

Теория связанных множеств

В. П. Воеводов

Аннотация

В работе описан метод динамических сит. С помощью данного метода и теории связанных множеств доказывается бесконечность множества простых близнецов.

Ключевые слова: простые близнецы, связанные множества, метод динамических сит.

Keywords: twin primes, connected sets, dynamic sieve method.

1 Концепция связанных множеств

Определение 1. *(Связанные множества). Два бесконечных подмножества натуральных чисел называются связанными, если их асимптотические плотности на любом инвариантном интервале числовой прямой соотносятся через постоянный конечный коэффициент $k > 0$:*

$$\mu(A_1) = k \cdot \mu(A_2), \quad \text{где } k \in \mathbb{R}^+, k \neq \infty. \quad (1)$$

Такие множества работают как шестерни единого механизма: они не могут существовать или исчезнуть поодиночке. Например, числа, делящиеся на 5, и числа, делящиеся на 101, связаны конечным коэффициентом $k = 101/5$. В рамках регулярных кортежей простых чисел:

- Пары близнецов с шагом две единицы $(a, a + 2)$ и пары с шагом восемь $(a, a + 8)$ имеют одинаковую структуру запретов по малым модулям, обладают равной мощностью ($k = 1$) и являются связанными.
- Пары с шагом два $(a, a + 2)$ и пары с шагом шесть $(a, a + 6)$ имеют разную плотность. Модуль 3 блокирует одну фазу для шага 2: доля выживания $(3 - 2)/3 = 1/3$, но для шага 6 элементы одновременно делятся на 3, оставляя свободными $(3 - 1)/3 = 2/3$ вариантов.

2 Метод динамических сит

Рассмотрим регулярное множество пар $A_k = \{k, k + 2\}$. Представим две числовые прямые, расположенные вертикально и со смещением по вертикали на две единицы

друг относительно друга. При этом каждая пара из множества A_k примет строго горизонтальное положение. Представим, что эти прямые жестко связаны в единый блок и синхронно движутся вниз мимо горизонтального и неподвижного луча-детектора(рис.1). Луч мгновенно проверяет пробегающие кортежи чисел на делимость по последовательному базису простых чисел $2, 3, 5, 7, \dots$

При делении на число 7: левое число из 7 случаев делится только в одном, в 6 других — не делится. Правое число также в 6 случаях из 7 не делится. Но так как из-за взаимно простого сдвига они не могут делиться на 7 одновременно, запрет правого числа попадает на один из благоприятных случаев левого. Из 6 вариантов правое число не делится в 5 случаях. То есть в 5 случаях из 7 оба числа одновременно не делятся на 7.

Для пары доля «выживания» сквозь фильтры луча составляет:

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{9}{11} \cdots = \frac{1}{6} \prod_{i=3}^{\infty} \frac{p_i - 2}{p_i} \quad (2)$$

Нас не интересуют сложные вычисления для пар простых чисел с различными интервалами. Нас интересует коэффициент перед знаком произведения. Он будет отличаться для разных интервалов. Для всех различных интервалов найдётся такой общий нижний предел $i = k$, что бесконечный «хвост» произведений для различных интервалов будет равный. Это как шестерни в редукторе: нам не надо считать количество зубьев в шестернях—достаточно знать отношения их диаметров.

7		9
6		8
5		7
4		6
3		5

Рис.1

Демонстрация метода динамических сит

3 Теорема о простых близнецах

Теорема 1 (В. П. Воеводов). *Множество простых близнецов бесконечно.*

Доказательство. Допустим, что множество простых близнецов конечно:

1. Поскольку за любой наперед заданной границей множество простых чисел бесконечно, то в этом бесконечном множестве имеется бесконечное число пар, принадлежащих к связанным множествам по отношению к простым близнецам.
2. Так как мощности связанных множеств отличаются друг от друга в конечное количество раз, рождающиеся простые пары неизбежно будут заполнять свободные фазы связанных шаблонов, формируя точные геометрические копии исходной пары.

