.1016/j.adt.2011.12.006