

Лекции по дополнительным главам квантовой механики

И.М.Народецкий

НИЦ Курчатовский Институт, Москва

Аннотация

В основу книги положены лекции, которые в течение ряда лет читались студентам кафедры элементарных частиц Московского Физико-Технического Института. Эти лекции не являются введением в квантовую механику для начинающих. Они предназначены для студентов старших курсов, которые уже изучали квантовую механику на начальном и промежуточном уровнях. Мы не преследуем здесь математическую строгость и опускаем большинство (если не все) доказательства, которые могут быть найдены в стандартных курсах квантовой механики. Однако, наряду с фундаментальными вопросами теории квантовомеханического рассеяния книга содержит изложение некоторых тем, которые в этих курсах не рассматриваются или обсуждаются очень кратко. К ним относятся прежде всего те подходы к описанию свойств легких и тяжелых барионов, которые лежат на стыке квантовой механики и современной теории элементарных частиц. В разработке этих результатов важный вклад внесла группа теоретиков ИТЭФ/НИЦ Курчатовский Институт. Из математических вопросов теории рассеяния рассматривается разложение Гильберта – Шмидта для Т-матрицы 2-частичного потенциального рассеяния, тождество Гильберта для 2-частичной функции Грина и его использование для доказательства оптической теоремы, теория представлений группы перестановок S_3 и ее применение для классификации спиновых функций 3-фермионных систем, вычисление магнитных моментов основных и возбужденных состояний барионов в аддитивной кварковой модели. Рассмотрены уравнения Фаддеева для 3-х частиц. Как иллюстрация общих квантово-механических принципов рассеяния обсуждается теневое рассеяние на жесткой сфере. Рассмотрено применение метода полевых корреляторов для описания спектроскопии легких и тяжелых барионов. Обсуждается метод гиперсферических функций, который ранее был предложен для рассмотрения многочастичных гамильтонианов в квантовой механике, и оказался очень плодотворным для исследования многокварковых систем с конфайнментом.

Кроме студентов, специализирующихся в области феноменологии легких и тяжелых барионов лекции может быть также полезны студентам МГУ, Физико-Технического университета, Санкт-Петербургского Университета и других высших учебных заведений, специализирующихся по теоретической физике, которым она позволит взглянуть на квантовую механику с новой для них точки зрения.

Содержание

1	Уравнение Липпмана-Швингера.	3
1.1	Фредгольмовы интегральные уравнения	3
1.2	Разложение Гильберта—Шмидта	4
1.2.1	Полярные ядра	6
1.3	Операторная формулировка уравнения Липпмана-Швингера.	7
1.4	T-матрица	9
1.5	Уравнение Липпмана-Швингера в импульсном пространстве	9
1.6	Частица в потенциальном поле	13
1.7	Уравнение Липпмана-Швингера в координатном пространстве	14
1.8	Рассеяние центральным потенциалом: метод парциальных волн	15
1.9	Спектральное представление T - матрицы	17
1.10	Тождество Гильберта. Соотношение унитарности	18
1.11	Необходимое условие существования связанного уровня. Условие Баргмана	20
1.12	Функции Иоста	21
1.13	Теорема Левинсона	23
1.14	Потенциал Юкавы	24
1.15	Сепарабельный потенциал	26
1.16	Потенциал Хюльтена	27
1.17	Разложение Гильберта-Шмидта для уравнения Липпмана-Швингера	28
1.18	Аналитические решения в методе Гильберта-Шмидта.	33
1.19	Рассеяние на жесткой сфере	36
1.20	Уравнения Фаддеева	38
2	Волновая функция дейтрона	42
2.1	Введение	42
2.2	Центральный потенциал	43
2.3	Необходимое условие существования связанного уровня. Условие Баргмана	44
2.4	Волновые функции в приближении нулевого радиуса	45
2.5	Тензорные силы	47
2.6	Спин-угловые функции	49
2.7	Уравнение Шредингера для тензорного потенциала	51
2.8	Представление Рариты-Швингера	52
2.9	Магнитный момент дейтрона	52
2.10	Квадрупольный момент дейтронов	54
3	Нуклон-нуклонный потенциал	57
4	Спиновые и изоспиновые функции в системе трех фермионов	60
4.1	Группа перестановок S_3	60
4.2	Спиновые функции	60
4.3	Изоспин. Изоспиновые функции	62
4.3.1	Сверхтонкое расщепление в КХД	64

5	Магнитные моменты барионов в аддитивной кварковой модели	65
6	Метод полевых корреляторов и свойства барионов.	69
6.1	Эффективный кварковый гамильтониан	69
6.2	Вспомогательные поля и конститюэнтные массы кварков	71
6.3	Кулоноподобное взаимодействие и фоновая теория возмущений	73
6.4	Струнная поправка	74
7	Численные примеры	75
7.1	Гиперсферический формализм для трех-кварковых систем.	75
8	Численные примеры	78
9	Приложение. Сферические функции Бесселя	82

1 Уравнение Липпмана-Швингера.

1.1 Фредгольмовы интегральные уравнения

Уравнение Липпмана-Швингера (ЛШ) представляет частный случай интегрального

уравнения Фредгольма¹. Кратко напомним основные факты, относящиеся к фредгольмовой теории. Неоднородное уравнение Фредгольма второго рода имеет вид

$$\varphi(x, z) = f(x, z) + \int_0^{\infty} K(x, s, z)\varphi(s, z)ds, \quad (1.1)$$

где параметр z является произвольным комплексным числом. Мы предположим, что ядро $K(z)$ является симметричным оператором

$$K(x, s; z) = K(s, x; z), \quad (1.2)$$

и удовлетворяет принципу симметрии Шварца

$$K(x, s; z^*) = K^*(x, s; z) \quad (1.3)$$

в комплексной z плоскости с разрезом вдоль вещественной положительной полуоси. Предположим также, что для всех z , не лежащих на разрезе

$$\tau(z) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} |K(x, s; z)|^2 dx ds < \infty, \quad (1.4)$$

¹Теория интегральных уравнений Фредгольма была впервые применена в теории нерелятивистского рассеяния в квантовой механике Р. Иостом: [1]

Оператор, удовлетворяющий этому условию, называется L^2 оператором или оператором Гильберта-Шмидта. Таким образом, для любого комплексного или отрицательного параметра z оператор $K(z)$ в (1.1) есть оператор Гильберта-Шмидта. Заметим, что $K(z)$ эрмитов оператор для вещественных отрицательных z .

Перепишем уравнение (1.1) в виде

$$|\varphi(z)\rangle = |f(z)\rangle + K(z)|\varphi(z)\rangle. \quad (1.5)$$

Любое линейное интегральное уравнение типа (1.5) с ядром $K(z)$ удовлетворяющим условию (1.4) имеет немедленное решение в терминах резольвенты $\Gamma(z)$

$$|\varphi(z)\rangle = |f(z)\rangle + \Gamma(z)|f(z)\rangle, \quad (1.6)$$

где $\Gamma(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\Gamma(z) = K(z) + K(z)\Gamma(z). \quad (1.7)$$

Это уравнение может быть легко получено подстановкой (1.6) в (1.5). Уравнение (1.7) является прототипом многих интегральных уравнений в теории квантово-механического рассеяния и теории поля.

1.2 Разложение Гильберта—Шмидта

Рассмотрим теперь разложение интегральных операторов K и Γ в ряд по собственным функциям оператора K . Последние определяются из однородного уравнения, отвечающего уравнению (1.7):

$$|\varphi_m(z)\rangle = \frac{1}{\lambda_m(z)} K(z)|\varphi_m(z)\rangle \quad (1.8)$$

Решения этого уравнения существуют только для специальных значений $\lambda_m(z)$, называемых собственными значениями². Так как $K(z)$ является эрмитовым оператором для вещественных отрицательных значений z , собственные значения $\lambda_m(z)$ и собственные функции $|\varphi_m(z)\rangle$ вещественны при $z < 0$. В общем случае для произвольных значений z ядро $K(z)$ не эрмитово. Однако, для любых двух решений $\varphi_m(z)$ и $\varphi_n(z)$ выполняется соотношение

$$\langle \varphi_m(z^*) | K(z) | \varphi_n(z) \rangle = \langle \varphi_n(z^*) | K(z) | \varphi_m(z) \rangle. \quad (1.9)$$

Поэтому собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны

$$\langle \varphi_m(z^*) | \varphi_n(z) \rangle = 0, \quad m \neq n, \quad (1.10)$$

как и в случае собственных функций эрмитового оператора. Единственное отличие от эрмитового случая заключается в том, что комплексно-сопряжённая функция в (1.10)

²В математической литературе собственные значения часто называются характеристическими числами.

отвечает значению параметра z^* , а не z . Это является следствием условия (??). Отметим, что в силу (??) собственные функции удовлетворяют принципу симметрии Шварца:

$$\varphi_m(x, z^*) = \varphi_m^*(x, z). \quad (1.11)$$

Поэтому условие ортогональности может быть также записано в виде

$$\int_0^\infty \varphi_m(x, z) \varphi_{m'}(x, z) dx = 0, \quad m \neq m'. \quad (1.12)$$

Отметим, что в методе Гильберта-Шмидта полнота системы собственных функций не предполагается. Например, для вырожденного ядра эта система заведомо не полна. Поскольку в этом случае число собственных функций и собственных значений конечно. Поэтому произвольную функцию нельзя разложить в ряд Фурье по $\varphi_m(x; z)$. Однако, собственные функции образуют достаточно полный набор, по которому можно разложить ядро K и резольвенту G_0 .

Разложим $K(x, s; z)$ в ряд по $\varphi_m^*(s, z^*)$. Коэффициенты в этом разложении являются функциями x , обозначим их $a_m(x, z)$:

$$K(x, s; z) = \sum_m a_m(x; z) \varphi_m^*(s; z^*). \quad (1.13)$$

Чтобы вычислить $a_m(x; z)$ подставим (1.11) в (??) и интегрируем по x ; используя (1.10), получаем

$$a_m(x; z) = \lambda_m(z) \frac{\varphi_m(x; z)}{\|\varphi_m(z)\|^2} \quad (1.14)$$

и

$$K(z) = \sum_m \lambda_m(z) \frac{|\varphi_m(z) \rangle \langle \varphi_m(z^*)|}{\|\varphi_m(z)\|^2}, \quad (1.15)$$

где

$$\|\varphi_m(z)\|^2 = \langle \varphi_m(z^*) | \varphi_m(z) \rangle = \int_0^\infty \varphi_m^2(x; z) dx. \quad (1.16)$$

Аналогичным образом получаем разложение для резольвенты:

$$\Gamma(z) = \sum_m \frac{\lambda_m(z)}{1 - \lambda_m(z)} \frac{|\varphi_m(z) \rangle \langle \varphi_m(z^*)|}{\|\varphi_m(z)\|^2}, \quad (1.17)$$

Формула (1.17) называется *разложением Гильберта-Шмидта*. Ряды (1.13), (1.17) сходятся, если ядро $K(z)$ является полностью непрерывным. Напомним, что $K(z)$ является полностью непрерывным ядром, если (но не только) оно является L^2 оператором, т.е. если $\tau(z) < \infty$, где τ определяется формулой (1.4). Разложение (1.13) показывает, что резольвента симметричного L^2 ядра имеет лишь простые полюсы, отвечающие характеристическим числам этого ядра.

1.2.1 Полярные ядра

В квантомеханических приложениях ядро $K_p(x, s; z)$ имеет вид

$$K_p(x, s; z) = K(x, s) r(s; z), \quad (1.18)$$

где K симметрично при перестановке x и s , а функция $r(s; z)$ удовлетворяет соотношению $r(s; z^*) = r^*(s; z)$. Уравнение, содержащее $K_p(x, s; z)$ может быть сведено к симметричному ядру, если определить новую функцию

$$\psi(x, z) = \sqrt{r(x; z)} \varphi(x; z). \quad (1.19)$$

Если подставить эту функцию в (??), то получим

$$\psi(x; z) = f(x) \sqrt{r(x; z)} + \int_0^\infty \sqrt{r(x; z)} K(x, s) \sqrt{r(s; z)} \psi(s; z) ds. \quad (1.20)$$

Новое ядро

$$\tilde{K}(x, s; z) = \sqrt{r(x; z)} K(x, s) \sqrt{r(s; z)} \quad (1.21)$$

уже симметрично. Аналогично тому, как это было сделано выше, можно ввести новые собственные функции

$$|\psi_m(z)\rangle = \frac{1}{\lambda_m(z)} \tilde{K}(z) |\psi_m(z)\rangle, \quad (1.22)$$

причем теперь

$$\langle \psi_m(z^*) | \psi_n(z) \rangle = 0, \quad m \neq n, \quad (1.23)$$

Разложение, аналогичное (1.13) имеет вид

$$\tilde{K}(z) = \sum_m \lambda_m(z) \frac{|\psi(z)\rangle \langle \psi_m(z^*)|}{\|\psi_m(z)\|}. \quad (1.24)$$

Если определить новую резольвенту \tilde{G} соотношением, аналогичным (1.21),

$$\tilde{\Gamma}(x, s; z) = \sqrt{r(x; z)} \Gamma(x, s) \sqrt{r(s; z)}, \quad (1.25)$$

то получим

$$\tilde{\Gamma}(z) = \tilde{K}(z) + \tilde{K}(z) \tilde{\Gamma}(z) \quad (1.26)$$

и

$$\tilde{\Gamma}(z) = \sum_m \frac{\lambda_m(z)}{1 - \lambda_m(z)} \frac{|\psi(z)\rangle \langle \psi_m(z^*)|}{\|\psi_m(z)\|^2}, \quad (1.27)$$

Рассмотрим собственные функции $\tilde{\varphi}_m(z)$ полярного ядра $K_p(z)$ в уравнении (1.18)

$$|\tilde{\varphi}_m(z)\rangle = \frac{1}{\lambda_m(z)} K_p(z) |\tilde{\varphi}_m(z)\rangle. \quad (1.28)$$

Единственная разница между собственными функциями в уравнениях (1.28) и (1.9) заключается в том, что функции (1.28) ортогональны с весом $r(s; z)$, как это следует из уравнений (1.19) и (1.23):

$$\int_0^\infty \tilde{\varphi}_m^*(x; z^*) r(x; z) \tilde{\varphi}_n(x; z) dx = 0, \quad m \neq n, \quad (1.29)$$

Окончательно получаем

$$K_p(x, s; z) = \sum_n \frac{\tilde{\varphi}_m^*(x; z) \tilde{\varphi}_m^*(s; z^*)}{\|\tilde{\varphi}_m^*(x; z^*)\|^2}, \quad (1.30)$$

$$\Gamma(x, s; z) = \sum_n \frac{\lambda_n(z)}{1 - \lambda_n(z)} \frac{\tilde{\varphi}_m^*(x; z) \tilde{\varphi}_m^*(s; z^*)}{\|\tilde{\varphi}_m^*(x; z^*)\|^2}, \quad (1.31)$$

где

$$\|\tilde{\varphi}_m\|^2 = \int_0^\infty \tilde{\varphi}_m^2(x; z) r(x; z) dx. \quad (1.32)$$

1.3 Операторная формулировка уравнения Липпмана-Швингера.

В этом разделе мы проиллюстрируем применение уравнения (1.7) на примере нерелятивистского потенциального рассеяния³ с Гамильтонианом $H = H_0 + V$, где H_0 оператор кинетической энергии и V - потенциал взаимодействия. Процесс рассеяния может быть описан в терминах волновой функции Ψ^+ которая удовлетворяет уравнению Шредингера

$$H\Psi^+ = E\Psi^+ \quad (1.33)$$

(E - энергия системы) с некоторым асимптотическим граничным условием в конфигурационном пространстве. Это условие может быть схематически сформулировано как

$$\Psi^+ = \Phi + , \quad (1.34)$$

где Φ представляет налетающую плоскую волну. Точное значение термина “расходящаяся волна” наиболее просто формулируется в импульсном пространстве, в котором дается точная инструкция, как обходить полюса в энергетических знаменателях (правило $+i0$). В частности, для данного асимптотического состояния Φ волновая функция рассеяния определяется как

$$\Psi^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} i\varepsilon G(E + i\varepsilon)\Phi. \quad (1.35)$$

В дальнейшем мы используем символические обозначения $G(E + i\varepsilon)$ и $G(E - i\varepsilon)$, имея в виду что ε есть бесконечно малая положительная величина. Функция Грина или резольвента $G(z)$ оператора H определяется следующим образом

$$G(z) = (z - H)^{-1}, \quad (1.36)$$

где z - произвольное комплексное число. Функция Грина для вещественных значений энергии определяется как

$$G(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} G(E + i\varepsilon).$$

³ В. А. Lippmann and J. Schwinger, Phys. Rev. **79** (1950) 469

Для вывода *операторного* уравнения для функции Грина мы сначала запишем $G(z)$ in Eq. (1.36) как

$$G(z) = (z - H_0 - V)^{-1} = ((z - H_0)(1 - G_0(z)V))^{-1}, \quad (1.37)$$

где мы определили свободную функцию Грина

$$G_0(z) = (z - H_0)^{-1}. \quad (1.38)$$

Используя операторное тождество

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (1.39)$$

получаем

$$G(z) = (1 - G_0(z)V)^{-1}G_0(z). \quad (1.40)$$

Предположим, что потенциал в каком-то смысле мал и разложим оператор $(1 - G_0(z)V)^{-1}$ по степеням G_0V

$$(1 - G_0(z)V)^{-1} = 1 + G_0(z)V + G_0(z)V G_0(z)V + \dots \quad (1.41)$$

Тогда для $G(z)$ получаем формальный ряд итераций

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z)V G_0(z) + G_0(z)V G_0(z)V G_0(z) + \dots \quad (1.42)$$

Уравнение (1.42) может быть переписано как

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z)V [G_0(z) + G_0(z)V G_0(z) + G_0(z)V G_0(z)V G_0(z) + \dots] \quad (1.43)$$

Выражение в квадратных скобках совпадает (1.42), поэтому

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z)V G(z). \quad (1.44)$$

Легко видеть, что уравнение (1.44) может быть эквивалентно зависано в виде

$$G(z) = G_0(z) + G(z)V G_0(z). \quad (1.45)$$

Уравнения (1.44), (1.45) представляют (операторные) уравнения Липпмана-Швингера для функции Грина. Подчеркнем, что эти уравнения справедливы даже в том случае, когда ряд итераций (1.42) расходится.

Используя (1.35), получим уравнение Липпмана-Швингера для волновой функции

$$\Psi^+ = \Phi + G_0V\Psi^+. \quad (1.46)$$

graphics[width=170mm,keepaspectratio=true]fig01.png

Рис. 1: Графическое представление отдельных членов в уравнении (1.49)

1.4 Т-матрица

Уравнение (1.44) может быть также записано в терминах Т-матрицы, которая определена следующим образом

$$T(z) = V + VG(z)V, \quad (1.47)$$

или эквивалентно

$$G(z) = G_0(z) + G_0(z)T(z)G_0(z). \quad (1.48)$$

Ряд итераций для $T(z)$ имеет вид

$$T(z) = V + VG_0(z)V + VG_0(z)VG_0(z)V + \dots \quad (1.49)$$

Последовательные члены в (1.49) могут быть графически изображены так, как показано на Рис. 2.

Применяя тот же трюк, который был уже использован при выводе уравнения (1.44), получим we

$$T(z) = V + VG_0(z) \times \\ \times [V + VG_0(z)V + VG_0(z)VG_0(z)V + \dots] = V + VG_0(z)T(z). \quad (1.50)$$

Уравнение (1.50) представляет операторное уравнение для оператора $T(z)$. Это уравнение графически показано на Рис. 2.

Сравнивая ряды итераций уравнений Eqs. (1.42) и (1.50,) легко проверить что

$$VG = TG_0, \quad GV = G_0T. \quad (1.51)$$

1.5 Уравнение Липпмана-Швингера в импульсном пространстве

Выведем теперь интегральное уравнение для матричных элементов оператора $T(z)$. Рассмотрим функции

$$V(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \langle \mathbf{p}' | V | \mathbf{p} \rangle, \quad t(\mathbf{p}', \mathbf{p}; z) = \langle \mathbf{p}' | T(z) | \mathbf{p} \rangle,$$

и

$$G_0(\mathbf{p}', \mathbf{p}; z) = \langle \mathbf{p}' | G_0 | \mathbf{p} \rangle = \frac{\delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p})}{z - \frac{p^2}{2\mu}}. \quad (1.52)$$

Чтобы пояснить последнюю формулу заметим, что в импульсном пространстве оператор $z - H_0$ является оператором умножения

$$(z - H_0) | \mathbf{p} \rangle = (z - \frac{p^2}{2\mu}) | \mathbf{p} \rangle, \quad (1.53)$$

поэтому

$$\frac{1}{z - H_0} |\mathbf{p}\rangle = \frac{1}{z - \frac{p^2}{2\mu}} |\mathbf{p}\rangle \quad (1.54)$$

Имеется несколько способов придать смысл этому выражению для вещественных положительных энергий. Один из способов заключается в том, чтобы добавить к энергии бесконечно малую положительную добавку

$$G_0(\mathbf{p}', \mathbf{p}; E + i\varepsilon) = \langle \mathbf{p}' | G_0 | \mathbf{p} \rangle = \frac{\delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p})}{E + i\varepsilon - \frac{p^2}{2\mu}}. \quad (1.55)$$

Тогда получим

$$t(\mathbf{p}', \mathbf{p}; z) = V(\mathbf{p}', \mathbf{p}) + \int \frac{V(\mathbf{p}', \mathbf{p}'') t(\mathbf{p}'', \mathbf{p}; z) d\mathbf{p}''}{z - p''^2/2\mu} \frac{d\mathbf{p}''}{(2\pi)^3}, \quad (1.56)$$

где $V(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ Фурье преобразование потенциала $V(r)$ в координатном пространстве.

Для локального потенциала

$$V(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = V(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) = \int V(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (1.57)$$

Уравнение (1.56) представляет интегральное уравнение Липпмана-Швингера для матричных элементов T -матрицы. В этом уравнении \mathbf{p}' и \mathbf{p} начальные и конечные импульсы в системе центра масс, которые лежат вообще говоря вне энергетической поверхности, а энергетический параметр z принимает любые значения в комплексной z -плоскости.

Поскольку Фурье-преобразование потенциала является симметричной функцией, ядро уравнения Липпмана-Швингера $K(z) = VG_0(z)$ в области энергии ниже порога может быть приведено к вещественному симметричному виду. Далее, для значений z , не лежащих на вещественной положительной полуоси, но на физическом листе, $K(z)$ является L^2 оператором при очень слабых ограничениях на потенциал V . В самом деле, для шпура $\tau(z)$ в уравнении (1.56) получаем

$$\tau(z) = \frac{m^{\frac{3}{2}}}{2\pi\sqrt{2Imz}} \int |V(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} < \infty. \quad (1.58)$$

Если мы ограничимся одной парциальной волной, шпур конечен, если и только если,

$$\int_0^\infty |V(r)|^2 r^2 dr < \infty, \quad \int_0^\infty |V(r)|^2 dr < \infty. \quad (1.59)$$

Это уравнение ограничивает поведение потенциала в начале координат и на бесконечности и, в действительности, является очень слабым. В частности, оно применимо для потенциалов, обычно используемых в ядерной физике. Однако, когда параметр z принимает положительное значение, в теории возникает формальная трудность, поскольку независимо от того, как хорошо определен потенциал, $\tau(E + i\varepsilon)$, определенный уравнением (1.4), никогда не существует для $E > 0$. Эта трудность, однако, только кажущаяся, но не реальная. Здесь мы только предположим, что можно выполнить аналитическое продолжение по параметру z в область $\text{Im} \sqrt{z} \neq 0$, где фредгольмовы свойства

Рис. 2: The graphical representation of the successive terms in Eq. (1.56)

уравнения Липпмана-Швингера гарантированы. Установив фредгольмовы свойства в этой области, мы можем аналитически продолжить уравнение Липпмана-Швингера обратно в физическую область; можно показать, что фредгольмовость уравнения при таком обратном продолжении сохраняется. Таким образом, мы можем получить решение с помощью подходящего предельного перехода из комплексной плоскости на вещественную ось в ядре резольвенты оператора энергии. Этот рецепт тесно связан с нестационарной постановкой задачи рассеяния. Строгое доказательство этого утверждения [3] выходит за рамки настоящих лекций

Для локальных потенциалов уравнение ЛШ не может быть решено аналитически. Это уравнение, однако, может использоваться для вычисления T -матрицы в теории возмущений в виде разложения по степеням потенциала, который предполагается достаточно малым ⁴. Это может быть выполнено с использованием стандартной итеративной процедуры, уже использованной в (1.42) для определения формальных рядов теории возмущений.

Последовательные члены в Eq. (1.56) могут быть представлены графически, см. Рис.1. Каждая волнистая линия представляет взаимодействие между частицами, обусловленное потенциалом V . Между взаимодействиями частица движется свободно (отсюда свободный пропагатор G_0). Эти диаграммы описывают или относительное движение двух частиц или рассеяние одной частицы на фиксированном центре. Отметим, что в разложении (1.56) появляются только лестничные диаграммы, что отвечает тому факту, что в нерелятивистской квантово-механической задаче не возникает рождения или уничтожения частиц.

⁴Заметим, что пертурбативное разложение уравнения ЛШ для амплитуды нуклон-нуклонного рассеяния с использованием стандартных нуклон-нуклонных потенциалов при малых энергиях и для малых парциальных волн расходится по нескольким причинам. Во первых, присутствие мелкого связанного уровня (дейтрон) или виртуального 3S_0 состояния означает присутствие полюсов T -матрицы, близких к физической области, которые в свою очередь приводят к расходимости ряда теории возмущений. Вторая причина, заключается в существовании тензорных сил, возникающих *например* из обмена π мезоном, которые сингулярны на малых расстояниях и требуют итераций в триплетных каналах. Наконец, все современные потенциальные модели содержат сильное отталкивание на малых расстояниях, которое приводит к существованию высоко-энергичной импульсной компоненты в промежуточных состояниях и требует пертурбативного рассмотрения.

Рис.1 Графическое представление последовательных членов в ряду итераций (1.49).

Графическая запись уравнения ЛШ показана на Рис. 2.

Рис.2. Графическая запись уравнения Липпмана-Швингера (1.50).

T-матрица с точностью до известного множителя совпадает с амплитудой рассеяния $f(E, \vartheta)$, нормированной так, что дифференциальное сечение рассеяния равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(E, \vartheta)|^2. \quad (1.60)$$

Чтобы найти этот множитель, сравним первый член в (1.56)

$$t_B(\mathbf{k}', \mathbf{k}; E + i\varepsilon) = V(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) = \int V(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{r}} d\mathbf{r}, \quad (1.61)$$

где \mathbf{k} и \mathbf{k}' начальный и конечный импульсы и $E = k^2/2\mu = k'^2/2\mu$, с известным выражением для борновского приближения к амплитуде рассеяния (мы выведем его позднее):

$$f_B(E, \cos \theta) = -\frac{\mu}{2\pi} V(\mathbf{q}), \quad (1.62)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ - переданный импульс, $q = 2k \sin(\theta/2)$ ⁵. Тогда получаем

$$f(E, \cos \theta) = -\frac{\mu}{2\pi} t(\mathbf{k}', \mathbf{k}; E + i\varepsilon). \quad (1.63)$$

1.6 Частица в потенциальном поле

Оператор Шредингера для частицы в потенциальном поле в координатном представлении имеет вид

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\mathbf{r}} + V(\mathbf{r}), \quad (1.64)$$

где $\Delta_{\mathbf{r}} = \nabla_{\mathbf{r}}^2$ оператор Лапласа. Важность задачи о движении частицы в потенциальном поле объясняется тем, что к ней сводится (как и в классической механике) задача о движении двух тел. Покажем, как это делается в квантовой механике.

Рассмотрим систему двух частиц с массами m_1 и m_2 , взаимодействие между которыми описывается потенциалом $V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$. В координатном представлении оператор Шредингера этой системы имеет вид

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_1} \Delta_1 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \Delta_2 + V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad (1.65)$$

где Δ_1 и Δ_2 - операторы Лапласа по координатам первой и второй частиц, соответственно.

Введем новые переменные

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad (1.66)$$

\mathbf{X} - координата центра инерции системы, \mathbf{r} - относительная координата. Выражение для H в новых переменных имеет вид

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_{\mathbf{R}} - \frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_{\mathbf{r}} + V(\mathbf{r}) \quad (1.67)$$

Здесь $M = m_1 + m_2$ - полная масса системы, а

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (1.68)$$

⁵Уравнение (1.62) показывает, что Борновская амплитуда пропорциональна Фурье-компоненте потенциала, записанной в терминах переменной \mathbf{q} . Чем круче меняется потенциал, тем быстрее убывает f_B как функция \mathbf{q}^2 . Это привело Резерфорда к постулату (основанному на экспериментах по рассеянию электронов на атомах) существования атомных ядер. Позднее, когда подобные эксперименты были выполнены на протонах, а не на атомах, аналогичное рассмотрение указало сложную структуру протона (существование кварков).

так называемая приведенная масса. Первое слагаемое в H является оператором кинетической энергии центра масс системы, а второе слагаемое

$$H_2 = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_{\mathbf{r}} + V(\mathbf{r}) \quad (1.69)$$

является оператором Шредингера для относительного движения. В уравнении

$$H\Psi = E\Psi \quad (1.70)$$

переменные разделяются, и решения такого уравнения можно искать в виде

$$\Psi(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \psi(\mathbf{R})\psi_1(\mathbf{r}) \quad (1.71)$$

Функции $\psi(\mathbf{R})$ и $\psi_1(\mathbf{r})$ (и ϵ). удовлетворяют уравнениям ($\hbar = 1$)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2M}\Delta_{\mathbf{R}}\psi(\mathbf{R}) &= \epsilon\psi(\mathbf{R}), \\ -\frac{1}{\mu}\Delta_{\mathbf{r}}\psi_1(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\psi_1(\mathbf{r}) &= \epsilon_1\psi_1(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

причем $E = \epsilon + \epsilon_1$. Первое из этих уравнений имеет решения

$$\psi_{\mathbf{K}}(\mathbf{R}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{i\mathbf{K}\mathbf{R}}, \quad \frac{K^2}{2M} = \epsilon;$$

таким образом, задача сводится к решению второго уравнения, которое по форме совпадает с уравнением Шредингера для частицы с массой μ в потенциальном поле $V(\mathbf{r})$. Отметим, что спектр оператора H является непрерывным, так как непрерывным является спектр оператора $-\frac{1}{2M}\Delta_{\mathbf{R}}$.

1.7 Уравнение Липпмана-Швингера в координатном пространстве .

Функция Грина $G_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}; z)$ в координатном пространстве определяется в терминах Фурье-преобразования функции $G_0(\mathbf{p}', \mathbf{p}; z)$ в уравнении (1.55) Действительно,

$$\langle \mathbf{r}' | G_0\left(\frac{k^2}{2\mu} + i\epsilon\right) | \mathbf{r} \rangle = G_0^{(+)}(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) = 2\mu \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\exp i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{k^2 - p^2 + i\epsilon} \quad (1.72)$$

где мы для простоты записи опустили аргумент энергии $z = k^2/2\mu$.

Выполним сначала в уравнении интегрирование по углам, тогда получим

$$G_0^{(+)}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = -\frac{2\mu}{4\pi} \cdot \frac{1}{2i\pi} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \int_0^\infty \left(e^{ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - e^{-ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \left(\frac{1}{p-k-i\epsilon} + \frac{1}{p+k+i\epsilon} \right) dp, \quad (1.73)$$

Сделав в той части подынтегрального выражения в (1.73), которая содержит $-e^{-ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$, замену переменной интегрирования $p \rightarrow -p$, перепишем (1.73) в виде

$$G_0^{(+)}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = -\frac{2\mu}{4\pi} \cdot \frac{1}{2i\pi} \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left(\frac{1}{p-k-i\varepsilon} + \frac{1}{p+k+i\varepsilon} \right) dp \quad (1.74)$$

Интеграл (1.74) может быть теперь вычислен с использованием стандартной техники контурного интегрирования. Результат есть

$$G_0^{(+)}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = -\frac{2\mu}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|} \quad (1.75)$$

Используя аналогичное упражнение, мы заключаем, что (1.46) приводит к уравнению Липпмана-Швингера для волновой функции $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - \frac{2\mu}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \frac{e^{k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}') \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}'). \quad (1.76)$$

Любое решение уравнения (1.76) удовлетворяет граничному условию, которое следует из соответствующего асимптотического условия. Это можно увидеть, используя тот факт, что для $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$ мы получаем $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = r - \hat{\mathbf{r}}\mathbf{r}' + \mathcal{O}(1/r)$, где $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$. Тогда уравнение (1.76) для больших r приобретает вид

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - \frac{2\mu}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d\mathbf{r}' e^{-ik\hat{\mathbf{r}}\mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}'). \quad (1.77)$$

Правило $+i\varepsilon$, используемое в (1.72) при обходе полюса выбрано в точности так, чтобы гарантировать существование уходящей расходящейся волны.

Для потенциалов конечного радиуса действия область, которая приводит к ненулевому вкладу в уравнении (1.77) ограничена в пространстве. Эксперименты обычно ставятся так, что детектор размещается очень далеко от рассеивателя, при r много больших радиуса потенциала. Другими словами, в уравнении (1.77) мы можем спокойно положить $r \gg r'$. Обозначив $\mathbf{k}' = k\mathbf{r}'$, уравнение (1.77) может быть записано в знакомой форме

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\mathbf{k}', \mathbf{k}), \quad (1.78)$$

где

$$f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{\mu}{2\pi} \int d\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}'). \quad (1.79)$$

Первая итерация уравнения (1.79) дает в точности борновскую амплитуду в уравнении (1.62).

1.8 Рассеяние центральным потенциалом: метод парциальных волн

Наиболее важным случаем задачи о движении частицы в потенциальном поле является задача о движении в центральном поле силового центра. В этом случае потенциал

$V(\mathbf{r})$ является сферически симметричным и зависит только от модуля r вектора \mathbf{r} . К задаче о центральном поле сводится задача 2-х частиц, если потенциал взаимодействия зависит только от расстояния между частицами. Мы не будем здесь рассматривать свойства оператора момента импульса \mathbf{L} и вопросы теории представлений группы вращений, которая позволяет явно учесть сферическую симметрию задачи. Это обсуждение можно найти в любом стандартном учебнике квантовой механики. Вместо этого мы сразу перейдем к рассмотрению полезного разложения для амплитуды рассеяния, которое называется *разложением по парциальным волнам*.

Рассмотрим плоскую волну с импульсом \mathbf{p} в системе координат, в которой ось z выбрана в направлении \mathbf{p}

$$e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} = e^{ipr \cos \vartheta}. \quad (1.80)$$

Мы можем разложить (1.80) в ряд по парциальным волнам, которые являются собственными функциями операторов \mathbf{L}^2 и $L_z = 0$

$$e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} = e^{ipr \cos \vartheta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(pr) P_l(\cos \vartheta), \quad (1.81)$$

где

$$P_l(\cos \vartheta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{l0}(\vartheta, \varphi) \quad (1.82)$$

полиномы Лежандра, $j_l(pr)$ сферические функции Бесселя первого рода (см. Приложение А). Напомним, что полиномы Лежандра образуют полную систему (т.е. любая функция, зависящая от $\cos \vartheta$ разлагается в ряд по $P_l(\cos \vartheta)$) и удовлетворяют соотношению ортонормированности

$$\int_{-1}^1 P_l(z) P_{l'}(z) dz = \frac{2 \delta_{ll'}}{2l+1}. \quad (1.83)$$

Аналогично можно разложить $V(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ и $t(\mathbf{p}', \mathbf{p}; z)$ по сумме линейных комбинаций, которые являются собственными функциями \mathbf{L}^2 . В силу сферической симметрии $V(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ и $t(\mathbf{p}', \mathbf{p}; z)$ зависят только от величины $\hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}$, инвариантной при вращениях. Разложим $V(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ и $t(\mathbf{p}', \mathbf{p}; z)$ в ряд по полиномам Лежандра:

$$V(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \sum_l (2l+1) P_l(\cos \theta) V_l(p', p), \quad (1.84)$$

$$t(\mathbf{p}', \mathbf{p}; E + i\varepsilon) = \sum_l (2l+1) P_l(\cos \theta) t_l(p', p; E + i\varepsilon). \quad (1.85)$$

Подставим эти разложения в (1.50) и выполним интегрирование по $d\Omega_{\mathbf{p}''}$. Используя формулу

$$\int d\Omega_{\mathbf{p}''} P_{l'}(\hat{\mathbf{p}}' \hat{\mathbf{p}}'') P_l(\hat{\mathbf{p}}'' \hat{\mathbf{p}}) = \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{ll'} P_l(\hat{\mathbf{p}}' \hat{\mathbf{p}}), \quad (1.86)$$

получаем

$$t_l(p', p; E + i\varepsilon) = V_l(p', p) + \frac{2\mu}{2\pi^2} \int \frac{V_l(p', p'') t_l(p'', p; E + i\varepsilon)}{k^2 - p''^2 + i\varepsilon} p''^2 dp'', \quad k^2 = 2\mu E \quad (1.87)$$

Из (1.81) получаем для $V_l(p', p)$

$$V_l(p', p) = (-1)^l \int_0^{\infty} V(r) j_l(p'r) j_l(pr) r^2 dr. \quad (1.88)$$

Пусть $V(r)$ спадает так, что интеграл

$$\int_0^{\infty} |V(r)| r^{2l+2} dr$$

существует для любого l , т.е., $|V(r)| < \exp(-\kappa r)$ при $r \rightarrow \infty$. Тогда при $p \rightarrow 0$ и $p' \rightarrow 0$

$$V_l(p', p) \sim (pp')^l \int_0^{\infty} V(r) r^{2l+2} dr. \quad (1.89)$$

Рассмотрим теперь ряд итераций для $t_l(p', p; z)$. Когда $p, p' \rightarrow 0$ каждый член в этом ряду содержит множитель $(pp')^l$. Поэтому следует ожидать, что t -матрица $t_l(p', p; z) \sim \mathcal{O}((p'p)^l)$ при $p', p \rightarrow 0$. Это рассмотрение не является строгим, поскольку ряд итераций может расходиться. Однако, более строгое рассмотрение приводит к тому же результату. Аналогично, заключаем, что при $k \rightarrow 0$

$$t_l(k, k; \frac{k^2}{2\mu}) \sim \mathcal{O}(k^2)^l$$

и

$$\delta_l \sim k^{2l+1}$$

. Поэтому для потенциала с конечным радиусом действия сил при низких энергиях доминируют только S -волны.

1.9 Спектральное представление T - матрицы

Собственные функции $|n\rangle$ гамильтониана H образуют полную систему:

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = 1, \quad (1.90)$$

где \sum_n - символическое обозначение суммы по дискретным уровням и интеграла по непрерывному спектру. Правая часть в (1.90) представляет единичный оператор с матричными элементами $\langle x'|1|x\rangle = \delta(x - x')$. Применим к обоим частям уравнения (1.90) оператор $1/(z - H)$, тогда получим

$$G(z) = \sum_n \frac{|n\rangle \langle n|}{z - E_n}, \quad (1.91)$$

от

$$\langle x'|G(z)|x\rangle = \sum_n \frac{\langle x|n\rangle \langle n|x\rangle}{z - E_n} = \sum_n \frac{\psi_n(x) \psi_n^*(x)}{z - E_n}. \quad (1.92)$$

Используя (1.47), получим аналогичное спектральное разложение для T -матрицы:

$$T(z) = V + \sum_n \frac{V|n\rangle\langle n|V}{z - E_n}. \quad (1.93)$$

Из уравнения Шредингера следует $V|n\rangle = (E_n - H_0)|n\rangle$. Функции $V|n\rangle$ наиболее просто записываются в импульсном пространстве:

$$\langle \mathbf{p}|V|n\rangle = \varphi_n(\mathbf{p}) = (E_n - \frac{\mathbf{p}^2}{2m})\psi_n(\mathbf{p}). \quad (1.94)$$

Поэтому спектральное разложение для T -матрицы имеет вид takes the form

$$t(\mathbf{p}', \mathbf{p}; z) = V(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) + \sum_n \frac{\varphi_n(\mathbf{p}')\varphi_n^*(\mathbf{p})}{z - E_n}. \quad (1.95)$$

1.10 Тожество Гильберта. Соотношение унитарности

Тожеством Гильберта называется соотношение

$$G(z_1) - G(z_2) = (z_2 - z_1)G(z_1)G(z_2), \quad (1.96)$$

которое может быть проверено непосредственно. Умножим (1.96) на V слева и справа. В левой части, используя соотношение $VGV = T - V$, получим $T(z_1) - T(z_2)$. В правой части, используя соотношения (1.51), получим $(z_2 - z_1)T(z_1)G_0(z_1)G_0(z_2)T(z_2)$. Положим $z_1 = E + i\varepsilon$ и $z_2 = E - i\varepsilon$, тогда $z_2 - z_1 = -2i\varepsilon$, и

$$\begin{aligned} T(E + i\varepsilon) - T(E - i\varepsilon) &= 2i\text{Im} T(E + i\varepsilon) = \\ &= -2i\varepsilon T(E + i\varepsilon)G_0(E + i\varepsilon)G_0(E - i\varepsilon)T(E - i\varepsilon). \end{aligned} \quad (1.97)$$

Применим теперь уравнение (1.97) для вычисления мнимой части T -матрицы на энергетической поверхности to calculate the imaginary part of the on-shell T -matrix $t(\mathbf{k}', \mathbf{k}; z)$ for $z = k^2/2\mu + i\varepsilon = k'^2/2\mu + i\varepsilon$. Вначале упростим обозначение, обозначив

$$t(\mathbf{k}', \mathbf{p}) = t(\mathbf{k}', \mathbf{p}; k^2/2\mu + i\varepsilon), \quad t(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = t(\mathbf{p}, \mathbf{k}; k^2/2\mu + i\varepsilon), \quad (1.98)$$

и

$$t(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = t(\mathbf{k}', \mathbf{k}; k^2/2\mu + i\varepsilon), \quad |\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}|. \quad (1.99)$$

Используя эти обозначения запишем (1.97) в виде

$$\text{Im} t(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{(2\pi)^3} \int d\Omega_{\mathbf{p}} \int \frac{t(\mathbf{k}', \mathbf{p}) t^*(\mathbf{p}, \mathbf{k})}{(\frac{k^2}{2\mu} - \frac{p^2}{2\mu})^2 + \varepsilon^2} p^2 dp. \quad (1.100)$$

Используя формулу

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \pi\delta(x), \quad (1.101)$$

получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{(\frac{k^2}{2\mu} - \frac{p^2}{2\mu})^2 + \varepsilon^2} = \pi\delta(\frac{k^2}{2\mu} - \frac{p^2}{2\mu}) = 2\mu\pi\delta(k^2 - p^2). \quad (1.102)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} t(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= -\frac{\mu}{4\pi^2} \int d\Omega_{\mathbf{k}'} \int_0^\infty t(\mathbf{k}', \mathbf{p}) \delta(k^2 - p^2) t^*(\mathbf{p}, \mathbf{k}) p^2 dp \\ &= -\frac{\mu}{8\pi^2} k \int d\Omega_{\mathbf{k}'} |t(\mathbf{k}', \mathbf{k})|^2.\end{aligned}\quad (1.103)$$

Наконец, учитывая нормировку $t(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ (см. (1.63)) получаем

$$\operatorname{Im} f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \frac{k}{4\pi} \int d\Omega_{\mathbf{k}'} |f(\mathbf{k}', \mathbf{k})|^2. \quad (1.104)$$

Для парциальной амплитуды упругого рассеяния $f_l(k)$, используя (1.85), (1.83), получим

$$\operatorname{Im} f_l(k) = k |f_l(k)|^2. \quad (1.105)$$

Уравнение (1.105) имеет общее решение

$$f_l(k) = \frac{1}{g_l(k^2) - ik}, \quad (1.106)$$

где функция $g_l(k^2)$ вещественна для вещественных k^2 . Запишем $g_l(k^2)$ в виде

$$g_l(k^2) = k \cot \delta_l(k), \quad (1.107)$$

где $\delta_l(k)$ - фазовый сдвиг, тогда получим

$$f_l(k) = \frac{1}{k \cot \delta_l(k)} = \frac{1}{2ik} (\exp(2i\delta_l(k)) - 1) = \exp(i\delta_l(k)) \frac{\sin \delta_l(k)}{k}. \quad (1.108)$$

В терминах фазовых сдвигов полное упругое сечение имеет вид

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l \sin^2 \delta_l(k). \quad (1.109)$$

Условие унитарности (1.105) легко интерпретируется в комплексной плоскости $\operatorname{Re} f_l(k)$, $\operatorname{Im} f_l(k)$:

$$(k \operatorname{Re} f_l(k))^2 + \left(k \operatorname{Im} f_l(k) - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}. \quad (1.110)$$

Это уравнение описывает круг радиуса $1/2$, который называется *диаграммой Аргана* для упругого потенциального рассеяния. Уравнение (1.105) имеет общее решение

$$f_l(k) = \frac{1}{g_l(k^2) - ik}, \quad (1.111)$$

где вещественная функция $g(k^2)$ может быть разложена в ряд по k^2 . Для $l = 0$ первые два члена в этом разложении обычно записываются в виде

$$g(k^2) = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_0 k^2, \quad (1.112)$$

где мы опустили индекс $l = 0$. Величина $a = f(0)$ называется *длиной рассеяния*, r_0 называется *эффективным радиусом*.

Временно пренебрежем в (1.112) членом $\sim r_0 k^2$, рассматривая его как малую добавку по сравнению с $1/a$, тогда получим соотношение между длиной рассеяния a и параметром $\alpha = \sqrt{-2\mu \epsilon_B}$, где ϵ_B - энергия связи $\epsilon_B = -\alpha^2/2\mu$

$$\frac{1}{a} = \alpha \quad (1.113)$$

С учетом поправки $\sim r_0$ получаем

$$\frac{1}{a} = \alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 r_0 \quad (1.114)$$

1.11 Необходимое условие существования связанного уровня. Условие Баргмана

Как следует из (2.9), связанное состояние в потенциале прямоугольной ямы впервые появляется, когда

$$V_0 = \frac{\pi^2}{4} \frac{\hbar^2}{mR^2}.$$

Аналогичное условие можно получить и в случае произвольного потенциала $V(r)$. Для $l = 0$ это условие, впервые полученное Йостом и Пайсом [4], имеет вид

$$I_0 = \int_0^\infty V(r) r dr \geq 1, \quad V(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} U(r), \quad (1.115)$$

В общем случае произвольных n и l это условие имеет вид[5]

$$n(2l + 1) \geq I \quad (1.116)$$

Значения I_0 для нескольких простейших потенциалов приведены в Таблице 1.11.

Приведем вывод этого неравенства, предложенный Ю.Швингером [6] в 1960 г. Заменяем $V(r)$ на $\lambda V(r)$ и будем увеличивать λ от 0 до 1. При таком увеличении в потенциале последовательно возникают связанные состояния. Пусть i -е связанное состояние возникает при $\lambda = \lambda_i$, тогда $\lambda < \lambda < \lambda_n < 1 < \lambda_n < 1 < \lambda_{n+1}$. Тогда уравнение Шредингера для волновой функции при нулевой энергии $E = 0$ эквивалентно интегральному уравнению

$$\chi_l(r) = \lambda \int_0^\infty dr' g_l(r, r') |V(r)| \chi_l(r'), \quad (1.117)$$

где

$$g_l(r, r') = \frac{1}{2l+1} r_{<}^{l+1} r_{>}^{-l}, \quad r_{<} = \min(r, r'), \quad r_{>} = \max(r, r') \quad (1.118)$$

После замены

$$\Phi_l = |V|^{1/2} \chi_l \quad K_{l,l'} = |V(r)|^{1/2} g_{ll'} V(r')^{1/2} \quad (1.119)$$

получаем уравнение с симметричным ядром

$$\int_0^\infty K_l(r, r') \Phi_l(r') dr' = \lambda^{-1} \Phi_l(r) \quad (1.120)$$

Таблица 1: Значения I_0 в формуле (2.13)

	$U(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r)$	$I_0 = \int_0^\infty V_0(r) r dr$
1	$U(r) = -U_0, r < R, 0, r > R$	$\frac{\pi^2}{8} = 1,234$
2	$-U_0 e^{-\mu r}$	$\frac{\zeta_0^2}{4}$
3	$-V_0 \frac{1}{e^{\mu r} - 1}$	$\frac{\pi^2}{4}$
4	$-g^2 \frac{e^{-\mu r}}{r}$	1.68

Но след оператора равен сумме его собственных значений, откуда находим

$$\int_0^\infty K_l(r, r) dr = \frac{1}{2l+1} \int_0^\infty |V(r)| r dr = \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{\lambda_i} > \sum_{i=1}^{n_l} \frac{1}{\lambda_i} > \sum_{i=1}^{n_l} 1 = n_l, \quad (1.121)$$

т.е. мы получили формулу (2.13) Это условие необходимо, но еще не достаточно для существования связанного состояния.

Если притягивающий потенциал ($V(r) < 0$) является монотонной функцией ($V'(r) > 0$), то известно еще одно необходимое условие, полученное Ф.Калоджеро [7]

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sqrt{-V(r)} dr \geq 1 \quad (1.122)$$

Знак равенства достигается для потенциала в виде прямоугольной ямы.

1.12 Функции Йоста

Рассмотрим уравнение Шредингера для центрального потенциала. Волновая функция рассеяния $u(r, k)$ ⁶ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 u(k, r)}{dr^2} + \left(k^2 - \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r) \right) u(k, r) = 0. \quad (1.123)$$

со смешанными граничными условиями, одно при $r = 0$ (регулярность), второе при $r \rightarrow \infty$ (асимптотическое условие). Мы фиксируем нормировку условием

$$u(k, r) \sim \sin(kr + \delta), \quad r \rightarrow \infty, \quad (1.124)$$

⁶В дальнейшем рассматриваем S волновое рассеяние и опускаем индекс $l = 0$.

где $\delta = \delta(k)$ фазовый сдвиг. Уравнение (1.123) имеет два линейно независимых решения $f_{\pm}(r, k)$, определяемых граничными условиями на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{\mp ikr} f_{\pm}(r, k) = 1, \quad (1.125)$$

so that

$$f_{\pm}(k, r) \sim \exp(\pm ikr), \quad r \rightarrow \infty \quad (1.126)$$

Если f_+ и f_- существуют, они линейно независимы, за исключением точки $k = 0$. Из (1.125) следует, что $f_-(k, r) = f_+(-k, r)$. Любое решение уравнения (1.123) может быть записано в виде линейной комбинации $f_+(k, r)$ и $f_-(k, r)$. Если мы определим

$$\mathbf{f}_{\pm}(k) = f_{\pm}(k, 0), \quad (1.127)$$

волновая функция (1.124) при $r = 0$ может быть записана как линейная суперпозиция

$$u(k, r) = \mathbf{f}_-(k) f_+(r, k) - \mathbf{f}_+(k) f_-(r, k). \quad (1.128)$$

Функция $\mathbf{f}_+(k)$ называется функцией Иоста.

Чтобы связать функции (1.128) с амплитудой рассеяния, сравним асимптотику $u(r, k)$ в (1.124)

$$u(r, k) \rightarrow \sin(kr + \delta(k)) = -\frac{e^{-i\delta(k)}}{2i} (e^{-ikr} - e^{ikr+2i\delta(k)}) \quad (1.129)$$

с асимптотикой функции (1.128)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(k, r) \sim \mathbf{f}(k) (e^{-ikr} - ((\mathbf{f}(-k)/\mathbf{f}(k)) e^{ikr})), \quad (1.130)$$

Следовательно, S матричный элемент выражается в терминах $\mathbf{f}_{\pm}(k)$

$$S(k) = e^{2i\delta(k)} = \mathbf{f}(-k)/\mathbf{f}(k). \quad (1.131)$$

Заметим, что фазовый сдвиг $\delta(k)$ является фазой комплексной функции $\mathbf{f}_-(k)$

$$\mathbf{f}_-(k) = |\mathbf{f}_-(k)| \exp(i\delta(k)) \quad (1.132)$$

Используя формулу $\mathbf{f}_-(k) = \mathbf{f}(k e^{i\pi})$, получим

$$S(-k) = S^*(k) = \frac{1}{S(k)} \quad (1.133)$$

Это уравнение показывает, что фаза $\delta(k)$ может быть выбрана нечетной функцией k , $\delta(-k) = -\delta(k)$.

Связанные состояния в потенциале V отвечают нулям $\mathbf{f}(k)$ в верхней полуплоскости k -плоскости, где $f(k, r)$ экспоненциально убывает при $r \rightarrow \infty$. Если $\mathbf{f}(k_0) = 0$ с $k_0 = i\alpha$, то функция $f(k_0, r)$ также регулярна в начале координат. Таким образом, мы получаем регулярную квадратично интегрируемую функцию, т.е. собственную функцию, отвечающую связанному состоянию.

1.13 Теорема Левинсона

Теорема Левинсона утверждает, что для любого сферически симметричного потенциала (удовлетворяющего обычным условиям) фаза $\delta_l()$ удовлетворяет уравнению

$$\delta_l(0) - \delta_l(\infty) = n_l \pi, \quad (1.134)$$

где n_l число связанных состояний с угловым моментом l . Это справедливо за исключением случая, когда s -волновая функция Йоста зануляется на пороге, $f_0(0) = 0$. В этом случае (1.134) по-прежнему справедливо для $l > 0$, но для $l = 0$

$$\delta_0(0) - \delta_0(\infty) = (n_0 + 1/2) \pi \quad (1.135)$$

Доказательство теоремы сводится к следующему. Предположим вначале, что $f_0(0) \neq 0$, т.е. что не существует связанного состояния с нулевой энергией. Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2i\pi} \int_C d \ln f(k) \quad (1.136)$$

где

$$d \ln f(k) = \frac{d f(k)}{f(k)}, \quad (1.137)$$

а C бесконечный полукруг, т.е. путь вдоль вещественной от $-\infty$ до $+\infty$, который замыкается полукругом большого радиуса R в верхней полуплоскости. Подинтегральное выражение в (1.136) аналитично на и внутри контура интегрирования, за исключением n_l простых нулей функции $f_l(k)$ с вычетом, равным 1, отвечающих связанным состояниям. По теореме Коши

$$I = n_l \quad (1.138)$$

С другой стороны, мы можем переписать I в виде

$$I = \int_C d \ln f_l(k) = \int_{-\infty}^{\infty} d \ln f_l(k), \quad (1.139)$$

поскольку из уравнения

$$f_l(k) - 1 = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^\eta}\right), \quad \eta > 0 \quad (1.140)$$

ясно, что вклад большого полукруга равен нулю. На положительной вещественной полуоси

$$f_l(k) = |f_l(k)| e^{-i\delta_l(k)}, \quad [k \geq 0], \quad (1.141)$$

и, следовательно,

$$\ln f_l(k) = \ln |f_l(k)| - i\delta_l(k) \quad (1.142)$$

На отрицательной вещественной полуоси мы используем соотношение $f_l(-k) = f_l^*(k)$, тогда получим

$$\ln f_l(-k) = \ln |f_l(k)| + i\delta_l(k) \quad (1.143)$$

Подставляя этот результат в (1.139), получим, что вклады от интегрирования вещественных частей вдоль положительных и отрицательных полуосей сокращаются и что

$$I = -2i \int_0^{\infty} d\delta_l(k) = 2i [\delta_l(0) - \delta_l(\infty)], \quad (1.144)$$

что и доказывает теорему Левинсона.

1.14 Потенциал Юкавы

В этом разделе мы рассмотрим приближения для частного случая потенциала Юкавы

$$V(r) = -\gamma \frac{e^{-\beta r}}{r} \quad (1.145)$$

В импульсном представлении

$$V(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \int d\mathbf{r} V(r) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} = -\frac{4\pi\gamma}{\mathbf{q}^2 + \beta^2}, \quad (1.146)$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$. На энергетической поверхности

$$|\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}| = k \quad (1.147)$$

где $k = \sqrt{2\mu E}$. Первое Борновское приближение для амплитуда рассеяния поэтому имеет вид

$$f_B(\mathbf{q}^2) = f^{(1)}(\mathbf{q}^2) = -\frac{2\mu\gamma}{\mathbf{q}^2 + \beta^2} \quad (1.148)$$

Второе Борновское приближение $f^{(2)}(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ вычислить гораздо сложнее ⁷. Согласно (1.50),

$$\begin{aligned} f^{(2)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= -\frac{\mu}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} V(\mathbf{k}', \mathbf{p}) G_0 V(\mathbf{p}, \mathbf{k}) = \\ &= -\frac{2\mu^2 \lambda^2}{\pi^2} \int d\mathbf{p} \frac{1}{((\mathbf{k}' - \mathbf{p})^2 + \beta^2)(p^2 - k^2 + i\varepsilon)((\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 + \beta^2)} \end{aligned} \quad (1.149)$$

Угловая часть интеграла $\int d\Omega_{\mathbf{p}}$ вычисляется с помощью фейнмановского трюка, а именно тождества

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\alpha \left(a \frac{1+\alpha}{2} + b \frac{1-\alpha}{2} \right)^{-2} \quad (1.150)$$

Полагая

$$a = \beta^2 + (\mathbf{k}' - \mathbf{p})^2, \quad b = \beta^2 + (\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 \quad (1.151)$$

получаем для интеграла в (1.149)

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\alpha \int d\mathbf{p} (\mu^2 + k^2 + p^2 - 2\mathbf{p}\mathbf{P})^{-2} (k^2 + i\varepsilon - p^2)^{-1}, \quad (1.152)$$

where

$$\mathbf{P} = \frac{1-\alpha}{2} \mathbf{k}' + \frac{1+\alpha}{2} \mathbf{k}, \quad (1.153)$$

⁷Это впервые сделал Р.Далиц [8], здесь мы следуем изложению в монографии Р.Ньютона [9]

Ω – интегрирование $d\Omega_p$ легко выполняется, и мы получаем

$$\pi \int_{-1}^1 d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dp p^2 [(k^2 - p^2 + i\varepsilon)(p^2 + \beta^2 + k^2 - 2pP) \times \\ \times (p^2 + \beta^2 + k^2 + 2pP)]^{-1} \quad (1.154)$$

Замкнем контур интегрирования в верхней полуплоскости p плоскости и выполним интегрирование с помощью теоремы о вычетах, тогда получим

$$-2i\pi^2 k \int_0^1 d\alpha (f^2 - k^2 q^2 \alpha^2)^{-1} - \\ -2\pi\beta^2 \int_0^1 d\alpha (4\beta^2 + (1 - \alpha^2)q^2)^{-1/2} (f^2 - k^2 q^2 \alpha^2)^{-1}, \quad (1.155)$$

где

$$f^2 = \beta^4 + 4\beta^2 k^2 + k^2 q^2 \quad (1.156)$$

Выполнив оставшееся α -интегрирование, получим

$$f^{(2)}(E, q^2) = \frac{2\mu^2 \gamma^2}{qf} \left(2 \arctan \frac{q\beta}{2f} + i \ln \frac{f + kq}{f - kq} \right) \quad (1.157)$$

Второе Борновское приближение порядка γ^3 к сечению рассеяния $\sim |f^1 + f^2|^2$ получается из перекрестного члена $f^{(1)} \text{Re} f^{(2)}$. Поскольку f^1 вещественная функция, вклад в интерференционный член вносит только $\text{Re} f^{(2)}$, в результате получаем

$$\frac{d\sigma_2}{d\Omega} = \frac{4\mu^2 \gamma^2}{(q^2 + \beta^2)^2} + \frac{16\mu^3 \gamma^3}{(q^2 + \beta^2)qf} \arctan \frac{\beta q}{2f}, \quad (1.158)$$

где f is given by (1.156). Когда $k\beta \gg 1$, *i.e.* $1/k$ мала по сравнению с $1/\beta$ \arctan может быть заменен своим аргументом и отношение второго борновского члена к первому равно

$$\frac{2\mu\gamma\beta}{k^2} \cdot \frac{q^2 + \beta^2}{q^2 + 4\beta^2} \sim \frac{\gamma\beta}{E} \quad (1.159)$$

Как мы и ожидали, Борновское приближение доминирует при высоких энергиях. Отметим, что предположение $k \gg \beta$ не является необходимым для рассеяния (почти) вперед, когда переданный импульс мал по сравнению с обратным радиусом,

$$q \ll \beta \quad (1.160)$$

Эта область отвечает диффракционному пику, чья ширина определяется переданным импульсом $q \ll \beta$. В этом конусе углов рассеяния, который становится все уже и уже с ростом энергии, сечение постоянно и равно

$$\frac{d\sigma_2}{d\Omega} = \frac{4\mu^2 \gamma^2}{\beta^4} + \frac{8\mu^3 \gamma^3}{\beta^2 + 4k^2} \quad (1.161)$$

1.15 Сепарабельный потенциал

Как было отмечено ранее, для локальных потенциалов уравнение Липпмана-Швингера не может быть решено аналитически. Это, однако, не так для так называемого *сепарабельного* (нелокального) потенциала, в котором зависимость от (off shell) начального и конечного импульсов факторизуется

$$V(p, p') = -\frac{\lambda}{2\mu} g(p) g(p') \quad (1.162)$$

Для любой скалярной функции $g(p)$ взаимодействие (1.162) действует только в S-состоянии. В дальнейшем опустим индекс $l = 0$. T-матрица, отвечающая потенциалу (1.162) может быть записана в аналитическом виде

$$t(p', p; E + i\varepsilon) = -\frac{\lambda}{2\mu} g(p') \tau(k) g(p), \quad k^2 = 2\mu E. \quad (1.163)$$

где

$$\tau(k) = \left(1 + \frac{\lambda}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{g^2(p) p^2 dp}{k^2 - p^2 + i\varepsilon} \right)^{-1}. \quad (1.164)$$

Для форм фактора используем дипольный вид

$$g(p) = \frac{1}{p^2 + \beta^2}, \quad (1.165)$$

тогда интеграл в уравнении (??) легко вычисляется. Полагая $k = i\kappa$ получим

$$\frac{\lambda}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{g^2(p) p^2 dp}{\kappa^2 + p^2} = \frac{\lambda}{8\pi} \frac{1}{\beta(\kappa + \beta)^2} \quad (1.166)$$

Удобно фиксировать энергию связи, $E_B = -\alpha^2/2\mu$. Тогда параметр λ , определяющий силу потенциала в (1.162) равен

$$\lambda = 8\pi\beta(\alpha + \beta)^2. \quad (1.167)$$

Поэтому

$$\tau(i\kappa) = \left(1 - \frac{(\beta + \alpha)^2}{(\beta + \kappa)^2} \right)^{-1} \quad (1.168)$$

Сделав аналитическое продолжение $\kappa \rightarrow -ik$, получим

$$\tau(k) = \left(1 - \frac{(\beta + \alpha)^2}{(\beta - ik)^2} \right)^{-1} \quad (1.169)$$

Проверим, что амплитуда рассеяния

$$f(k) = -\frac{\mu}{2\pi} t(k, k) = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{g^2(k)}{1 - \tau(k)}, \quad (1.170)$$

удовлетворяет условию унитарности (1.105). Сначала перепишем (1.105) в виде

$$\operatorname{Im} \frac{1}{f(k)} = -k \quad (1.171)$$

Тогда получим

$$\operatorname{Im} \frac{1}{f(k)} = -\frac{\operatorname{Im} \tau(k)}{2\beta(\alpha + \beta)^2} \cdot \frac{1}{g^2(k)}, \quad (1.172)$$

где $\tau(k)$ определено в (1.169) и мы подставили выражение (6.18) для λ . Используя тот факт, что $\operatorname{Im} \tau(k) = 2(\alpha + \beta)^2 \beta g^2(k)$, получаем (1.171). Для триплетного нейтрон-протонного состояния длина рассеяния и эффективный радиус равны, соответственно,

$$a = \frac{2(\alpha + \beta)^2}{\alpha\beta(\alpha + 2\beta)}, \quad (1.173)$$

и

$$r_0 = \frac{(\alpha + \beta)^2 + 2\beta^2}{\beta(\alpha + \beta)^2}. \quad (1.174)$$

1.16 Потенциал Хюльтена

Уравнение (2.60) оказывается полезным для нахождения аналитического решения для амплитуды рассеяния для ряда *аналитически решаемых потенциалов*. В качестве примера рассмотрим S -волновое рассеяние для потенциала Хюльтена[10].

$$V(r) = -\frac{V_0}{e^{r/r_0} - 1}. \quad (1.175)$$

Это короткодействующий потенциал, который ведет себя как кулоновский потенциал при малых r и экспоненциально спадает с ростом r . Решение уравнения (1.123) с асимптотикой e^{ikr} имеет вид

$$f_+(r, k) = e^{ikr} F(a, b, c, e^{-r/r_0}), \quad (1.176)$$

где $F(a, b, c, z)$ гипергеометрическая функция, которая определяется рядом

$$F(a, b, c, z) = 1 + \frac{ab}{1!c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)} z^2 + \dots, \quad (1.177)$$

в котором параметры a и b равны

$$a = -ikr_0 \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2\mu V_0}{k^2} \right)} \right], \quad (1.178)$$

$$b = -ikr_0 \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2\mu V_0}{k^2} \right)} \right], \quad (1.179)$$

и

$$c = 1 + a + b. \quad (1.180)$$

Отметим, что $a + b = -2ikr_0$ и $ab = -2\mu V_0 r_0^2$. При $r = 0$ функция $f_+(0, k) = \mathbf{f}(k)$ ведет себя как

$$\mathbf{f}(k) = F(a, b, c, 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}. \quad (1.181)$$

Поскольку $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, и $\Gamma(x)$ имеет представление в виде бесконечного произведения

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{z}{n})^z}{1 + \frac{z}{n}} \quad (1.182)$$

мы получаем $\mathbf{f}(k)$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(k) &= \frac{a+b}{ab} \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(a+n)(b+n)}{n(a+b+n)} = \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{2\mu V_0 r_0^2}{n(n-2ir_0k)} \right] = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{k - i\gamma_n}{k + \frac{in}{2r_0}}, \end{aligned} \quad (1.183)$$

where

$$\gamma_n = \frac{1}{2} \left(\frac{2\mu V_0 r_0}{n} - \frac{n}{r_0} \right). \quad (1.184)$$

Каждому вещественному положительному значению γ_n отвечает связанное состояние с энергией

$$E_n = -\frac{\gamma_n^2}{2\mu} \quad (1.185)$$

Соответствующая волновая функция дается уравнением (1.176), в котором

$$a = -n, \quad b = -\frac{2\mu V_0 r_0^2}{n}, \quad z = \exp\left(-\frac{r}{r_0}\right). \quad (1.186)$$

Первые две (ненормированные) функции равны

$$\begin{aligned} u_1(r) &\sim (1 - \exp(-z)) \exp(-\gamma_1 r), \\ u_2(r) &\sim (1 - \exp(-z))(4 - (2 + 2\mu V_0 r_0^2(1 - z))) \exp(-\gamma_2 r). \end{aligned} \quad (1.187)$$

1.17 Разложение Гильберта-Шмидта для уравнения Липпмана-Швингера

Рассмотрим уравнение Липпмана-Швингера для 2-частичной T-матрицы $T(W)$, которая определена при всех комплексных W ⁸.

$$T(W) = V + VG_0(W)T(W) = V + T(W)G_0(W)V \quad G_0(W) = \left[\frac{1}{W - H_0} \right]. \quad (1.188)$$

Определим набор собственных функций $|\Psi_\nu\rangle$ и собственных значений η_ν

$$|\Psi_\nu(W)\rangle = \frac{1}{\eta_\nu(W)} V \left[\frac{1}{W - H_0} \right] |\Psi_\nu(W)\rangle. \quad (1.189)$$

⁸В этом разделе мы обозначаем полную кинетическую энергию системы через W , в разделе 1 эта величина обозначалась через z .

Эквивалентная форма имеет вид

$$[W - H_0]^{-1}V|\Psi_\nu(W)\rangle = \eta_\nu(W)|\Psi_\nu(W)\rangle. \quad (1.190)$$

Можно показать, что необходимое и достаточное условие сходимости ряда теории возмущений для T -матрицы

$$T(W) = V + V[W - H_0]^{-1}V + \dots \quad (1.191)$$

имеет вид $|\eta_\nu(W)| < 1$ для всех ν .

Обсудим физическую интерпретацию $|\Psi_\nu\rangle$ и η_ν . Несколько частных примеров будет рассмотрено ниже. Заметим вначале, что уравнение (1.195) может быть переписано в виде модифицированного уравнения Шредингера

$$\left[H_0 + \frac{1}{\eta_\nu(W)}V \right] |\Psi_\nu(W)\rangle = W\Psi_\nu(W)\rangle. \quad (1.192)$$

Функции $|\Psi_\nu(W)\rangle$ имеет конечную нормировку при любом значении W , в отличие от решений исходного уравнения Шредингера.

Уравнение (1.197) показывает, что для $W < 0$ собственное значение $\eta_\nu(W)$ есть то число, на которое нужно разделить потенциал V , чтобы получить связанное состояние с энергией W . Если $\eta_\nu(W) = 1$ для некоторого $W < 0$, то существует связанное состояние с энергией $E_B = -B$. Если для некоторого $E_0 > 0$

$$Re \eta_\mu(E_0) \approx 1, \quad Im \eta_\mu(E_0 + i\varepsilon) \ll 1,$$

то система имеет резонанс или виртуальное состояние. Это свойство собственных значений может быть использовано для изучения, в частности, многокварковых резонансов [42]⁹ Мы вскоре увидим, что соответствующие Ψ_ν имеют только расходящиеся волны в соответствии с нашим интуитивным ожиданием для поведения волновой функции резонанса.

Рассмотрим 2-частичную парциальную T -матрицу $T(p', p; W)$ вне энергетической поверхности¹⁰. Применяя описанный выше резольвентное разложение ядра уравнения Липпмана—Швингера, получаем

$$T(p', p; W) = \sum_\nu g_\nu(p'; W)d_\nu(W)g(p; W), \quad (1.193)$$

где

$$d_\nu(W) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\lambda_\nu(W)}{1 - \lambda_\nu(W)}. \quad (1.194)$$

Здесь $g_\nu(p; W)$ и $\lambda_\nu(W)$ —собственные функции и собственные значения однородного уравнения Липпмана—Швингера

$$g(p; W) = \int_0^\infty \frac{V(p, p')g_\nu(p'; W)}{W - p'^2/2m} p'^2 dp' \quad (1.195)$$

⁹В этой работе было подчеркнуто, что метод Гильберта-Шмидта особенно удобен при рассмотрении связанных адронных каналов, когда связь каналов приводит к зависящему от энергии потенциалу, который нарушает стандартную ортонормированность собственных функций.

¹⁰В этом разделе индекс орбитального момента l , как правило, опущен.

Эти функции ортогональны с весовой функцией $(W - p^2/2m)^{-1}$:

$$\int_0^\infty g_\nu(p; W)(W - p^2/2m)^{-1}g_\mu(p; W)p^2 dp = -\delta_{\mu\nu}. \quad (1.196)$$

Отметим, что в соответствии с общим результатом подинтегральное выражение в (1.196) не содержит комплексного сопряжения. Знак в правой части этого уравнения выбран так, чтобы собственные функции при $W < 0$ были вещественными.

Вывод уравнения (1.193) в точности аналогичен выводу уравнения (1.189). Разложим потенциал $V(p', p)$ в ряд, скажем, по функциям $g_\nu(p; W)$. Используя (1.195), (1.196), получим для коэффициентов в этом разложении $-(1/4\pi)\lambda_\nu g_\nu(p'; W)$. Поэтому ¹¹

$$V(p', p) = -\frac{1}{4\pi} \sum_\nu \lambda_\nu g_\nu(p'; W)g_\nu(p; W). \quad (1.197)$$

Подставляя это разложение в уравнение Липпмана-Швингера для T -матрицы, получаем (1.193).

Проблема нахождения собственных функций и собственных значений может быть сформулирована как в импульсном, так и в координатном пространстве. Уравнение, эквивалентное (1.195), в координатном пространстве имеет вид:

$$\frac{d^2}{dr^2} u_\nu(r; W) = \left[2mW - \frac{V(r)}{\lambda_\nu(W)} \right] u_\nu(r; W). \quad (1.198)$$

с граничными условиями:

$$u_\nu(r; W) \sim r^{l+1}, \quad r \rightarrow 0, \quad u_\nu(r; W) \sim \exp \left[i\sqrt{2\mu W}r \right], \quad r \rightarrow \infty. \quad (1.199)$$

Для $W < 0$ можно определить $k = \sqrt{2mW} = i\kappa$, где $\kappa > 0$, поэтому при $r \rightarrow \infty$ функция $u_\nu(r; W)$ имеет затухающую асимптотику. Для $W = E + i\varepsilon$ с $E > 0$ параметр k вещественный и положительный, поэтому $u_\nu(r; W)$ содержат только расходящиеся волны. Конечно, такие решения не существуют для эрмитовых потенциалов, однако, они могут и должны существовать для комплексного потенциала $V(r)/\lambda_\nu(W)$.

Напомним, что уравнение $\lambda_\nu(W_\nu) = 1$ определяет энергию связанного уровня W_ν . Взяв в уравнении (1.193) вычет в полюсе $W = W_\nu = \alpha_\nu^2/2m$, получаем связь между $g_\nu(p; W_\nu)$ и волновой функцией ν -го связанного состояния $\psi_\nu(p)$:

$$g_\nu(p; W_\nu) = -\frac{4\pi\gamma_\nu}{2m}(p^2 + \alpha_\nu^2)\psi_\nu(p), \quad (1.200)$$

где

$$\gamma_\nu = \left(\frac{d\lambda_\nu(W)}{dW} \right)_{W=W_\nu}. \quad (1.201)$$

Собственные функции $u_\nu(r; W)$ и $g_\nu(p; W)(W - p^2/2\mu)^{-1}$ в координатном и импульсном пространствах, связаны фурье-преобразованием:

$$g_\nu(p; W)(W - p^2/2\mu)^{-1} = \frac{i^l}{2\pi^2} \int_0^\infty u_\nu(r; W)j_l(pr)rdr. \quad (1.202)$$

¹¹Выбор параметра W в (1.197) совершенно произволен: хотя каждый член в этом уравнении зависит от W , полная сумма от W не зависит.

Условие ортонормированности (1.196), записанное в терминах функций $u_\nu(r; W)$, имеют вид

$$\int_0^\infty u_{\nu'}(r; W) V(r) u_\nu(r, W) dr = -\delta_{\nu'\nu} \lambda_\nu(W). \quad (1.203)$$

Ниже мы, следуя С.Вайнбергу [15], сформулируем некоторые свойства собственных значений.

1. *Аналитичность.* Собственные значения $\lambda_\nu(W)$ для потенциала γV определяются как корни уравнения

$$\mathbf{f}\left(-k, \frac{\gamma}{\lambda}\right) = 0, \quad (1.204)$$

где $\mathbf{f}(k)$ — функция Иоста, определенная в разделе 1. Следовательно, особенности $\lambda_\nu(W)$, как функции $k = \sqrt{2mW}$ совпадают с особенностями $\mathbf{f}(-k, \gamma)$. Последняя, как известно, регулярна в верхней полуплоскости k . Часто оказывается возможным распространить область аналитичности $\mathbf{f}(-k, \gamma)$ на нижнюю полуплоскость. В частности, если интеграл

$$\int_0^\infty V(r) \exp\left[\frac{r}{r_0}\right] < \infty,$$

то $\mathbf{f}(k)$ аналитична для $Im - k > 1/2r_0$. В этом случае область аналитичности $\mathbf{f}(k)$ также сдвигается в нижнюю плоскость. Например, для потенциала Хюльтена $V(r) = -\gamma [\exp(r/r_0) - 1]$

$$\lambda_\nu(k) = \frac{2m\gamma r_0^2}{\nu(\nu - 2ikr_0)} \quad (1.205)$$

имеет полюсы в нижней полуплоскости при $k_\nu = -i\nu/2r_0$. В любом случае $\lambda_\nu(W)$ аналитичны на физическом листе плоскости энергии с разрезом вдоль положительной вещественной оси от 0 до $+\infty$. Более того, для эрмитовых потенциалов $\lambda_\nu(W)$ вещественны для $W < 0$. Поэтому собственные значения (и собственные функции) удовлетворяют принципу симметрии Шварца

$$\lambda_\nu(W^*) = \lambda_\nu^*(W).$$

2. *Поведение $\lambda_\nu(W)$ при вещественных отрицательных энергиях.* Вид зависимости $\lambda_\nu(W)$ при вещественных $W < 0$ следует из их физической интерпретации (см. замечание после уравнения (1.199)). Для чисто притягивающего ($V < 0$) или отталкивающего ($V > 0$) потенциала все $\lambda_\nu(W)$ положительны (отрицательны) при вещественных $W < 0$. Можно показать [15], что

$$\frac{1}{\lambda_\nu(W)} \cdot \frac{d\lambda_\nu}{dW} > 0 \quad (1.206)$$

для $W < 0$. Поэтому каждое положительное λ_ν убывает, а каждое отрицательное λ_ν увеличивается, когда энергия изменится от 0 до $-\infty$. Потенциал, содержащий как притяжение, так и отталкивание содержит положительные и отрицательные собственные значения. Это разделение абсолютно, поскольку собственные значения не могут изменить знак.

3. *Спектральное представление. Поведение при малых энергиях.* Поскольку собственные значения $\lambda_\nu(W)$ аналитичны в комплексной W -плоскости, разрезанной вдоль вещественной положительной полуоси, и убывают на бесконечности они удовлетворяют дисперсионному соотношению без вычитаний

$$\lambda_\nu(W) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\rho_\mu(W') dW'}{W' - W}, \quad (1.207)$$

где спектральная функция $\rho_\nu(W') > 0$ для $V < 0$ и $\rho_\nu(W') < 0$ для $V > 0$. Поэтому мнимая часть $\lambda_\nu(W)$ положительно или отрицательно определена во всей области $\Im W > 0$. При $W \rightarrow 0$ $\rho_\nu(W) \sim W^{l+\frac{1}{2}}$. Отсюда следует, что при малых W

$$\lambda_\nu(W + i0) - \lambda_\nu(0) = a_\nu W + ib_\nu W^{l+\frac{1}{2}} \quad (1.208)$$

Поэтому разность $\lambda_\nu(W + i0) - \lambda_\nu(W)$ в основном чисто мнимая и растет как \sqrt{W} для S -вронного рассеяния, в то время как для $l \neq 0$ эта разность в основном вещественна и растет как W .

4. *Поведение траекторий собственных значений на первом листе W .* Подведем итог и опишем поведение траектории $\lambda_\nu(W)$ как функции энергии, когда W меняются на вещественной оси от $W = -\infty$ до 0 , и затем вдоль верхнего берега разреза от $W = 0 + i\varepsilon$ до $W = +\infty + i\varepsilon$. Любое собственное значение $\lambda_\nu(W)$, отвечающее потенциалу притяжения, монотонно возрастает от нуля при $W = -\infty$ до некоторого положительного значения $\lambda_\nu(0)$ при $W = 0$. Когда W дальше увеличивается ($W = E + i\varepsilon$ с $E > 0$) λ_ν становится комплексным с положительной мнимой частью. Мы уже отмечали, что этот рост вначале вертикален для S -волнового рассеяния на короткодействующем потенциале притяжения и горизонтален для высших парциальных волн. Наконец, для $W = \infty + i\varepsilon$ $\lambda_\nu(W)$ возвращается через верхнюю полуплоскость W в исходную точку. Это поведение схематически показано на Рис. 4 для частного случая потенциала Хюльтена; качественное поведение P -волновых собственных значений показано на рис. 5.

Рис. 4. Траектории первых двух S -волновых собственных значений в комплексной плоскости W для потенциала Хюльтена $V(r) = -\gamma [\exp r/r_0 - 1]^{-1}$, $\gamma = 1/mr_o^2$.

Рис. 5. Качественный вид траекторий первых двух P -волновых собственных значений в комплексной плоскости W для типичного потенциала притяжения.

Заметим, что расходимость борновского ряда теории возмущений тесно связана с поведением собственных значений $\lambda_\nu(W)$. Борновский ряд при некоторой энергии W расходится, если одно из собственных значений лежит вне единичного круга. Поскольку для L^2 ядра ряд $\sum_\nu 1/\lambda_\nu^2$ сходится, число собственных значений, лежащих вне единичного круга, конечно. Поэтому из потенциала всегда можно вычесть вклад конечного числа "опасных" траекторий так чтобы остаточное взаимодействие сходилось при данной энергии. Детальное обсуждение этой процедуры содержится у Вайнберга и Ньютона [15], [?].

5. Отметим еще полезное представление S -матрицы

$$S(k) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 - \lambda_\nu(W_-)}{1 - \lambda_\nu(W_+^*)} = \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 - \lambda_\nu(-k)}{1 - \lambda_\nu(k)}, \quad (1.209)$$

где W_+ и W_- лежат, соответственно, на верхнем и нижнем берегах упругого разреза. Поскольку $\lambda_\nu(W_-) = \lambda_\nu^*(W_+)$, выражение (1.209) автоматически унитарно. Из (1.209) следует

$$\delta_\nu(k) = - \sum_{\nu=1}^{\infty} \arg [1 - \lambda_\nu(k)] \quad (1.210)$$

Отметим, что это уравнение имеет более широкий смысл чем (1.209) и применимо, в частности, в случае, когда открыты неупругие пороги. В этом случае нужно провести упругий разрез выше неупругого и выбрать W_- в точке лежащей между двумя разрезами. Можно показать, что для энергий выше неупругого порога $\lambda_\nu(W_-) \neq \lambda_\nu^*(W_+)$, в этом случае $|S_i| < 1$.

1.18 Аналитические решения в методе Гильберта-Шмидта.

Уравнение (1.198) имеет аналитическое решение для ряда потенциалов. Простейший пример—это сепарабельный потенциал первого ранга, уже рассмотренный в разделе 1.14.

$$V(p'; p) = -\frac{\gamma}{2m} g(p')g(p), \quad (1.211)$$

Соответствующая T -матрица равна

$$t(p', p; W) = -\frac{\gamma}{2m} g(p')\tau(W)g(p), \quad (1.212)$$

где

$$\tau(W) = \left[1 - 4\pi \frac{\gamma}{2m} J(W) \right], \quad J(W) = \int_0^{\infty} \frac{[g(p)]^2 p^2 dp}{p^2/2m - W}. \quad (1.213)$$

Как показано в разделе 1.14, для Юкавского форм фактора $g(p) = (p^2 + \beta^2)^{-1}$ интеграл в (1.213) может быть вычислен аналитически:

$$4\pi \frac{\gamma}{2m} J(W) = \frac{(\beta + \alpha)^2}{(\beta + \sqrt{-2mW})^2}. \quad (1.214)$$

В этом случае бесконечная сумма () сводится к одному члену и мы можем отождествить

$$g_\nu(p, W) = \frac{g(p)}{\sqrt{J(W)}} \delta_{\nu 1}, \quad \lambda_\nu(W) = 4\pi \frac{\gamma}{2m} J(W) \delta_{\nu 1}. \quad (1.215)$$

Результат (1.215) находится в согласии с тем фактом, что сепарабельный потенциал первого ранга имеет ровно одно связанное состояние, независимо от того, как велика константа γ в (1.211). Обобщение этого результата для сепарабельного потенциала ранга N очевидно: такой потенциал имеет ровно N собственных функций и собственных значений.

Для локальных потенциалов число собственных функций бесконечно. В этом случае уравнение (1.198) имеет аналитическое решение в том случае, если аналитическое решение имеет соответствующее уравнение Шредингера. В качестве примера рассмотрим S -волновое рассеяние для потенциала Хюльтена:

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2mr_0^2} \left(e^{\frac{r}{r_0}} - 1 \right)^{-1}. \quad (1.216)$$

При малых $r \ll r_0$ этот потенциал выглядит как кулоновский потенциал

$$V_C(r) = -\frac{Ze^2}{r}, \quad (1.217)$$

если мы отождествим $Ze^2 = \lambda/2mr_0$. При $r \gg r_0$ (1.216) приближается к экспоненциальному потенциалу

$$V(r) \approx -\frac{\lambda}{2mr_0^2} \exp(-r/r_0). \quad (1.218)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(k) &= \frac{a+b}{ab} \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(a+n)(b+n)}{n(a+b+n)} = \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{2\mu V_0 r_0^2}{n(n-2ir_0 k)} \right] = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{k - i\gamma_n}{k + \frac{in}{2r_0}}, \end{aligned} \quad (1.219)$$

where

$$\gamma_n = \frac{1}{2} \left(\frac{2\mu V_0 r_0}{n} - \frac{n}{r_0} \right). \quad (1.220)$$

Точная функция Йоста равна

$$\mathbf{f}(k, \lambda) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left[1 - \frac{\lambda}{\nu(\nu + 2ikr_0)} \right], \quad (1.221)$$

поэтому корни уравнения () равны

$$\eta_\nu(W) = \frac{\lambda}{\nu(\nu - 2ikr_0)} = \frac{\lambda}{\nu(\nu + [-8mWr_0^2]^{1/2})}. \quad (1.222)$$

Не нормированная собственная с $\nu = 1$ имеет вид

$$\psi_1(r, k) = e^{ikr} (1 - r/r_0)^{-1}. \quad (1.223)$$

В заключение выпишем поучительное разложение Гильберта—Шмидта для длины рассеяния a . Для потенциала в виде прямоугольной ямы

$$a = \frac{8r_0}{\pi^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu-1)^2-1} \times \frac{1}{(2\nu-1)^2-\beta}, \quad \beta = \frac{4}{\pi^2} \cdot 2m\gamma r_0^2 \quad (1.224)$$

Для $\beta < 1$ мы можем разложить второй сомножитель в каждом члене суммы (1.224) в ряд по β . В результате приходим к ряду теории возмущений

$$a = -\frac{8r_0}{\pi^2} \beta \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \beta^n, \quad (1.225)$$

где

$$\xi_n = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p-1)^{2n+4}} = \frac{\pi^{2n+4}}{2} \cdot \frac{2^{2n+4}-1}{(2n+4)!} |B_{2n+4}|, \quad (1.226)$$

B_{2n+4} — числа Бернулли: $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$, \dots . Сумма (1.225) может быть вычислена в явном виде и приводит к известному результату [?]

$$a = r_0 \left(1 - \frac{\tan \rho}{\rho} \right), \quad \rho = \alpha r_0. \quad (1.227)$$

Подставляя $\xi_0 = \pi^4/96$, $\xi_1 = \pi^6/960$, \dots , получим

$$a = -r_0 \left(\frac{1}{3} \rho^2 + \frac{2}{15} \rho^4 + \dots \right) \quad (1.228)$$

Если мы ограничимся учетом только первого члена в (1.225), то получим $\xi_n = 1$ для всех n . Ошибка этого приближения почти целиком обусловлена первым членом в (1.225) и составляет $\sim 4\%$. Аналогичные вычисления для потенциала Хюльтена приводят к результату

$$a = -2\alpha^2 r_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu} \frac{1}{\nu^2 - \alpha^2} = -2\alpha^2 r_0 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n} \zeta(2n+3), \quad (1.229)$$

где $\zeta(x)$ — ζ -функция Римана. Ее несколько первых значений равны

$$\zeta(3) = 1.202 \dots \quad \zeta(5) = 1.00835 \dots \quad \zeta(7) = 1.002008 \dots$$

Учет только первого Гильберт—Шмидтовского резонанса эквивалентен замене $\zeta(2n+3) \rightarrow 1$. Как и в случае потенциала прямоугольной ямы, такая аппроксимация влияет, главным образом, на первый борновский член.

В заключение этого раздела снова подчеркнем, что уравнение $\eta_\nu(W_\nu) = 1$ и его обобщение на многочастичный случай [?] есть в действительности наиболее естественный и математически корректный определения резонансов как в физике малонуклонных систем [?], так и в физике элементарных частиц [42].

1.19 Рассеяние на жесткой сфере

Рассмотрим рассеяние на жесткой сфере ¹²

$$V = \infty \quad \text{for } r < R, \quad V = 0 \quad \text{for } r > R. \quad (1.230)$$

Волновая функция рассеяния

$$u_l(k, r) = j_l(kr) \cos(\delta_l) - n_l(kr) \sin(\delta_l) \quad (1.231)$$

должна обращаться в ноль при $r = R$, тогда из уравнения (1.231) получим

$$\tan(\delta_l) = \frac{j_l(kR)}{n_l(kR)} \quad (1.232)$$

Таким образом, фазы известны для любого l . Рассмотрим вначале S -волновое рассеяние $l = 0$. Уравнение (1.232) для $l = 0$, принимает вид

$$\tan(\delta_0) = \frac{\sin(kR)/kR}{-\cos(kR)/kR} = -\tan(kR), \quad (1.233)$$

или $\delta_0 = -kR$. Радиальную волновую функцию рассеяния можно записать в виде

$$u_0(k, r) \propto (\sin(kr) \cos(\delta_0) + \cos(kr) \sin(\delta_0)) = \sin(kr + \delta_0) \quad (1.234)$$

Рассмотрим теперь δ_l в пределе низких и высоких энергий. В пределе низких энергий $kR \ll 1$. Используем формулы из Приложения А

$$j_l(x) = \frac{x^l}{(2l+1)!!}, \quad n_l(x) = -\frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}}, \quad x \rightarrow 0, \quad (1.235)$$

тогда получаем

$$\tan(\delta_l) = \frac{-(kR)^{2l+1}}{(2l+1)!!(2l-1)!!} \quad (1.236)$$

Как и следовало ожидать, δ_l с $l \neq 0$. Поскольку $\delta_0 = -kR$ независимо от того, велико k или нет, мы получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sin^2 \delta_0}{k^2} = R^2 \quad \text{for } kR \ll 1 \quad (1.237)$$

Полное сечение

$$\sigma_{tot} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = 4\pi R^2 \quad (1.238)$$

в 4 раза больше геометрического сечения¹³ Однако, низко-энергетическое рассеяние означает длинно-волновой предел, в котором мы не ожидаем с необходимостью воспроизведение классического результата.

¹² Здесь мы следуем J. J. Sakurai [11]

¹³ Под геометрическим сечением понимается площадь диска радиуса R , который блокирует распространение плоской волны

Можно было бы ожидать, что при высокой энергии мы должны получить геометрическое сечение πR^2 , поскольку при высокой энергии ситуация очень похожа на квазиклассическую. Однако, это не так. Действительно, заметим, что при высоких энергиях все волны вплоть до $l_{max} = kR$ вносят вклад в сечение. Поэтому сечение равно

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{l=kR} (2l+1) \sin^2 \delta_l \quad (1.239)$$

Используя (1.232), получаем

$$\sin^2 \delta_l = \frac{\tan^2 \delta_l}{1 + \tan^2 \delta_l} = \frac{j_l^2(kR)}{j_l^2(kR) + n_l^2(kR)} = \sin^2(kR - \frac{\pi l}{2}), \quad (1.240)$$

где мы использовали Eqs. (7.13)

$$j_l(x) \sim \frac{1}{x} \sin\left(x - \frac{\pi l}{2}\right), \quad n_l(x) \sim -\frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{\pi l}{2}\right) \quad (1.241)$$

при $x \rightarrow \infty$. Поскольку каждый раз, когда l увеличивается на единицу, δ_l уменьшается на $\pi/2$, для парциальных волн с l и $l+1$ получаем

$$\sin^2 \delta_l + \sin^2 \delta_{l+1} = \sin^2 \delta_l + \sin^2(\delta_l - \pi/2) = \sin^2 \delta_l + \cos^2 \delta_l = 1 \quad (1.242)$$

Полное число членов в сумме по l , грубо говоря, равно $l_{max} = kR$, количество таких пар равно $l_{max}/2 = kR/2$. Собирав все эти формулы вместе, получим для (1.239)

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k^2} (kR)^2 \frac{1}{2} = 2\pi R^2, \quad (1.243)$$

что так же не является геометрическим сечением.

Чтобы понять происхождение множителя 2 в уравнении (1.243), мы разделим

$$f(k, \theta) = \sum_l (2l+1) \left(\frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2ik} \right) P_l(\cos \theta) = \sum_l (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta) \quad (1.244)$$

на две части

$$f(k, \theta) = f_r(k, \theta) + f_s(k, \theta), \quad (1.245)$$

где

$$f_r(k, \theta) = \frac{1}{2ik} \sum_l^{kR} (2l+1) e^{2i\delta_l} P_l(\cos \theta), \quad (1.246)$$

$$f_s(k, \theta) = \frac{i}{2k} \sum_l^{kR} (2l+1) P_l(\cos \theta) \quad (1.247)$$

При вычислении $\int |f_r|^2 d\Omega$, ортогональность полиномов Лежандра $P_l(\cos \theta)$ приводит к тому, что перекрестные члены для вклада амплитуд с различными l сокращаются, и мы получаем сумму квадратов модулей парциальных волн

$$\int |f_r|^2 d\Omega = \frac{2\pi}{4k^2} \sum_{l=0}^{l_{max}} \int_{-1}^1 (2l+1)^2 P_l^2(\cos \theta) d \cos \theta = \frac{\pi l_{max}^2}{k^2} = \pi R^2 \quad (1.248)$$

Теневая амплитуда (?? чисто мнимая. Она имеет пик для рассеяния вперед, поскольку в этом случае вклады парциальных волн складываются когерентно. Используя для $P_l(\cos \theta)$ приближение малых углов, получаем

$$f_s = \frac{i}{2k} \sum (2l+1) J_0(l\theta) = ik \int_0^R b db J_0(kb\theta) = \frac{iR J_1(kR\theta)}{\theta} \quad (1.249)$$

Это в точности формула для Фраунгофферовой диффракции в оптике с пиком вблизи $\theta = 0$. Полагая $\xi = kR\theta$ и $d\xi/\xi = d\theta/\theta$, получаем

$$\int |f_s|^2 d\Omega = 2\pi R^2 \int_0^\infty \frac{J_1^2(\xi)}{\xi} d\xi = \pi R^2 \quad (1.250)$$

Интерференционный член, содержащий произведение f_r и f_s обращается в ноль, так как фаза f_r осциллирует (напомним, что $\delta_{l+1} = \delta_l - \pi/2$) и при усреднении дает ноль, в то время как f_s чисто мнимая величина. Поэтому

$$\sigma_{tot} = \sigma_{tot}^r + \sigma_{tot}^s = \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi R^2 \quad (1.251)$$

Второй член в этом выражении отвечает *теновому* рассеянию, поскольку при рассеянии на жесткой сфере при высоких энергиях волны с прицельным параметром, меньшим R должны отражаться. Поэтому сразу позади рассеивателя вероятность нахождения частицы равна нулю, т.е. должна образовываться тень. В квантовой механике эта тень образуется в результате деструктивной интерференции между падающей волной (которая присутствует даже в том случае, когда рассеиватель отсутствует) и рассеянной волной. Таким образом, чтобы образовалась тень, нужно рассеяние. Теневая амплитуда должна быть чисто мнимой. Действительно, напомним, что множитель $e^{ikr}/2ikr$ для l -й парциальной волны равен $1+2ik f_l(k)$, где 1 присутствует даже в отсутствие рассеивателя. Следовательно, для сокращения мы должны потребовать, чтобы $Im f_l$ была положительной.

В действительности, это рассуждение дает физическую интерпретацию оптической теоремы. Заметим вначале, что $Im f_r(0)$ при усреднении дает ноль благодаря быстро осциллирующей фазе.

$$\frac{4\pi}{k} Im f(0) = \frac{4\pi}{k} Im f_s = \frac{4\pi}{k} Im \left(\frac{i}{2k} \sum_0^{kR} (2l+1) P_l(1) \right) = 2\pi R^2, \quad (1.252)$$

что действительно равно σ_{tot} в (1.251).

1.20 Уравнения Фаддеева

Уравнение Липпмана-Швингера

$$T(z) = V + V G_0(z) T(z), \quad V = \sum_{i<j} V_{ij} \quad (1.253)$$

для числа частиц ≥ 3 не может быть решено стандартными методами. Трудность здесь может быть выражена разными способами а) ядро $V G_0$ этого уравнения не является

ядром типа L^2 даже если потенциал обладает достаточно хорошим поведением и приводит к 2-частичному ядру типа L^2 , b) ядро VG_0 содержит несвязанные графики, см. рис. 3.

Рис.3. Несвязанные графики в системе трех (a) и четырех (b,c) частиц.

Выражение, отвечающее каждому связанному графику, содержит общую δ -функцию, выражающую закон сохранения импульса. Эта δ -функция полностью безобидна, и может быть выделена из уравнения Липпмана-Швингера в качестве общего множителя. Однако, любой несвязанный граф содержит дополнительные δ -функции, которые не сохраняются полным взаимодействием и, следовательно, не могут быть факторизованы. Эти опасные δ функции не исчезают после итераций и приводят к тому, что ядро не принадлежит к L^2 классу.

Не делая никаких попыток строгого математического рассмотрения, мы в дальнейшем рассматриваем отсутствие таких дополнительных δ -функций или их исчезновение после некоторого числа итераций как формальный признак полностью непрерывного ядра. Мы можем теперь сформулировать нашу задачу: можно ли переписать уравнение Липпмана-Швингера (1.259) для $N \geq 3$ в виде системы линейных интегральных уравнений, ядра которой или связаны или становятся связанными после некоторого числа итераций? ¹⁴

Эта задача была решена Л.Д.Фаддеевым [13] для трех частиц и его учеником О.А.Якубовским [14] для $N \geq 3$. Покажем, как работает метод Фаддеева для 3-х частиц. Определим операторы

$$T^\alpha = V_\alpha + V_\alpha G_0(z) T(z), \quad \alpha = 12, 31, 23 \quad (1.254)$$

Очевидно, что

$$T(z) = \sum_{\alpha} T^\alpha(z) \quad (1.255)$$

¹⁴Мы предполагаем, конечно, что 2-частичные потенциалы убывают достаточно быстро, чтобы обеспечить L^2 свойства 2-частичных ядер.

Операторы (1.260) называются фаддеевскими компонентами¹⁵, эти компоненты удовлетворяют уравнениям

$$T^\alpha = V_\alpha + V_\alpha G_0(z) \sum_{\beta} T^\beta(z), \quad \beta = 12, 31, 23 \quad (1.256)$$

Перенесем член с $\beta = \alpha$ в правой части этого уравнения в его левую часть, тогда получим

$$(1 - V_\alpha G_0(z)) T^\alpha = V_\alpha + V_\alpha G_0(z) \sum_{\beta \neq \alpha} T^\beta(z) \quad (1.257)$$

Умножим это уравнение справа на $(1 - V_\alpha G_0(z))^{-1}$. Используя тот факт, что $(1 - V_\alpha G_0(z))^{-1} V_\alpha = T_\alpha$, получаем уравнения Фаддеева

$$T^\alpha = T_\alpha + T_\alpha G_0(z) \sum_{\beta \neq \alpha} T^\beta(z), \quad (1.258)$$

где T^α - 3-частичный оператор, а T_α - 2-частичный оператор. Оба оператора определены в гильбертовом пространстве 2-частичных состояний.

Аналогично можно записать уравнения Фаддеева для волновой функции связанного состояния. Уравнение Липпмана-Швингера

$$T(z) = V + V G_0(z) T(z), \quad V = \sum_{i < j} V_{ij} \quad (1.259)$$

для числа частиц ≥ 3 не может быть решено стандартными методами. Трудность здесь может быть выражена разными способами:

- a) ядро $V G_0$ этого уравнения не является ядром типа L^2 даже если потенциал обладает достаточно хорошим поведением и приводит к 2-частичному ядру типа L^2 , и
- b) ядро $V G_0$ содержит несвязанные графики, см. рис.2

Выражение, отвечающее каждому связанному графику, содержит общую δ -функцию, выражающую закон сохранения импульса. Эта δ -функция полностью безобидна, и может быть выделена из уравнения Липпмана-Швингера в качестве общего множителя. Однако, любой несвязанный граф содержит дополнительные δ -функции, которые не сохраняются полным взаимодействием и, следовательно, не могут быть факторизованы. Эти опасные δ функции не исчезают после итераций и приводят к тому, что ядро не принадлежит к L^2 классу.

Не делая никаких попыток строгого математического рассмотрения, мы в дальнейшем рассматриваем отсутствие таких дополнительных δ -функций или их исчезновение после некоторого числа итераций как формальный признак полностью непрерывного ядра. Мы можем теперь сформулировать нашу задачу: можно ли переписать уравнение Липпмана-Швингера (1.259) для $N \geq 3$ в виде системы линейных интегральных уравнений, ядра которой или связаны или становятся связанными после некоторого числа итераций? ¹⁶ Эта задача была решена Л.Д.Фаддеевым [13] для трех частиц

¹⁵Операторы типа (1.260) впервые были введено для компонент 3-частичной волновой функции Скорняковым и Тер-Мартirosяном [12]

¹⁶Мы предполагаем, конечно, что 2-частичные потенциалы убывают достаточно быстро, чтобы обеспечить L^2 свойства 2-частичных ядер.

и О.А.Якубовским [14] для $N \geq 3$. Покажем, как работает метод Фаддеева для 3-х частиц.

Определим операторы

$$T^\alpha = V_\alpha + V_\alpha G_0(z) T(z), \quad \alpha = 12, 31, 23 \quad (1.260)$$

Очевидно, что

$$T(z) = \sum_{\alpha} T^\alpha(z) \quad (1.261)$$

Операторы (1.260) называются фаддеевскими компонентами¹⁷, эти компоненты удовлетворяют уравнениям

$$T^\alpha = V_\alpha + V_\alpha G_0(z) \sum_{\beta} T^\beta(z), \quad \beta = 12, 31, 23 \quad (1.262)$$

Перенесем член с $\beta = \alpha$ в правой части этого уравнения в его левую часть, тогда получим

$$(1 - V_\alpha G_0(z)) T^\alpha = V_\alpha + V_\alpha G_0(z) \sum_{\beta \neq \alpha} T^\beta(z) \quad (1.263)$$

Умножим это уравнение справа на $(1 - V_\alpha G_0(z))^{-1}$. Используя тот факт, что $(1 - V_\alpha G_0(z))^{-1} V_\alpha = T_\alpha$, получаем уравнения Фаддеева

$$T^\alpha = T_\alpha + T_\alpha G_0(z) \sum_{\beta \neq \alpha} T^\beta(z), \quad (1.264)$$

где T^α - 3-частичный оператор, а T_α - 2-частичный оператор. Оба оператора определены в гильбертовом пространстве 2-частичных состояний.

Аналогично можно записать уравнения Фаддеева для волновой функции Ψ связанного состояния в системе трех частиц. Исходным является уравнение

$$\Psi = G_0(E_b) V \Psi, \quad (1.265)$$

где E_b — энергия связи, $V = \sum_{\alpha} V_\alpha = V_{12} + V_{31} + V_{23}$. Определим компоненту

$$\Psi_\alpha = G_0(E_b) V_\alpha \Psi. \quad (1.266)$$

Поступая так же как и при выводе уравнения (1.264), получим

$$\Psi_\alpha = G_0(E_b) T_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha} \Psi_\beta. \quad (1.267)$$

Перейдем к выводу уравнений Фаддеева в импульсном пространстве. Мы ограничимся рассмотрением связанного состояния трех одинаковых частиц с $m_1 = m_2 = m_3 = m$. Введем три системы Якобиевых координат

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3, \quad (1.268)$$

¹⁷Операторы типа (1.260) впервые были введено для компонент 3-частичной волновой функции Скорняковым и Тер-Мартirosяном [12]

$$\mathbf{k}_{12} = \frac{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}{2}, \quad \mathbf{p}_{12,3} = \frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - 2\mathbf{k}_3}{3}, \quad (1.269)$$

$$\mathbf{k}_{31} = \frac{\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1}{2}, \quad \mathbf{p}_{31,2} = \frac{\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_1 - 2\mathbf{p}_2}{3}, \quad (1.270)$$

$$\mathbf{k}_{23} = \frac{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3}{2}, \quad \mathbf{p}_{23,1} = \frac{\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - 2\mathbf{k}_1}{3}. \quad (1.271)$$

Переходом в систему центра масс зависимость от \mathbf{K} устраняется из рассмотрения. Каждая пара переменных $\mathbf{k}_{12}, \mathbf{p}_{12,3}, \mathbf{k}_{31}, \mathbf{p}_{31,2}, \mathbf{k}_{23}, \mathbf{p}_{23,1}$ может быть выражена через две других. В дальнейшем мы пишем просто \mathbf{k} и \mathbf{p} , если нам безразлично, какую из пар, перечисленных выше, использовать в качестве переменных. В системе центра масс полный гамильтониан имеет вид

$$H = H_0 + V_{12} + V_{31} + V_{23}, \quad (1.272)$$

где H_0 —оператор умножения на функцию

$$H_0(k, p) = \frac{k^2}{m} + \frac{3}{4m} p^2, \quad (1.273)$$

где мы опускаем все индексы при соответствующих величинах а V_{12}, V_{31}, V_{23} — интегральные (в импульсном пространстве) операторы.

Тогда легко видеть, что для системы тождественных частиц система трех уравнений Фаддеева сводится к одному уравнению:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{k}, \mathbf{p}) &= -\frac{m}{k^2 + \frac{3p^2}{4} + m\varepsilon_b} \times \\ &\times \int \left[t\left(\mathbf{k}, -\mathbf{q}_1; \varepsilon_B - \frac{3p^2}{4m}\right) \Psi(\mathbf{q}_2, \mathbf{p}') + t\left(\mathbf{k}, \mathbf{q}_1; \varepsilon_B - \frac{3p^2}{4m}\right) \Psi(-\mathbf{q}_2, \mathbf{p}') \right] d\mathbf{p}' \end{aligned} \quad (1.274)$$

где

$$\mathbf{q}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{p} + \mathbf{p}', \quad \mathbf{q}_2 = \mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{p}' \quad (1.275)$$

2 Волновая функция дейтрона

2.1 Введение

Дейтрон, простейшая система связанных нуклонов, представляет связанное состояние протона и нейтрона. Нейтрон, подобно протону, является фермионом, но не имеет электрического заряда и слегка (на ~ 1.3 MeV) тяжелее протона. Если исключить электромагнитное взаимодействие, все частицы образующие т.н. *изотопический мультиплет* (в нашем случае p и n) будут вырождены по массе. В действительности мир не является изоспин-инвариантным и массы p и n слегка различаются. Энергия связи дейтрона (аналогичная 13.6 eV в атоме водорода) равна 2.2 MeV. Масса протона равна $m_p = 938.27$ MeV, масса нейтрона $m_n = 939.56$ MeV, поэтому вместе (но на некотором расстоянии друг от друга !) протон и нейтрон имеют массу 1877.93 MeV, на 2.2 MeV больше чем масса дейтрона $m_d = 1875.6$ MeV. Когда протон и нейтрон сближаются, чтобы образовать дейтрон, они высвобождают энергию 2.2 MeV которая уносится фотоном. Возбужденные состояния дейтрона а также связанные состояния двух протонов или двух нейтронов отсутствуют.

2.2 Центральный потенциал

Предположим что дейтрон описывается центральным потенциалом $U(r)$. Уравнение Шредингера имеет вид

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2\mu} \Delta + U(r) \right] \psi(r) = \varepsilon_d \psi(r), \quad (2.1)$$

где $\varepsilon_d = m_d - m_p - m_n < 0$ энергия связи дейтрона и приведенная масса μ равна

$$\mu = \frac{m_p m_n}{m_p + m_n} = \frac{m}{2}. \quad (2.2)$$

В дальнейшем используем значение $m = 940$ MeV и $\hbar^2/m = 41.47$ MeV · fm. Мы предполагаем выполнение условий $R > \hbar/mc$ и $U_0 < mc^2$, необходимых для описания взаимодействия частиц с помощью потенциальной ямы. Введем новую функцию $u(r)$, где

$$\psi_d(r) = \frac{u(r)}{r}. \quad (2.3)$$

Уравнение Шредингера для S-состояния имеет вид

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{m}{\hbar^2} (\varepsilon_d - U(r)) \right] u(r) = 0 \quad (2.4)$$

$$u(0) = u(\infty) = 0. \quad (2.5)$$

Как известно из теории линейных дифференциальных уравнений уравнение (2.4) имеет решение удовлетворяющее граничным условиям (2.5) только для дискретных значений параметра энергии называемых собственными значениями.

Для грубой оценки рассмотрим потенциал в форме прямоугольной ямы

$$U(r) = -U_0 \quad r \leq R \quad U(r) = 0 \quad r > R \quad (2.6)$$

Глубина U_0 и ширина R прямоугольной ямы, описывающей нейтрон-протонное взаимодействие, могут быть определены различными способами, например, из измерения энергии связи и зарядового радиуса дейтрона. Последний определяется из наклона дифференциального сечения упругого электрон-дейтронного рассеяния при малых переданных импульсах. Решение уравнения (2.4) описанное практически во всех учебниках квантовой механики получается из условия непрерывности логарифмической производной $u'(r)/u(r)$ при $r = R$. Это условие приводит к трансцендентному уравнению для энергии связи ε_d :

$$\cot \left(\sqrt{m(U_0 + \varepsilon_d)} R \right) = -\frac{\sqrt{|\varepsilon_d|}}{\sqrt{U_0 + \varepsilon_d}}, \quad \varepsilon_d \leq 0. \quad (2.7)$$

Предположим что

$$U_0 \gg |\varepsilon_d| \quad (2.8)$$

Тогда получим из (2.7)

$$\sqrt{m U_0} \frac{R}{\hbar} \approx \frac{\pi}{2}. \quad (2.9)$$

Используя $R = 1.7 \text{ fm}$, получаем $U_0 = 35 \text{ MeV}$, что согласуется с нашим предположением (2.8). Вне области действия ядерных сил, *т.е.* при $r > R$,

$$u(r) = \sqrt{2\alpha} \exp(-\alpha r), \quad (2.10)$$

where

$$\alpha = \sqrt{-\frac{m\varepsilon_d}{\hbar^2}} \approx 4.3 \text{ fm}^{-1}. \quad (2.11)$$

2.3 Необходимое условие существования связанного уровня. Условие Баргмана

Как следует из (2.9), связанное состояние в потенциале прямоугольной ямы впервые появляется, когда

$$V_0 = \frac{\pi^2}{4} \frac{\hbar^2}{mR^2}. \quad (2.12)$$

Аналогичное условие можно получить и в случае произвольного потенциала $V(r)$. Для $l = 0$ это условие, впервые полученное Иостом и Пайсом, имеет вид

$$I = \int_0^\infty V(r) r dr \geq 1 \quad (2.13)$$

В общем случае произвольных n и l это условие имеет вид

$$n(2l + 1) \geq I \quad (2.14)$$

Приведем вывод этого неравенства, предложенный Ю.Швингером в 1960 г. Заменим $V(r)$ на $\lambda V(r)$ и будем увеличивать λ от 0 до 1. При таком увеличении в потенциале последовательно возникают связанные состояния. Пусть i -е связанное состояние возникает при $\lambda = \lambda_i$, тогда $\lambda < \lambda < \lambda_n < 1 < \lambda_n < 1 < \lambda_{n+1}$. Тогда уравнение (???) для нулевой энергии $E = 0$ эквивалентно интегральному уравнению

$$\chi_l(r) = \lambda \int_0^\infty dr' g_l(r, r') |V(r)| \chi_l(r'),$$

где

$$g_l(r, r') = \frac{1}{2l + 1} r_{<}^{l+1} r_{>}^{-l}, \quad r_{<} = \min(r, r'), \quad r_{>} = \max(r, r') \quad (2.15)$$

После замены

$$\Phi_l = |V|^{1/2} \chi_l \quad K_{l,l'} = |V(r)|^{1/2} g_{ll'} |V(r')|^{1/2} \quad (2.16)$$

получаем уравнение с симметричным ядром

$$\int_0^\infty K_l(r, r') \Phi_l(r') dr' = \lambda^{-1} \Phi_l(r) \quad (2.17)$$

Но след оператора равен сумме его собственных значений, откуда находим

$$\int_0^\infty K_l(r, r) dr = \frac{1}{2l + 1} \int_0^\infty |V(r)| r dr = \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{\lambda_i} > \sum_{i=1}^{n_l} \frac{1}{\lambda_i} > \sum_{n_l}^\infty \frac{1}{\lambda_i} > \sum_{n_l}^{n_l} 1 = n_l, \quad (2.18)$$

Таблица 2: Мезоны, включенные в ОБЕР

J^P	мезон	Спиновые структуры в ОБЕР
0^+	σ	$\hat{\mathbf{1}}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$
0^-	π, η, η'	S_{12}
1^-	ρ, ω, ϕ	$\hat{\mathbf{1}}, \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2, S_{12}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$

т.е. мы получили формулу (2.13) Это условие необходимо, но еще не достаточно для существования связанного состояния. Если притягивающий потенциал ($V(r) < 0$) является монотонной функцией ($V'(r) > 0$), то известно еще одно необходимое условие, полученное Ф.Калоджеро

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sqrt{-V(r)} dr \geq 1 \quad (2.19)$$

Знак равенства достигается для потенциала в виде прямоугольной ямы.

2.4 Волновые функции в приближении нулевого радиуса

Благодаря множителю $\sqrt{2\alpha}$ функция (2.10), отвечающая нулевому радиусу действия сил, имеет правильную нормировку

$$\int_0^\infty u^2(r) dr = 1 \quad (2.20)$$

Однако эта функция не удовлетворяет граничному условию $u(0) = 0$. Чтобы удовлетворить этому условию можно использовать, например, волновую функцию для потенциала Хюльтена

$$V(r) = -V_0 (e^{\beta r} - 1)^{-1} \quad (2.21)$$

Выражение (2.21) имеет кулоновскую особенность при $r = 0$ и экспоненциально спадает при $r \rightarrow \infty$. Для S-состояния с энергией связи $-\alpha^2/m$

$$u(r) = \sqrt{2\alpha \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) \left(1 + 2\frac{\alpha}{\beta}\right)} e^{-\alpha r} (1 - e^{-\beta r}) \quad (2.22)$$

Асимптотически волновая функция (2.22) ведет себя как (2.10), но нормировочный коэффициент усилен множителем

$$\sqrt{\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) \left(1 + 2\frac{\alpha}{\beta}\right)} \approx 1 + \frac{3}{2} \frac{\alpha}{\beta} \quad \left(\frac{\alpha}{\beta} \ll 1.\right) \quad (2.23)$$

В общем случае этот множитель можно записать в не зависящем от формы потенциала виде

$$\sqrt{\frac{1}{1 - \alpha r_0}},$$

где r_0 эффективный радиус в триплетном 3S_1 состоянии.

Дейтронная волновая функция вне области действия ядерных сил спадает очень медленно. В экспоненциальной асимптотике $e^{-\alpha r}$ типичное расстояние, на котором падает волновая функция равно $\alpha^{-1} = 4.3 \text{ fm}$, что много больше радиуса действия ядерных сил $r_0 \sim 1 \text{ fm}$. В результате протон и нейтрон, которые образуют дейтрон, большую часть времени проводят вне ямы. Мы можем убедиться в этом непосредственно, используя в качестве примера волновые функции для потенциала прямоугольной ямы. Действительно, вычислим вероятности W_1 и W_2 того, частица находится "внутри ямы" (т.е. в области $r < R$) и "вне ямы" ($r > R$) ($W_1 + W_2 = 1$). Для W_2 получаем

$$W_2 = (1 + \alpha R)^{-1} \left(1 - \frac{\alpha^2}{V_0}\right) \quad (2.24)$$

Пренебрегая α^2 по сравнению с V_0 и считая, что $\sqrt{V_0} R \approx \pi/2$, получим

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\alpha^2}{V_0}} \quad (2.25)$$

Поэтому для дейтронной волновой функции можно использовать т.н. приближение нулевого радиуса действия (ядерных) сил (по крайней мере для тех процессов которые не чувствительны к малым расстояниям), в котором волновая функция хорошо аппроксимируется своим асимптотическим выражением (2.10). Это позволяет решать многие задачи, связанные с дейтроном, используя достаточно простые вычисления, которые в фольклоре англоязычной литературы часто называются *back-of-the-envelope calculations*.

В заключение этого раздела отметим, что триплетная нейтрон-протонная функция континуума при нулевой энергии (импульсе) может быть записана в виде

$$\psi_t(r) = 1 - \frac{a_t}{r}, \quad (2.26)$$

где $a_t = 5.42 \text{ fm}$ триплетная длина рассеяния. Триплетное сечение рассеяния при нулевой энергии равно $\sigma_t = 4\pi a_t^2 = 3.66 \text{ б}$. Аналогичное выражение для синглетной функции имеет вид

$$\psi_s(r) = 1 - \frac{a_s}{r}. \quad (2.27)$$

Синглетная длина рассеяния отрицательна и велика по модулю $a_s = -23.7 \text{ fm}$. Это означает что существует очень мелкое виртуальное 1S_0 состояние, которое объясняет большую величину синглетного сечения рассеяния при нулевой энергии, $\sigma_s = 4\pi a_s^2 = 70.46 \text{ б}$.

Более точное выражение для волновой функции непрерывного спектра получается при учете относительных импульсов p малых по сравнению с $1/r_0$, но сравнимых по абсолютной величине с $1/|a_{t,s}|$. В этом случае

$$\psi_{t,s}(r) = \frac{\sin pr}{pr} - \frac{a_{t,s}}{1 + ip a_{t,s}} \frac{e^{ipr}}{r}. \quad (2.28)$$

Задачи

1. Показать, что длина рассеяния для потенциала прямоугольной ямы радиуса R и глубины V_0 равна

$$a = \left(1 - \frac{\tan \alpha}{\alpha}\right) R, \quad \alpha^2 = 2\mu V_0 R^2.$$

Проверить, что разложение длины рассеяния a по степеням α

$$a = \left(\frac{1}{3}\alpha^2 + \frac{2}{15}\alpha^4 + \dots\right) R, \quad \alpha \ll 1$$

совпадает с разложением теории возмущений, полученном с использованием первой и второй итерации уравнения ЛШ.

2. Проверить выражения (2.26, 2.28)

3. Рассмотрим вклад Е1 перехода в сечение фотодизинтеграции дейтрона $\gamma + d \rightarrow pn$ при малых энергиях. Дипольный матричный элемент равен

$$\langle {}^3P | \mathbf{r} | {}^3S \rangle = -4 \sqrt{\frac{2\alpha}{1 - \alpha r_0}} \frac{\mathbf{p}}{p^2 + \alpha^2},$$

где r_0 триплетный эффективный радиус. В этом матричном элементе доминируют большие расстояния, на которых асимптотика волновой функции $\sim \exp(-\alpha r)/r$ модифицируется только через нормировочный коэффициент. Показать, что соответствующий вклад в сечение равен

$$\sigma = \frac{8\pi\alpha}{3} \frac{\alpha p^3}{(1 - \alpha r_0)(p^2 + \alpha^2)^3}$$

Поправка, связанная с r_0 не пренебрежимо мала и составляет ~ 20

2.5 Тензорные силы

Опыт показывает, что дейтрон обладает квадрупольным моментом. По данным Раби и др. квадрупольный момент равен $Q = +(2.73 \pm 0.05) \times 10^{-27} \text{ см}^2$ (положительный знак Q означает, что распределение заряда "вытянуто" вдоль направления общего спина дейтрона). Отсюда следует, что основное состояние дейтрона не может описываться чистой S волной, а представляет суперпозицию S волны и высших парциальных волн, отвечающих отличным от нуля моментам количества движения. Такое состояние может возникнуть только в том случае, если ядерные силы не являются чисто центральными. Эти силы должны зависеть не только от расстояния между частицами, но и от ориентации спинов нейтрона и протона относительно радиуса-вектора, их соединяющего. Учет таких сил, которые называются *тензорными* силами, дает возможность не только объяснить существование ненулевого квадрупольного момента дейтрона, но также тот факт, что магнитный момент дейтрона несколько отличается от суммы магнитных моментов протона и нейтрона, см. разделы 2.9, 2.10.

Гамильтониан системы двух частиц со спином $1/2$ может содержать спиновые операторы $\boldsymbol{\sigma}_1$ и $\boldsymbol{\sigma}_2$ только в двух комбинациях

$$\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2, \quad S_{12} = 3 \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^2} - \boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2, \quad (2.29)$$

где σ_1 и σ_2 - матрицы Паули и \mathbf{r} - вектор расстояния между ними. Операторы (2.29) имеют следующее замечательное свойство: любая целая положительная степень каждого из них может быть представлена в виде линейной комбинации самих этих операторов и единичной матрицы. Чтобы убедиться в этом, отметим прежде всего соотношение

$$(\sigma_1 \sigma_2)^2 = 3 - 2\sigma_1 \sigma_2, \quad (2.30)$$

которое следует из тождества для символов Кронекера

$$\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\epsilon} = \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\epsilon} - \delta_{\alpha\epsilon}\delta_{\beta\gamma} \quad (2.31)$$

Другие возможные комбинации, линейные по σ_1 и σ_2 сводятся к S_{12} and $\sigma_1 \cdot \sigma_2$, например,

$$(\sigma_1 \times \hat{\mathbf{r}}) \cdot (\sigma_2 \times \hat{\mathbf{r}}) = \sigma_1 \cdot \sigma_2 - (\sigma_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\sigma_2 \cdot \hat{\mathbf{r}}). \quad (2.32)$$

В частности, легко проверить, что

$$\sigma_1 \sigma_2 \cdot S_{12} = S_{12} \cdot \sigma_1 \sigma_2 = S_{12} \quad (2.33)$$

и

$$S_{12}^2 = 6 - 2S_{12} + 2\sigma_1 \sigma_2. \quad (2.34)$$

Эти два свойства нам пригодятся в дальнейшем.

Оператор S_{12} в (2.36) является единственным скалярным оператором, который линеен по σ_1 и σ_2 и содержит четные степени \mathbf{r} ¹⁸. Член $\sigma_1 \sigma_2$ обесперивает равенство нулю среднего значения S_{12} по всем направлениям в конфигурационном пространстве, что удобно при дальнейших вычислениях. Рассмотрим уравнение (2.1), в котором потенциал является теперь суммой центрального и тензорного потенциалов

$$V(\mathbf{r}) = V_C(r) + S_{12}V_T(r), \quad (2.35)$$

где

$$S_{12} = 3(\sigma_1 \cdot \mathbf{r})(\sigma_2 \cdot \mathbf{r}) - \sigma_1 \sigma_2. \quad (2.36)$$

Оператор S_{12} известен как *тензорный оператор*, поскольку в конфигурационном пространстве он является тензором второго ранга. Этот оператор является также тензором в спиновом пространстве двух нуклонов. Два тензора свертываются так, чтобы образовать скаляр S_{12} в комбинированном спиновом и конфигурационном пространстве¹⁹. Из за своей тензорной структуры в координатном пространстве оператор S_{12} смешивает состояния с различными орбитальными угловыми моментами. Он сохраняет, однако, полный угловой момент $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$.

Введем в рассмотрение вектор общего спина системы

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (2.37)$$

Тогда операторы $\sigma_1 \cdot \sigma_2$ и S_{12} можно представить в виде

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = 2\mathbf{S}^2 - 3 \quad (2.38)$$

¹⁸Это свойство необходимо для того, чтобы тензорный потенциал сохранял четность.

¹⁹Отметим, что уравнение (2.36) имеет ту же спиновую зависимость, что и взаимодействие двух магнитных моментов.

Таблица 3: Классификация триплетных состояний.

J	$P = +1$	$P = -1$
0		3P_0
1	${}^3S_1 + {}^3D_1$	3P_2
2	3D_2	${}^3P_2 + {}^3F_2$
3	${}^3D_2 + {}^3G_2$	3F_2

и

$$S_{12} = 6(\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})^2 - 2\mathbf{S}^2 \quad (2.39)$$

Используя эти формулы, мы непосредственно убеждаемся в том, что оператор \mathbf{S}^2 коммутирует с операторами $\sigma_1 + \sigma_2$ и S_{12} . Это означает, что \mathbf{S}^2 представляет собой константу движения. Поэтому систему, состоящую из нейтрона и протона, можно характеризовать значениями квантовых чисел J и S .

Отметим еще, что собственное значение $\sigma_1 \cdot \sigma_2$ в триплетном состоянии равно $+1$, а в синглетном -3 , а собственные состояния оператора S_{12} равны $2, 2, -4$ и в сумме равны нулю.

В синглетном состоянии сохраняется орбитальный момент L . Поэтому синглетные состояния характеризуются значениями L . Триплетные состояния характеризуются значением полного момента J и значениями L , совместимыми с общими правилами сложения моментов. Четность состояния равна $(-1)^L$. В Таблице 2.5 приведена классификация нескольких первых триплетных состояний.

2.6 Спин-угловые функции

Определим три состояния двух-нуклонной системы со спином 1

$$\chi_{+1} = \alpha_1\alpha_2, \quad \chi_0 = \frac{\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1}{\sqrt{2}}, \quad \chi_{-1} = \beta_1\beta_2, \quad (2.40)$$

где α и β - паулиевские спиноры описывающие состояния нуклона со спином $\frac{1}{2}$ с проекцией спина вверх и вниз, соответственно. Введем спин-угловые функции Φ_{JML}

$$\Phi_{JML} = \sum_{M_L=-L}^{M_L=+L} C_{LM_L 1M_S}^{JM} Y_{LM_L} \chi_{M_S}, \quad (2.41)$$

где $C_{LM_L 1M_S}^{JM}$ - коэффициент Клебша-Гордона для полного углового момента J , связывающий орбитальный угловой момент L (которому отвечают сферические гармоники Y_{LM_L}) со спином 1. Возможные значения L равны

$$L = J, \quad \text{or} \quad L = J \pm 1. \quad (2.42)$$

Для дейтрона $J = 1$ и $L = 0$ или 2 . В этом случае функции Φ_{1ML} имеют вид

$$\Phi_{1M0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\chi_M, \quad (2.43)$$

$$\Phi_{112} = \sqrt{\frac{1}{10}}Y_{20}(\theta, \varphi)\chi_1 - \sqrt{\frac{3}{10}}Y_{21}(\theta, \varphi)\chi_0 + \sqrt{\frac{3}{5}}Y_{22}(\theta, \varphi)\chi_{-1}, \quad (2.44)$$

$$\Phi_{102} = \sqrt{\frac{3}{10}}Y_{2-1}(\theta, \varphi)\chi_1 - \sqrt{\frac{2}{5}}Y_{20}(\theta, \varphi)\chi_0 + \sqrt{\frac{3}{10}}Y_{21}(\theta, \varphi)\chi_{-1}, \quad (2.45)$$

$$\Phi_{1-12} = \sqrt{\frac{3}{5}}Y_{2-2}(\theta, \varphi)\chi_1 - \sqrt{\frac{3}{10}}Y_{2-1}(\theta, \varphi)\chi_0 + \sqrt{\frac{1}{10}}Y_{20}(\theta, \varphi)\chi_{-1}. \quad (2.46)$$

Функции (2.41) образуют ортонормированный набор функций, зависящих от спиновых переменных (и отвечающих полному спину 1) и функций, зависящих от угловых переменных $\hat{\mathbf{r}}$ (и отвечающих угловому моменту L). Для заданного J

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_L \frac{u_L(r)}{r} \Phi_{JML}. \quad (2.47)$$

The normalization condition of $\psi(\mathbf{r})$ requires that the radial functions $u_L(r)$ satisfy

$$\sum_L \int_0^\infty u_L^2(r) dr = 1. \quad (2.48)$$

Подставив (2.47) в (??), получим радиальное уравнение Шредингера

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} u_L(r) + \frac{m}{\hbar^2} \left[E - \frac{\hbar^2}{mr^2} L(L+1) - V_C(r) \right] u_L(r) - \\ - \frac{m}{\hbar^2} V_T(r) \sum_{L'} S_{JLL'} U_{L'}(r) = 0, \end{aligned} \quad (2.49)$$

where

$$S_{JLL'} = \int (\Phi_{JML} | S_{12} | \Phi_{JML'}) d\Omega. \quad (2.50)$$

Используя стандартную технику алгебры угловых моментов, получаем

$$S_{JLL'} = \frac{2}{\sqrt{6}} \hat{L} \hat{L}' (-1)^{J+1} C_{L0L'0}^{20} W(LL'11; 2J) = 2 \left[\delta_{LL'} - 3C_{J010}^{L0} C_{J010}^{L'0} \right], \quad (2.51)$$

где $W(LL'11; 2J)$ - т.н. коэффициенты Рака. Явные выражения для $S_{JLL'}$ показаны в таблице are shown в Таблице 4.

Таблица 4: Значения коэффициентов $S_{JLL'}$ в уравнении (2.51).

$L' \setminus L$	$J + 1$	J	$J - 1$
$J + 1$	$-2 \frac{J+2}{2J+1}$	0	$6 \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1}$
J	0	+2	0
$J - 1$	$6 \frac{\sqrt{J(J+1)}}{2J+1}$	0	$-2 \frac{J-1}{2J+1}$

2.7 Уравнение Шредингера для тензорного потенциала

Мы уже отмечали, что доминирующей конфигурацией дейтрона является состояние 3S_1 . Тензорные силы могут подмешивать к этому состоянию только конфигурацию 3D_1 , поэтому волновая функция дейтрона может быть записана в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{u(r)}{r} \Phi_{1M0} + \frac{w(r)}{r} \Phi_{1M2}, \quad (2.52)$$

где мы немного изменили обозначения радиальной волновой функции, чтобы избежать нижних индексов

$$u(r) = u_0(r), \quad w(r) = u_2(r). \quad (2.53)$$

Условие нормировки для 3S_1 и 3D_1 компонент имеет вид

$$\int_0^{\infty} [u^2(r) + w^2(r)] dr = 1, \quad (2.54)$$

где

$$P_D = \int_0^{\infty} w^2 dr$$

- вероятность 3D_1 состояния. Используя Таблицу 4) получаем

$$S_{120} = S_{102} = \sqrt{8}, \quad S_{122} = -2,$$

Подставив эти значения в (2.47), получаем систему связанных уравнений для функций $u(r)$ и $w(r)$

$$\frac{d^2}{dr^2} u(r) + m [E - V_C(r)] u(r) - 2\sqrt{8}\mu V_T(r) w(r) = 0, \quad (2.55)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} w(r) + m \left[E - \frac{6}{mr^2} - V_C(r) + 2V_T(r) \right] w(r) - 2\sqrt{8}m V_T(r) u(r) = 0. \quad (2.56)$$

2.8 Представление Рариты-Швингера

Функция $\psi(\mathbf{r})$ в уравнении (2.47) может быть также записана в несколько другом виде

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left[\frac{u(r)}{r} + \sqrt{\frac{1}{8}} S_{12} \frac{w(r)}{r} \right] \chi_M, \quad (2.57)$$

впервые предложенном Раритой и Швингером в 1941 году [16].

Покажем, что второй член в (2.57) и в самом деле описывает правильно нормированное состояние с $J = 1$ и $L = 2$. Сначала заметим, что спиновые функции χ_M принадлежат трехмерному представлению группы вращений в спиновом пространстве и преобразуются при вращении в спиновом пространстве по векторному представлению с $S = 1$. Поскольку оператор S_{12} инвариантен при объединенном вращении спина и координат, именно три спин-угловые функции функции $S_{12} \chi_M$ преобразуются по представлению с полным моментом $J = 1$, *m.e.* описывают триплетное состояние $J = 1$. Все что нам остается - это показать, что функции $S_{12} \chi_M$ описывают D состояние.

Заметим, что если функция, зависящая от углов ϑ, φ и умноженная на r^L (L целое), удовлетворяет уравнению Лапласа, то она описывает состояние с орбитальным моментом L . Поэтому достаточно проверить, что

$$\Delta r^2 S_{12} \chi_M = 0.$$

Для этого подставим явное выражение для S_{12} , тогда получим

$$\Delta(3\boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{r} - r^2 \boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2) \chi_M = (6\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2 - 6\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2) \chi_M = 0.$$

Поэтому функция $S_{12} \chi_M$ действительно описывает 3D_1 состояние с полным моментом $J = 1$. Покажем, что эта функция правильно нормирована, т.е. что

$$\int d\Omega \langle \chi_M | S_{12}^2 | \chi_M \rangle = 1. \quad (2.58)$$

Для этого используем (2.34) и заметим, что

$$\int d\Omega S_{12} = 0. \quad (2.59)$$

Поскольку среднее значение оператора $\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2$ в триплетном состоянии равно 1, интеграл равен 8, что доказывает правильную нормировку. Сравнивая (??) и (2.44) - (2.46) получаем

$$\sqrt{\frac{1}{8}} S_{12} \chi_M = \Phi_{1M2}, \quad (2.60)$$

где спин-угловые функции Φ_{1M2} определены в (2.43)-(2.45).

2.9 Магнитный момент дейтрона

Если бы дейтрон представлял *чистое* S состояние, его магнитный момент μ_d равнялся бы сумме магнитных моментов μ_p and μ_n . В действительности, μ_d равен $\mu_p + \mu_n$ только

приближенно. Это означает, что существует небольшой вклад в μ_d , связанный с орбитальным движением протона и нейтрона. В то же время известно что дейтрон имеет ненулевой квадрупольный момент $Q_d = 2.82 \pm 0.01$ mb. Оказывается что для описания Q_d необходимо учесть примесь к доминирующему вкладу S-волны небольшую примесь D-волны, см. раздел ???. Тогда, как впервые заметили Рарита и Швингер, экспериментальные значения μ_d и Q_d можно одновременно воспроизвести, если приписать небольшую примесь D волны к доминирующей 3S_1 конфигурации

$$\psi_d = 0.98 |{}^3S_1\rangle + 0.2 |{}^3D_1\rangle, \quad (2.61)$$

в которой вероятность 3D_1 состояния составляет $\sim 4\%$.

В единицах ядерного магнетона $e\hbar/2m_p$, магнитный дипольный оператор ядра записывается в виде

$$\boldsymbol{\mu} = \sum_{k=1}^A \left[\frac{1}{2} (1 + \tau_3) \mathbf{r} \times \mathbf{p} + \frac{1}{2} (1 + \tau_3) K_p \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} (1 - \tau_3) K_n \boldsymbol{\sigma} \right]_k, \quad (2.62)$$

где K_p и K_n магнитные моменты протона и нейтрона, $K_p \approx 2.793$, $K_n \approx -1.913$, \mathbf{p}_k оператор импульса k -го нуклона и τ_3 третья компонента изотопических матриц Паули, которая удовлетворяет уравнениям

$$\tau_3 |p\rangle = |p\rangle \quad \text{and} \quad \tau_3 |n\rangle = -|n\rangle.$$

Таким образом $\frac{1}{2} (1 + \tau_3)$ и $\frac{1}{2} (1 - \tau_3)$ проекционные операторы для протона и нейтрона, соответственно. Эти уравнения вставлены в уравнение поскольку только протоны вносят вклад в магнитный момент ядра посредством своего орбитального движения.

Экспериментальное значение магнитного момента дейтрона (в единицах ядерного магнетона) равно

$$K_d = 0.857406 = K_p + K_n - 0.022209,$$

The difference can be understood as a simple consequence of the reduced amount of the 3S_1 ground state of the deuteron occasioned by the admixture of a small percentage of a 3D_1 state.

В системе центра масс протона и нейтрона $\mathbf{r}_p = \frac{1}{2} \mathbf{r}$, $\mathbf{r}_n = -\frac{1}{2} \mathbf{r}$, $\mathbf{p}_p = -\mathbf{p}_n = \mathbf{p}$, и уравнение (2.62) дает

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_d = & \frac{1}{2} (K_p + K_n) (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2) + \frac{1}{4} (K_p - K_n) (\tau_{1z} + \tau_{2z}) (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2) \\ & + \frac{1}{4} (K_p - K_n) (\tau_{1z} - \tau_{2z}) (\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} (\tau_{1z} + \tau_{2z}) \right) [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Протон и нейтрон в дейтроне находятся в симметричном спиновом состоянии, действуя на которое антисимметричный оператор $\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2$ дает ноль. Множитель $\tau_{1z} + \tau_{2z}$, действуя на изосинглетное дейтронное состояние, также дает ноль. Поэтому

$$\boldsymbol{\mu}_d = \frac{1}{2} (K_p + K_n) (\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2) + \frac{1}{2} \mathbf{L}, \quad (2.64)$$

где \mathbf{L} оператор орбитального углового момента. Мы можем ввести оператор полного углового момента $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)$, в терминах которого уравнение (2.64) записывается в виде

$$\boldsymbol{\mu}_d = (K_p + K_n)\mathbf{J} - (K_p + K_n - \frac{1}{2})\mathbf{L}. \quad (2.65)$$

По определению *магнитный момент дейтрона* определяется как среднее значение оператора μ_d по состоянию $|J, M = J\rangle$. Поэтому

$$\mu_d = (K_p + K_n) - (K_p + K_n - \frac{1}{2}) \int_0^\infty w^2(r) dr \int \Phi_{112}^* L_3 \Phi_{112} d\Omega \quad (2.66)$$

Интеграл по $d\Omega$ вычисляется с использованием спин-угловых функций (2.43)

$$\int \Phi_{112}^* L_3 \Phi_{112} d\Omega = 2 \times \frac{3}{5} + 1 \times \frac{3}{10} + 0 \times \frac{1}{10} = \frac{3}{2} \quad (2.67)$$

Поэтому

$$\mu_d = (K_p + K_n) - \frac{3}{2}(K_p + K_n - \frac{1}{2})P_D, \quad (2.68)$$

где

$$P_D = \int_0^\infty w^2(r) dr \quad (2.69)$$

вероятность нахождения дейтрона в D состоянии. From уравнения Eq. (2.68) получаем

$$P_D = -\frac{2}{3} \frac{K_d - (K_p + K_n)}{K_p + K_n - \frac{1}{2}} \approx 0.039, \quad (2.70)$$

Таким образом, дейтрон проводит в D состоянии приблизительно 4% времени, что согласуется с утверждением в разделе 2.1. Это утверждение, основанное на статических моментах, должно быть, однако немного подправлено с учетом *i*) возможного вклада мезонов, которыми обмениваются нуклоны и *ii*) релятивистскими поправками. Все вместе дает поправку к P_D порядка 0.01 ± 0.01), так что окончательная оценка равна $P_D = 3 \pm 1\%$.

2.10 Квадрупольный момент дейтронов

Взаимодействие ядерной системы с внешним электромагнитным током $A_\mu(\mathbf{r}) = (A_0(\mathbf{r}), \mathbf{A}(\mathbf{r}))$ описывается выражением

$$\mathcal{H}' = \int j_\mu(\mathbf{r}) A_\mu(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int (\rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) - \mathbf{j}(\mathbf{r})\mathbf{A}(\mathbf{r})) d\mathbf{r}. \quad (2.71)$$

где $j_\mu(\mathbf{r})$ - оператор тока ядра, а $A_\mu(\mathbf{r})$ оператор внешнего электромагнитного поля. В первом приближении можно считать, что все заряды в ядре локализованы на Z точечных протонах. Тогда

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^A e_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k), \quad (2.72)$$

где $e_k = +e$ для протонов ($k = 1, 2, \dots, Z$), и $e_k = 0$ для нейтронов ($k = Z+1, Z+2, \dots, A$). Матричный элемент взаимодействия (2.71) взятый между начальным состоянием $|i\rangle$ включающем ядро в состоянии i конечным состоянием ядра $|f\rangle$ с ядром в состоянии f равен

$$\langle f | \mathcal{H}' | i \rangle = \int \langle f | j_\mu(\mathbf{r}) | i \rangle A_\mu(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (2.73)$$

В длинноволновом пределе $kR \ll 1$, где k волновое число компоненты электромагнитного поля и R ядерный радиус можно разложить поля вокруг источника центром в ядерной системе координат, который мы выберем в системе центра масс ядра. Так как ядра малы, мы можем оставить в этом разложении только несколько членов. Положим

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(0) + (\mathbf{r} \cdot \nabla)\varphi(0) + \frac{1}{2}(\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \cdot \nabla))\varphi(0) + \dots \quad (2.74)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(0) + (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{A}(0) + \dots, \quad (2.75)$$

где подразумевается, что производные действуют на функции и в конечном итоге вычисляются в начале координат. В этом приближении,

$$E_{\text{stat}} = q\varphi(0) - \mathbf{D} \mathbf{E}(0) - \boldsymbol{\mu} \mathbf{H}(0) - \frac{1}{6} Q'_{ij} (\nabla)_i E_j(0), \quad (2.76)$$

где статические константы - полный заряд q , и дипольный момент \mathbf{D} , магнитный момент $\boldsymbol{\mu}$ и электрический квадрупольный момент Q'_{ij} определены интегралами

$$\begin{aligned} q &= \int \langle i | \rho(\mathbf{r}) | i \rangle d\mathbf{r}, & \mathbf{D} &= \int \langle i | \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) | i \rangle d\mathbf{r}, \\ \boldsymbol{\mu} &= \frac{1}{2c} \int \mathbf{r} \times \langle i | \mathbf{j}(\mathbf{r}) | i \rangle d\mathbf{r}, & Q'_{ij} &= \int 3x_i x_j \langle i | \rho(\mathbf{r}) | i \rangle d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (2.77)$$

Внешние Электрическое и магнитное поля определены выражениями

$$\mathbf{E}_0 = \left(-\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)_{\mathbf{r}=0}, \quad (2.78)$$

и

$$\mathbf{H}_0 = (\nabla \times \mathbf{A})_{\mathbf{r}=0}, \quad (2.79)$$

Заметим, что электрическое поле удовлетворяет уравнению

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(0) = 0 \quad (2.80)$$

поэтому вместо Q'_{ij} можно использовать в (2.76) тензор с нулевым шпуром

$$Q_{ij} = \int (3x_i x_j - \delta_{ij} r^2) \langle f | \rho(\mathbf{r}) | i \rangle d\mathbf{r}. \quad (2.81)$$

Квадрупольный момент ядра A определяется уравнением ??). Используя это уравнение, получим в статическом случае

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= e \sum_{k=1}^Z \int \Psi_{JM}^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A) [3x_i x_j - \delta_{ij} r^2]_k \\ &\quad \times \Psi_{JM}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_A) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \dots d\mathbf{r}_A \end{aligned} \quad (2.82)$$

где Ψ_{JM} волновая функция состояния $|f\rangle$.

При пространственных вращениях тензор Q_{ij} преобразуется как симметричный тензор второго ранга с нулевым следом. Этот тензор выражается через симметричный тензор второго ранга δ_{ij} и единственный вектор, выражающий свойства ядра как целого, а именно, его угловой момент \mathbf{J} . Поэтому

$$\langle JJ_z | Q_{ij} | JJ_z \rangle = eC \langle JJ_z | 3 \frac{\hat{J}_i \hat{J}_j + \hat{J}_j \hat{J}_i}{2} - \delta_{ij} \hat{\mathbf{J}}^2 | JJ_z \rangle, \quad (2.83)$$

Ядерная динамика заключена в константе C . Ядерный квадрупольный момент определяется $i = j = 3$ компонентой выражения (2.86) с $J_z = J$.

$$Q = \frac{1}{e} \int \Psi_{JJ}^* \sum_{k=1}^Z (3z^2 - r^2) |\Psi_{JJ} \mathbf{dr}_1 \mathbf{dr}_2 \dots \mathbf{dr}_A \quad (2.84)$$

Из (2.86), (2.84) получаем

$$Q = \frac{C}{e} J(2J - 1). \quad (2.85)$$

Для ядра со спином J получаем

$$\langle JJ_z | Q_{ij} | JJ_z \rangle = \frac{eC}{J(2J - 1)} \langle JJ_z | 3 \frac{\hat{J}_i \hat{J}_j + \hat{J}_j \hat{J}_i}{2} - \delta_{ij} \hat{\mathbf{J}}^2 | JJ_z \rangle, \quad (2.86)$$

Для дейтрона $J = 1$ и потому существует ненулевой квадрупольный момент, который определяется квадрупольным взаимодействием в (?). Можно выписать явное выражение для Q в терминах волновой функции в уравнении (2.52). В системе центра масс $\mathbf{r}_p = \frac{1}{2} \mathbf{r}$, where $\mathbf{r} = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_n$. Поэтому квадрупольный оператор равен

$$\frac{1}{4}(3z^2 - r^2) = \frac{1}{4}(3 \cos^2 \vartheta - 1) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{3}} \pi r^2 Y_{20}(\vartheta, \varphi). \quad (2.87)$$

Используя это выражение вместе с выражением (2.44), в котором нужно положить $J = J_z = 1$, мы получаем

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{10} \int_0^\infty \left(u(r) w(r) - \frac{1}{\sqrt{8}} w^2(r) \right) r^2 dr. \quad (2.88)$$

3 Нуклон-нуклонный потенциал

В 1935 г Юкава предположил, что взаимодействие между двумя нуклонами возникает при обмене мезонами. Его теория представляла обобщение идей квантовой электродинамики, в которой сила, действующая между заряженными частицами, описывается в терминах обмена фотонами. Принцип неопределенности в квантовой механике означает, что радиус силы возникающей при обмене мезоном с массой m равен \hbar/mc , поэтому π -мезон, легчайший в природе мезон приводит к силам наибольшего радиуса $\hbar/m_\pi c = 1.4 \text{ fm}$).

Нуклон гораздо тяжелее пиона. Поэтому при вычислении потенциала однопионного обмена между нуклонами можно пренебречь их отдачей т.е. считать нуклоны бесконечно тяжелыми. Гамильтониан взаимодействия должен быть скаляром в пространстве двух нуклонов и содержать волновую функцию пиона, поэтому мы должны построить псевдоскаляр в пространстве двух нуклонов с которым связывается поле псевдоскалярного пиона. Если пренебречь эффектами отдачи, мы имеем в своем распоряжении единственный псевдовекторный оператор $\boldsymbol{\sigma}$ в спиновом пространстве двух нуклонов и векторный оператор $-i\nabla$ действующий на пионную волновую функцию. Используя эти два оператора мы записываем Гамильтониан взаимодействия в виде

$$H' = \frac{f}{m_\pi} \sum_{i=1}^2 \int d\mathbf{r} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \boldsymbol{\tau}_i (\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \nabla) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}) \quad (3.1)$$

где \mathbf{r}_i - координата i -го нуклона ($i=1,2$) и $\boldsymbol{\tau}_i$ - три изоспиновые матрицы. Пионная функция $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r})$ является вектором в изоспиновом пространстве²⁰. Так как H' есть скаляр в изоспиновом пространстве нуклон-нуклонное взаимодействие зарядово-независимо.

Если мы рассматриваем пионное поле как *классическое поле*, то мы должны потребовать чтобы пионная функция удовлетворяла уравнению Клейна-Гордона с источником. В статическом пределе зависящая от времени часть оператора Клейна-Гордона обращается в ноль и мы получаем

$$(\Delta - m_\pi^2) \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}) = \frac{f}{m_\pi} \sum_{i=1}^2 \boldsymbol{\tau}_i (\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \nabla_i) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (3.2)$$

где каждый нуклон действует как фиксированный точечный источник в правой части уравнения (3.2).

Чтобы вычислить нуклон-нуклонный потенциал мы вначале вычислим пионное поле, образованное нуклоном 2, рассматриваемом как источник в (3.2). Затем, используя (3.1), мы вычислим энергию взаимодействия нуклона 1 с этим пионным полем. Результат интерпретируется как энергия взаимодействия двух нуклонов, которая обусловлена их последовательным взаимодействием с пионным полем. Эта энергия отождествляется с *потенциалом 1-пионного обмена* (ОПЕР), который мы обозначим как $V_{\text{ОПЕР}}$.

Решение уравнения (3.2) с частицей 2, действующей как источник, легко найти.

²⁰Три зарядовых состояния пиона, π^+ , π^- and π^0 , отвечают трем сферическим компонентам этого вектора.

Выражение для $\Delta - \mu^2$ получается из (A.25) подстановкой $k \rightarrow im_\pi$

$$(\Delta - m_\pi^2) \frac{e^{-m_\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \quad (3.3)$$

Тогда

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{f}{4\pi m_\pi} \boldsymbol{\tau}_2 (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \nabla_2) \frac{e^{-m_\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_2|}. \quad (3.4)$$

Это выражение и следует отождествить с потенциалом 1-пионного обмена. После вычисления производных получаем

$$V_{\text{ОРЕР}} = \frac{1}{3} m_\pi \left(\frac{f^2}{4\pi} \right) (\boldsymbol{\tau}_1 \boldsymbol{\tau}_2) \times \left(\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2 + S_{12} \left[1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} \right] \right) \frac{e^{-x}}{x}, \quad (3.5)$$

где $x = m_\pi r$, $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, и S_{12} определен в разделе 2. При записи уравнения (3.5) мы должны добавить член вида

$$V'_{\text{ОРЕР}} = -\frac{4\pi}{3 m_\pi^2} \left(\frac{f^2}{4\pi} \right) (\boldsymbol{\tau}_1 \boldsymbol{\tau}_2) (\boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2) \delta(\mathbf{r}), \quad (3.6)$$

который возникает поскольку при $\mathbf{r} = 0$

$$(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \nabla_1) (\boldsymbol{\sigma}_2 \nabla_2) \frac{1}{r} = -\sigma_{1i} \sigma_{2j} \nabla_i \nabla_j \frac{1}{r} = \frac{4}{3} \pi \sigma_{1i} \sigma_{2j} \delta_{ij} \delta(\mathbf{r}) = \frac{4}{3} \pi \boldsymbol{\sigma}_1 \boldsymbol{\sigma}_2 \delta(\mathbf{r}). \quad (3.7)$$

Этот член вносит вклад только в S -waves. Однако, However, ОРЕР в основном применим для высших парциальных волн, поэтому в большинстве применений член (3.6) может быть опущен.

Вывод уравнения (3.5) основывался на теории возмущений. Теория возмущений, строго говоря, здесь не применима, поскольку пионы сильно взаимодействуют с нуклонами. Стандартная точка зрения заключается в том, что потенциал ОРЕР справедлив для *больших* расстояний $r \gtrsim 1/2m_\pi$, для которых мезоны с массами, большими чем m_π , не вносят вклада. Или, эквивалентно, ОВЕР может быть применен для описания состояний с высшими парциальными волнами, скажем, для состояний с $l \gtrsim 4$. Поэтому ОРЕР может быть особенно полезен для проверки стабильности результатов фазового анализа, если потребовать, что $a_{\text{fрs}}$ с достаточно большими l должны совпадать со своими ОРЕР значениями.

Результат, аналогичный уравнению можно получить в теории, в которой пионное поле рассматривается не как классическое поле, а как квантованное. Результат, равно как и рассматриваемая при этом физика, не меняется.

Теория Юкавы может быть обобщена за рамки ОРЕР. Это можно сделать, рассматривая обмен другими бозонами, отличными от пиона; получающиеся при этом потенциалы образуют класс *потенциалов 1-бозонного обмена* (ОВЕР). В качестве иллюстрации мы приводим в Таблице 5 спиновые структуры потенциалов ОВЕР, отвечающие обмену бозонами с различными спинами и четностями.

В заключение отметим, что при феноменологическом описании нуклон-нуклонного потенциала основную роль традиционно играет член, отвечающий обмену скалярным и изоскалярным мезоном, σ -мезоном, с массой 500–600 MeV. Этот обмен отвечает наибольшему притяжению в центральной части потенциала. Однако, следует заметить,

Таблица 5: Мезоны, включенные в ОВЕР

J^P	мезон	Спиновые структуры в ОВЕР
0^+	σ	$\hat{\mathbf{1}}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$
0^-	π, η, η'	S_{12}
1^-	ρ, ω, ϕ	$\hat{\mathbf{1}}, \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2, S_{12}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$

что то время как остальные обмены мезонами ($\rho, \omega, \phi, \eta, \eta'$ мезонами) скоррелированы с массами мезонных резонансов, наблюдаемых в мезонных спектрах, σ -мезон продолжает оставаться загадкой. Этот мезон не наблюдается в мезонных спектрах и не имеет ясной интерпретации в терминах кварков и глюонов в КХД.

Рис. 4.1 показывает типичный нуклон-нуклонный потенциал, который воспроизводит 1S_0 фазу нуклон-нуклонного рвсесия вплоть до энергии порядка 300 МэВ в лабораторной системе. Этот потенциал характеризуется притягивающим "хвостом обусловленным π -мезонным обменом, притяжением на промежуточных расстояниях и сильным короткодействующим отталкиванием на малых расстояниях (эта часть потенциала обычно называется ядерным кором). subsection*Problem Показать, что синглетная

фаза для потенциала 1-пионного обмена равна

$$\delta_L(k) = \frac{g^2 m_\pi^2}{32\pi k E} \boldsymbol{\tau}_1 \boldsymbol{\tau}_2 Q_l \left(1 + \frac{m_\pi^2}{2k^2}\right),$$

где константа g (так называемая *псевдоскалярная* константа связи) связана с *псевдовекторной* константой f в (3.1) соотношением $g = (2m/m_\pi)f$, и $Q_l(z)$ — функции Лежандра второго рода

$$Q_l(z) = \frac{1}{2} \int_1^{+1} \frac{P_l(x)}{z-x} dx.$$

Первые несколько функций $Q_l(z)$ равны

$$Q_0(z) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+z}{1-z} \right),$$

$$Q_1(z) = \frac{z}{2} \ln \left(\frac{1+z}{1-z} \right) - 1, \quad Q_2(z) = \frac{3z^2 - 1}{4} \ln \left(\frac{1+z}{1-z} \right) - \frac{3z}{2}.$$

4 Спиновые и изоспиновые функции в системе трех фермионов

4.1 Группа перестановок S_3

Вначале напомним несколько фактов относящихся к группе перестановок. Группа перестановок - это конечная группа G элементами которой являются различные композиции перестановок. Любая перестановка является произведением транспозиций. Удобное обозначение, которое явно указывает положения занимаемые элементами группы до и после перестановки использует $2 \times n$ матрицу где первая строка есть $1, 2, \dots, n$ а вторая строка указывает положение элементов после перестановки. Например перестановка которая переставляет элементы 1 и 2 и ставляет элемент 3 неизменным может быть записана в виде

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Группа перестановок S_3 состоит из $3! = 6$ элементов: тождественного элемента

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

трех нечетных перестановок

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad P_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

и двух четных (циклических) перестановок

$$P_{12}P_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{12}P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.2 Спиновые функции

Полный спин в системе трех фермионов равен $S = \frac{3}{2}$ или $\frac{1}{2}$. Этот спин сохраняется в отсутствие тензорного взаимодействия хотя спин данной пары в общем случае не сохраняется. Для $S = 3/2$ имеется 4 функции $\chi_{\frac{3}{2}}^{\mu}$

$$\begin{aligned} \chi_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}(12; 3) &= \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \\ \chi_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}(12; 3) &= \frac{\alpha_1 \alpha_2 \beta_3 + \alpha_1 \beta_2 \alpha_3 + \beta_1 \alpha_2 \beta_3}{\sqrt{3}} & \chi_{\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}}(12; 3) &= \frac{\alpha_1 \beta_2 \beta_3 + \beta_1 \alpha_2 \beta_3 + \beta_1 \beta_2 \alpha_3}{\sqrt{3}} \\ , \quad \chi_{\frac{3}{2}}^{-\frac{3}{2}}(12; 3) &= \beta_1 \beta_2 \beta_3, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где α_i and β_i Паулиевские спиноры, описывающие состояние нуклона i со спином вверх и со спином вниз. Эти функции полностью симметричны

$$\chi_{\frac{3}{2}}^{\mu}(12; 3) = \chi_{\frac{3}{2}}^{\mu}(31; 2) = \chi_{\frac{3}{2}}^{\mu}(23; 1), \tag{4.2}$$

Складывая три спина $\frac{1}{2}$ мы получаем всего 8 состояний $2 \times 2 \times 2 = 8$. Квартетное $S = \frac{3}{2}$ состояние 4-кратно вырождено, дублетное the $S = \frac{1}{2}$ состояние вырождено 2-кратно, что в сумме дают только 6 спиновых функций. Мы потеряли таким образом 2 собственные функции. Причина заключается в том, что для дублетного состояния $S = \frac{1}{2}$ на самом деле имеется 2 промежуточные связи трех спинов:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \mathbf{0} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \quad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \quad (4.3)$$

Поэтому мы имеем 2 типа функций со спином $\frac{1}{2}$

$$\chi_{1/2}^a(12; 3) = \frac{\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2}{\sqrt{2}} \alpha_3 \quad (4.4)$$

$$\chi_{1/2}^s(12; 3) = \frac{(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) \alpha_3 - 2\alpha_1\alpha_2\beta_3}{\sqrt{6}} \quad (4.5)$$

для $m_S = \frac{1}{2}$, и

$$\chi_{1/2}^a(12; 3) = \frac{\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2}{\sqrt{2}} \beta_3 \quad (4.6)$$

$$\chi_{1/2}^s(12; 3) = \frac{(\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) \beta_3 - 2\beta_1\beta_2\alpha_3}{\sqrt{6}} \quad (4.7)$$

для $m_S = -\frac{1}{2}$. Записывая $\chi_{1/2}^s(12; 3)$ и $\chi_{1/2}^a(12; 3)$ в виде столбца

$$\begin{pmatrix} \chi_{1/2}^a(12; 3) \\ \chi_{1/2}^s(12; 3) \end{pmatrix}$$

мы получаем

$$P_{12} \begin{pmatrix} \chi_{1/2}^a(12; 3) \\ \chi_{1/2}^s(12; 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{1/2}^a(21; 3) \\ \chi_{1/2}^s(21; 3) \end{pmatrix} = \Lambda_{12} \begin{pmatrix} \chi_{1/2}^a(12; 3) \\ \chi_{1/2}^s(12; 3) \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

$$P_{23} \begin{pmatrix} \chi_{1/2}^a(12; 3) \\ \chi_{1/2}^s(12; 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{1/2}^a(13; 2) \\ \chi_{1/2}^s(13; 2) \end{pmatrix} = \Lambda_{23} \begin{pmatrix} \chi_{1/2}^a(12; 3) \\ \chi_{1/2}^s(12; 3) \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

$$P_{13} \begin{pmatrix} \chi_{1/2}^a(12; 3) \\ \chi_{1/2}^s(12; 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{1/2}^a(32; 1) \\ \chi_{1/2}^s(32; 1) \end{pmatrix} = \Lambda_{13} \begin{pmatrix} \chi_{1/2}^a(12; 3) \\ \chi_{1/2}^s(12; 3) \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

где Λ_{12} , Λ_{23} , Λ_{13} являются 2×2 матрицами

$$\Lambda_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_{23} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \Lambda_{13} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Заметим, что детерминант матриц Λ_{ij} равен -1 . Для перестановок $(123) \rightarrow (312) = P_{12}P_{13}$ and $(123) \rightarrow (231) = P_{12}P_{23}$ получаем

$$\begin{pmatrix} \chi_{1/2}^a(31; 2) \\ \chi_{1/2}^s(31; 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{1/2}^a(12; 3) \\ \chi_{1/2}^s(12; 3) \end{pmatrix} = \Lambda_{12} \Lambda_{13} \begin{pmatrix} \chi_{1/2}^a(12; 3) \\ \chi_{1/2}^s(12; 3) \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

$$\begin{pmatrix} \chi_{\frac{1}{2}}^a(23; 1) \\ \chi_{\frac{1}{2}}^s(23; 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{\frac{1}{2}}^a(12; 3) \\ \chi_{\frac{1}{2}}^s(12; 3) \end{pmatrix} = \Lambda_{12} \Lambda_{23} \begin{pmatrix} \chi_{\frac{1}{2}}^a(12; 3) \\ \chi_{\frac{1}{2}}^s(12; 3) \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Функции

$$\begin{pmatrix} \chi'(12, 3) \\ \chi''(12, 3) \end{pmatrix}.$$

образуют так называемое *смешанное* представление группы перестановок S_3 .

4.3 Изоспин. Изоспиновые функции

Изоспин T является квантовщй характеристикой адронов, связанной с зарядовой независимостью ядерных сил. Исторически она была предложена Гейзенбергом сразу после открытия нейтрона для объяснения очень маленькой разницы масс p и n :

$$\frac{m_p - m_n}{m_n} \sim 10^{-3}$$

Если выключить (слабое) электромагнитное взаимодействие, то $m_p = m_n$, таким образом, сильные взаимодействия протона и нейтрона не зависят от их заряда. В этом и состоит смысл симметрии сильных взаимодействий - т.н. *изотопическая инвариантность*. Нейтрон и протон можно рассматривать как изоспиновый дублет: два состояния одной частицы - нуклона - с одним и тем же значением изоспина $T = 1/2$, но с разными значениями проекции изоспина $T_3 = \pm 1/2$. Вектор изоспина определен в изоспиновом (зарядовом) пространстве и при вращениях в этом пространстве ведет себя так же, как вектор обычного спина.

Подобно протону и нейтрону существующие в природе адроны можно разбить на группы, в каждую из которых входят частицы с примерно равными массами и одинаковыми внутренними характеристиками: спином, барионным зарядом, странностью, за исключением электрического заряда. Такие группы называются изотопическими мультиплетами. Сильное взаимодействие для всех частиц, входящих в один и тот же изотопический мультиплет, одинаково, т. е. не зависит от их электрического заряда. Простейший пример частиц, которые могут быть объединены в один изотопический мультиплет, Ч это протон и нейтрон. Другие примеры изотопических мультиплетов - это изотопические триплеты: π -мезоны (π^+ , π^0 , π^-) и Σ -гипероны (Σ^+ , Σ^0 , Σ^-). Электрический заряд Q частицы, входящей в изотопический мультиплет, выражается через барионный заряд B и странность S ²¹ формулой Гелл-Мана Ч Нишиджимы:

$$Q = \frac{B}{2} + \frac{S}{2} + T_3 \quad (4.14)$$

Здесь B – барионный заряд, S – странность, а величина T_3 пробегает (с интервалом в единицу) все значения от некоторого максимального значения I (целого или полуцелого) до минимального, равного $T_3 : T_3 = T, T-1, \dots, T$. Общее число значений, которые может принимать величина T_3 (и тем самым Q) для данного изотопического мультиплета, а следовательно, и число частиц в изотопическом мультиплете, равно $2I + 1$. Величина I , называется изотопическим спином, а величина T_3 Ч кпроекцией изотопического спина. Эти названия основаны на формальной математической аналогии с

²¹одинаковые для всех частиц в данном изотопическом мультиплете

обычным спином частиц, поскольку, согласно квантовой механике, для частиц со спином J проекция спина на произвольное направление в пространстве может принимать через единицу значения от $+J$ до J , т. е. иметь $2J + 1$ значений. Так как нуклоны существуют в двух зарядовых состояниях, то для них (как и для всех других частиц, входящих в изотопические дублеты) $2T + 1 = 2$, т. е. $T = 1/2$ а T_3 может принимать два значения: $+1/2$ для протона (что соответствует $Q = +1$, так как у нуклонов барионный заряд $B = 1$, а странность $S = 0$) и $1/2$ для нейтрона ($Q = 0$). Изотопическому триpletу пионов соответствует $T = 1$, а T_3 равно $+1$ для π^+ , 0 для π и -1 для π^- . Частицы с $T = 0$ не имеют изотопических партнеров и являются изотопическими синглетами; к таким частицам относятся, например, гипероны Λ^0 и Ω^- . Изотопический спин является, таким образом, важной характеристикой адрона T квантовым числом, показывающим, какое количество изотопических партнеров имеет данная частица (другими словами, в каком числе зарядовых состояний она может находиться). На основе изотопической инвариантности удастся предсказать существование, массу и заряды новых частиц, если известны их изотопические партнеры. Так было предсказано существование π , Σ , Ξ по известным π^+ , π , Σ^+ , Σ^- .

Изотопическая инвариантность имеет место и для составных систем из адронов, в частности для атомных ядер. Изотопический спин сложной системы складывается из изотопических спинов входящих в систему частиц, при этом сложение производится по тем же правилам, что и для обычного спина. Так, система из двух частиц с изотопическими спинами $1/2$ (например, нуклон) и 1 (например, π -мезон) может иметь изотопический спин $I = 1 + 1/2 = 3/2$ или $I = 1 - 1/2 = 1/2$. В ядрах изотопическая инвариантность проявляется в существовании уровней энергии с одинаковыми квантовыми числами для различных изобарных состояний (т. е. для ядер, содержащих одинаковое число нуклонов и отличающихся электрическим зарядом). Примером служат ядра $^{14}_6\text{N}$, $^{14}_7\text{N}$, $^{14}_8\text{O}$: основное состояние ядер $^{14}_6\text{N}$ и первое возбужденное состояние $^{14}_7\text{N}$ образуют изотопический триплет с $T = 1$. Все квантовые числа этих уровней одинаковы, а различие в их энергиях можно объяснить разницей электростатических энергий из-за различия в электрических зарядах этих ядер. (Основной уровень $^{14}_8\text{O}$ имеет изотопический спин $I = 0$, поэтому у него нет аналогов в ядрах $^{14}_6\text{C}$ и $^{14}_7\text{N}$.)

Из изотопической инвариантности следует закон сохранения полного изотопического спина T в процессах, обусловленных сильными взаимодействиями. Этот закон приводит к определенным соотношениям между вероятностями процессов для различных частиц, входящих в одинаковые изотопические мультиплеты, а также к запрету некоторых реакций [например, реакция $d + d \rightarrow ^4\text{He} + \pi$ не может происходить за счет сильных взаимодействий, так как для дейтрона и ^4He $T = 0$, а для π -мезона $T = 1$. Экспериментальной проверке такого рода предсказаний было посвящено много работ на ускорителях заряженных частиц. Изотопическая инвариантность имеет место только для сильных взаимодействий и нарушается электромагнитным взаимодействием (явно зависящими от электрических зарядов частиц), сила которых по порядку величины составляет примерно $1/137$ от сильных взаимодействий.

Трехнуклонные ядра ^3H и ^3He также представляют изодублет. Поэтому для их описания можно использовать дублет 3-частичных изоспиновых функций $\zeta_{1,2}^s, \zeta_{1,2}^a$ с $T = 1/2$

$$\begin{pmatrix} \zeta_{1/2}^a(12, 3) \\ \zeta_{1/2}^s(12, 3) \end{pmatrix}.$$

аналогичных спиновым функциям в уравнениях (4.11)–(4.13), которые строятся из изотопических Паулиевских спиноров

$$\alpha = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix}$$

и при перестановках частиц преобразуются точно так же, как спиновые функции в уравнениях (4.4)–(4.7)

Аналогичным образом можно ввести 4 *спин-изоспиновых* функций, отвечающих полному спину $S = \frac{1}{2}$ и изотопическому спину $T = \frac{1}{2}$

$$\xi^a = \frac{\chi' \zeta'' - \chi'' \zeta'}{\sqrt{2}}, \quad \xi^s = \frac{\chi' \zeta' + \chi'' \zeta'}{\sqrt{2}}, \quad \xi' = \frac{\chi' \zeta'' + \chi'' \zeta'}{\sqrt{2}}, \quad \xi'' = \frac{\chi' \zeta' - \chi'' \zeta''}{\sqrt{2}} \quad (4.15)$$

$$\Psi = \psi_s \xi_a - \psi_a \xi_s + \psi' \xi'' - \psi'' \xi', \quad {}^3He, {}^3H, \quad (4.16)$$

Если теперь ввести 4 координатные функции: полностью симметричную ψ_s , полностью антисимметричную ψ_a и 2 функции $\psi' \psi''$, преобразующиеся по смешанному представлению группы перестановок S_3 , то функцию Ψ , полностью антисимметричную при перестановках обычных, спиновых и изоспиновых координат, можно записать в виде:

$$\Psi = \psi_s \xi_s + \psi_a \xi_a + \psi' \xi' + \psi'' \xi'', \quad (4.17)$$

Такая запись удобна при рассмотрении 3-нуклонного изодублета ядер ${}^3H, {}^3He$, а также изосинглета 4He .

4.3.1 Сверхтонкое расщепление в КХД

В атомной физике сверхтонкое взаимодействие представляет слабое магнитное взаимодействие между электроном и ядром. Это взаимодействие приводит к сверхтонкому расщеплению атомных и молекулярных уровней. В кварк-адронной физике аналогичное взаимодействие приводит к расщеплению масс $\Lambda(1115)$ и $\Sigma(1190)$. Оба этих барионы содержат одни и те же кварки uds , но $\Lambda(1115)$ является синглетом, а $\Sigma(1190)$ триплетом. Следовательно дикварк ud в $\Lambda(1115)$ находится в изотриплетном состоянии, а в $\Sigma(1190)$ - в триплетном. В кварковой модели предполагается, что масса адронов определяется не зависящим от спина массовым членом и сверхтонким взаимодействием

$$M = \sum_i m_i + \Delta E_{HF}, \quad (4.18)$$

где

$$\Delta E_{HF} = \frac{4}{9} \alpha_s \sum_{i < j} \frac{\sigma_i \sigma_j}{m_i m_j} \langle \delta(\mathbf{r}_{ij}) \rangle. \quad (4.19)$$

We use the basis in which a heavy quark is singled out as quark 3 but in which the light quarks are still antisymmetrized. The calculation of the spin matrix elements in (4.19) is straightforward for $J = 3/2$, as the expectation value of each $\sigma_i \sigma_j$ is 1. For $J = 1/2$ $\sigma_1 \sigma_2 = 1$, $\sigma_3 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_3 = -2$ for Σ_q and Ξ'_q while for Ξ_q $\sigma_1 \sigma_2 = -3$, $\sigma_3 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_3 = 0$.

The contact interaction in (4.19) requires the calculation of the δ function expectation values. These contact probabilities are calculated using 3-body wave functions.

5 Магнитные моменты барионов в аддитивной кварковой модели

Магнитные моменты барионов содержат информацию об отклике системы связанных кварков на слабое внешнее магнитное поле. Мы рассмотрим нерелятивистскую кварковую модель, в которой барионы описываются кварковым Гамильтонианом

$$\mathcal{H} = H_0 + V, \quad (5.1)$$

где H_0 - нерелятивистский оператор кинетической энергии,

$$H_0 = \sum_a \frac{p_a^2}{2m_a}, \quad (5.2)$$

V —сумма не зависящего от спина струнного потенциала

$$V_Y(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = \sigma r_{min} \quad (5.3)$$

и кулоновского потенциала

$$V_C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = -C_F \sum_{i<j} \frac{\alpha_s}{r_{ij}}, \quad (5.4)$$

возникающего из 1-глюонного обмена. В уравнении (5.4) $C_F = 2/3$ - цветовой фактор. Мы выписали явные выражения для V_Y и V_C только для полноты изложения; их явный вид для нас не существует.

Чтобы вычислить магнитный момент бариона, мы вводим векторный потенциал \mathbf{A} и вычисляем сдвиг энергии ΔM_B , обусловленный гамильтонианом

$$\mathcal{H} = H(\mathbf{A}), \quad (5.5)$$

где \mathcal{H} определяется уравнением (5.5) с заменой $\mathbf{p}_a \rightarrow \mathbf{p}_a - e_a \mathbf{A}_a$ и

$$H_\sigma = - \sum_a \frac{e_a \sigma_a}{2m_a}, \quad (5.6)$$

где \mathbf{B} —внешнее магнитное поле. Оператор магнитного момента из вклада спинов конститюэнтных кварков μ_S , которые образуют барион, и углового момента 3-кварковой системы μ_L , в котором выделено движение центра масс. Непосредственное вычисление, использующее калибровку Лондона $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} \times \mathbf{r})$, приводит к выражению

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_S + \hat{\mu}_L. \quad (5.7)$$

Рассматривая конститюэнтные кварки как Дираковские нерелятивистские точечные частицы, для спиновой части $\hat{\mu}$ в уравнении (5.7) получаем

$$\hat{\mu}_S = \sum_a \frac{e_a \sigma_a}{2m_a}. \quad (5.8)$$

Орбитальный вклад в уравнении (5.7) равен

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_L = \sum_a \frac{e_a}{2m_a} \mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a. \quad (5.9)$$

В дальнейшем вместо процедуры, обсуждавшейся в предыдущем разделе и которая заключалась в антисимметризации волновой функции по всем трем кваркам, мы антисимметризуем 3-кварковую волновую функцию только по переменным кварков с одинаковым зарядом (u или d). Другими словами, для протона мы используем спиновую функцию uud , в которой d кварк имеет индекс 3, а кваркам uu отвечает антисимметричная по переменным 1, 2 волновая функция. Аналогично, для нейтрона используем функцию, в которой u -кварк имеет индекс 3. В терминах переменных Якоби

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\sqrt{2}}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}_3}{\sqrt{6}} \quad (5.10)$$

уравнение (5.9) имеет вид

$$\boldsymbol{\mu}_L = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)\mathbf{l}_\rho + \frac{1}{6}(\mu_1 + \mu_2 + 4\mu_3)\mathbf{l}_\lambda + \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{2\sqrt{3}}(\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{p}_\lambda + \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{p}_\rho), \quad (5.11)$$

где

$$\mathbf{l}_\rho = \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{p}_\rho, \quad \mathbf{l}_\lambda = \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{p}_\lambda \quad (5.12)$$

и где магнитные моменты кварков равны

$$\mu_a = \frac{e_a}{2m_a}. \quad (5.13)$$

Отметим, что магнитные моменты в уравнении (5.13) выражены в кварковых магнетонах. Чтобы выразить их в ядерных магнетонах выражение (5.13) нужно умножить на m_N/m_a .

По определению, магнитный момент μ бариона со спином J есть математическое ожидание оператора $\hat{\mu}^z$ для состояния с $M_z = J$

$$\mu = \langle JJ | \hat{\mu}_z | JJ \rangle = \langle JJ | \hat{\mu}_S^z + \hat{\mu}_L^z | JJ \rangle. \quad (5.14)$$

В частности, для состояния с полным угловым моментом $\mathbf{L} = 0$

$$\begin{aligned} \mu &= \mu_{spin}^{\frac{1}{2}} = \langle \frac{1^+1}{2} \frac{1}{2} \left| \sum_a \frac{e_a \sigma_{az}}{2m_a} \right| \frac{1^+1}{2} \frac{1}{2} \rangle = \\ &= \langle \chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\lambda \left| \sum_a \frac{e_a}{2m_a} \right| \chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\lambda \rangle = \frac{1}{3}(2\mu_1 + 2\mu_2) - \frac{1}{3}\mu_3, \end{aligned} \quad (5.15)$$

где $\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\lambda$ - дублетная спиновая функция, симметричная при перестановке $1 \leftrightarrow 2$. Значения магнитных моментов, вычисленных по этим формулам, приведены в Таблице 6. Конституэнтные массы легких кварков взяты из работы [?]. Экспериментальные значения магнитных моментов взяты из данных PDG [18].

Таблица 6: Baryon magnetic moments of $J^P = \frac{1}{2}^+$ baryons

Baryon	ω_q	ω_s	μ_u	μ_d	μ_s	μ	Expt.
p	0.408		1.53	-0.77		2.29	2.79
n	0.408		1.53	-0.77		-1.53	-1.91
Λ	0.414	0.453	1.51	-0.76	-0.69	-0.69	-0.61
Σ^+	0.414	0.453	1.51	-0.76	-0.69	2.23	2.46
Σ^0	0.414	0.453	1.51	-0.76	-0.69	0.80	0.83
Σ^-	0.414	0.453	1.51	-0.76	-0.69	-0.91	-1.16
Ξ^0	0.419	0.458	1.485	-0.742	-0.75	-1.40	-1.25
Ξ^-	0.419	0.458	1.689	-0.845	-0.75	-0.50	-0.65
Ω^-		0.463			-0.671	-2.01	-2.02

For the $\frac{3}{2}^+$ baryons one obtains

$$\mu_{\Delta^{++}} = 3\mu_u = 4.575\mu_N, \quad (5.16)$$

other moments are

$$\mu_{\Delta^+} = 2\mu_u + \mu_d = \frac{3}{2} \mu_{\Delta^{++}}, \quad \mu_{\Delta^0} = 0, \quad \mu_{\Delta^-} = 3\mu_d = -\frac{1}{2} \mu_{\Delta^{++}}. \quad (5.17)$$

До сих пор только магнитный момент $\Delta^{++}(1232)$ был измерен в реакции $\pi^+p \rightarrow \gamma\pi^+p$ с результатом $\mu_{\Delta^{++}} \sim 3.7 - 7.5 \mu_N$ [?]. Неопределенность в экспериментальном результате возникает из погрешности теоретического анализа этой реакции.

Волновая функция $\frac{1}{2}^-$ резонанса представляет суперпозицию двух спиновых состояний с орбитальным моментом $l = 1$ и со спином $S = 1/2$ и $S = 3/2$ ²².

$$|S_{11}(1535)\rangle = \cos\vartheta |^2P_{1/2}\rangle - \sin\vartheta |^4P_{1/2}\rangle$$

$$|S_{11}(1650)\rangle = \sin\vartheta |^2P_{1/2}\rangle + \cos\vartheta |^4P_{1/2}\rangle,$$

²²Эти состояния принадлежат 70-мерному представлению группы SU(6).

где угол смешивания ϑ определяется величиной сверхтонкого спинового взаимодействия между конститюэнтными кварками. Здесь используются стандартные спектроскопические обозначения $|^{2S+1}P_{1/2}\rangle$, где $S = 1/2, 3/2$ полный спин в системе трех кварков и символ P означает состояние с орбитальным угловым моментом $L = 1$. Спин-угловые функции равны

$$\begin{aligned} |^2P_{1/2}\rangle = & \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} Y_{11}(\boldsymbol{\lambda}) \chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^\lambda - \sqrt{\frac{1}{3}} Y_{10}(\boldsymbol{\lambda}) \chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\lambda \right) + \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} Y_{11}(\boldsymbol{\rho}) \chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^\rho - \sqrt{\frac{1}{3}} Y_{10}(\boldsymbol{\rho}) \chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^\rho \right), \end{aligned} \quad (5.18)$$

and

$$\begin{aligned} |^4P_{1/2}\rangle = & \sqrt{\frac{1}{2}} Y_{1-1}(\boldsymbol{\lambda}) \chi_{\frac{3}{2}\frac{3}{2}}^s - \\ & \sqrt{\frac{1}{3}} Y_{10}(\boldsymbol{\lambda}) \chi_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}}^s + \sqrt{\frac{1}{6}} Y_{11}(\boldsymbol{\lambda}) \chi_{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}^s \end{aligned} \quad (5.19)$$

где $\chi_{\frac{1}{2}m_s}^\lambda$ и $\chi_{\frac{1}{2}m_s}^\rho$ введенные в разделе 4 спиновые функции, симметричные и антисимметричные при перестановке двух спинов $1 \leftrightarrow 2$ соответственно. Заметим, что конститюэнтные массы легких кварков в $1/2^-$ нуклонах зависят от типа возбуждения углового момента и отличаются для $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ возбуждений. Однако эта зависимость не значительна и не превышает 2%. В дальнейшем для орбитальных возбуждений $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ нуклонов с отрицательной четностью мы используем общее значение $\omega_q = 0.457$ GeV.

Непосредственное вычисление приводит к результату ²³.

$$\begin{aligned} \mu(S_{11}^+(1535)) = & \mu(^2P_{1/2}^+) \cos^2 \vartheta + \mu(^4P_{1/2}^+) \sin^2 \vartheta \\ -2 \langle ^2P_{1/2}^+ | \mu_S^z | ^4P_{1/2}^+ \rangle \sin \vartheta \cos \vartheta = & 1.24 \mu_N \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} \mu(S_{11}^+(1650)) = & \mu(^2P_{1/2}^+) \sin^2 \vartheta + \mu(^4P_{1/2}^+) \cos^2 \vartheta \\ +2 \langle ^2P_{1/2}^+ | \mu_S^z | ^4P_{1/2}^+ \rangle \sin \vartheta \cos \vartheta = & -0.33 \mu_N \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \mu(S_{11}^0(1535)) = & \mu(^2P_{1/2}^0) \cos^2 \vartheta + \mu(^4P_{1/2}^0) \sin^2 \vartheta \\ -2 \langle ^2P_{1/2}^0 | \mu_S^z | ^4P_{1/2}^0 \rangle \sin \vartheta \cos \vartheta = & -0.84 \mu_N \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \mu(S_{11}^0(1650)) = & \mu(^2P_{1/2}^0) \cos^2 \vartheta + \mu(^4P_{1/2}^0) \sin^2 \vartheta \\ -2 \langle ^2P_{1/2}^0 | \mu_S^z | ^4P_{1/2}^0 \rangle \sin \vartheta \cos \vartheta = & 0.744 \mu_N \end{aligned} \quad (5.23)$$

²³Индексы $+, 0$ относятся к заряду $\frac{1}{2}^-$ состояний.

Таблица 7: Магнитные моменты $J^P = \frac{1}{2}^-$ nucleons. $\omega_q = 0.457$ GeV

	$S_{11}^+(1535)$	$S_{11}^0(1535)$	$S_{11}^+(1650)$	$S_{11}^0(1650)$
Кварковая модель	1.24	-0.84	0.12	0.74
Решеточные вычисления	-1.8	-1.0		

where

$$\mu(^2P_{1/2}^+) = \frac{2}{9}\mu_u + \frac{1}{9}\mu_d = 0.23\mu_N, \quad (5.24)$$

$$\mu(^4P_{1/2}^+) = \mu_u + \frac{1}{3}\mu_d = 1.14\mu_N \quad (5.25)$$

and

$$\langle ^4P_{1/2}^+ | \mu_z | ^2P_{1/2}^+ \rangle = \frac{4}{9}(\mu_u - \mu_d) = 0.91\mu_N \quad (5.26)$$

Используя феноменологическое значение $\cos\theta = -0.22$ [19], получаем результаты, приведенные в Таблице 7. Результаты вычисления магнитных моментов нуклонов с отрицательной четностью, полученные другими методами, сильно различаются. В качестве иллюстрации в Таблице 7 приведены магнитные моменты $S_{11}^+(1535)$ и $S_{11}^0(1535)$, полученные с помощью расчетов в решеточной КХД [20]. Результаты отличаются не только по величине, но и по знаку. Дальнейшие измерения магнитных моментов нуклонов с отрицательной четностью будет иметь важные следствия для понимания структуры нуклонов.

6 Метод полевых корреляторов и свойства барионов.

6.1 Эффективный кварковый гамильтониан

История непертурбативных вакуумных глюонных полей в КХД начинается с введения конденсатов в методе правил сумм [28], где впервые была получена оценка глюонного конденсата $G_2 = -\frac{\alpha_s}{\pi} \langle F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \rangle = 0.012 \text{ GeV}^2$. Высшие конденсаты и другие вакуумные средние локальных операторов были рассмотрены в работе [?]. Однако, для понимания непертурбативной динамики КХД вакуума важно знать и другую его характеристику - корреляционную длину глюонных полей λ_g , которая определяет нелокальность глюонных корреляций. Эта величина играет важную роль в феноменологии адронов. Строгое определение корреляционной длины было дано в работе в рамках метода полевых корреляторов (МПК). Решеточные измерения λ_g приводят к весьма малым значениям $\lambda_g \sim 0.15 - 0.3 \text{ fm}$.

В этом разделе мы кратко опишем методологию вычисления характеристик 3-кварковых систем в методе полевых корреляторов (МПК). В этом методе кварковая динамика определяется корреляторами глюонного поля, которые ответственны

за конфайнмент кварков. Метод был предложен Ю.А.Симоновым, который использовал представление Фейнмана – Швингера для пропагаторов кварков во внешнем глюонном поле и вывел уравнения для адронных функций Грина, из которых можно непосредственно вычислить барионные спектры и другие характеристики барионов. В приложениях использовалось струнное приближение в КХД, которое отвечает пределу малой корреляционной длины T_g полевых корреляторов.

Применение метода полевых корреляторов (МПК) дает новое обоснование кварковой модели в непертурбативной КХД. Основным ингредиентом МПК является использование вспомогательных полей (ВП), которые вводятся, чтобы избежать появления квадратного корня в релятивистском гамильтониане. Использование ВП позволяет выписать простую локальную форму эффективного гамильтониана (ЭГ) для 3-кварковых систем

$$H = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{m_i^2}{2\mu_i} + \frac{\mu_i}{2} \right) + H_0 + V, \quad (6.1)$$

где H_0 - оператор кинетической энергии, совпадающий по форме с нерелятивистским Гамильтонианом

$$H_0 = \sum_i \frac{p_i^2}{2\mu_i}, \quad (6.2)$$

V - сумма струнного потенциала V_Y и потенциала 1-глюонного обмена, m_i - токовые массы кварков и μ_i - постоянные ВП, которые рассматриваются как вариационные параметры. Такой подход позволяет ввести ясную физическую интерпретацию ВП: стартуя от токовых масс в лагранжиане КХД, мы в конечном счете приходим к динамическим массам μ_i , которые возникают в результате взаимодействия и могут рассматриваться как массы конститюэнтных кварков. Струнный потенциал обычно имеет вид

$$V_Y(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = \sigma r_{min}, \quad (6.3)$$

где σ - натяжение струны и r_{min} минимальная длина, отвечающая струнной Y конфигурации. Потенциал, обусловленный 1-глюонным обменом мы рассмотрим в разделе ???. Заметим, что уравнение 6.1 содержит только универсальные параметры m_i , μ_i , натяжение струны σ и константу сильной связи α_s .

Масса бариона M_B равна

$$M = M_0 + \Delta E_{HF}, \quad (6.4)$$

где ΔE_{HF} спиновая поправка,

$$M_0 = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{m_i^2}{2\mu_i} + \frac{\mu_i}{2} \right) + E_0(\mu_i) + C, \quad (6.5)$$

E_0 - собственное значение Шредингеровского оператора $H_0 + V$, и μ_i определяются из условия экстремума $M_0(m_i, \mu_i)$ по μ_i

$$\frac{\partial M_0(m_i, \mu_i)}{\partial \mu_i} = 0 \quad (6.6)$$

Для легких кварков, для которых $m_i \ll \sqrt{\sigma}$ (σ - натяжение струны) $\mu_i \sim \sqrt{\sigma}(1 + \mathcal{O}(\alpha_s))$, в то время как для тяжелых кварков ($m_i \gg \sigma$) $\mu_i \approx m_i$. В уравнении (6.5)

C - собственная энергия кварков, обусловленная взаимодействием цветового углового момента кварка с непертурбативным вакуумным полем. Эта поправка, приводит к отрицательному вкладу к массе адрона

$$C = -\frac{2\sigma}{\pi} \sum_i \frac{\eta(t_i)}{\mu_i}, \quad t_i = m_i \Lambda_g, \quad (6.7)$$

где

$$\eta(t) = t \int_0^\infty z^2 K_1(tz) e^{-z} dz, \quad (6.8)$$

$K_1(tz)$ - функция Мак Дональда ²⁴. В уравнении (6.7) $1/\lambda_g \approx 1 \text{ GeV}$, где λ_g - корреляционная длина глюонного непертурбативного вакуума.

Аналогия эффективного гамильтониана в уравнении 6.1) с нерелятивистским гамильтонианом позволяет использовать методы решения 3-частичных уравнений эффективные подходы, развитые для исследования 3-нуклонных нерелятивистских систем. Мы решаем нерелятивистское уравнение Шредингера с потенциалом с потенциалом конфайнмента и кулоновским потенциалом чтобы определить конститюэнтные массы μ_i и массы нулевого порядка M_0 . Для решения этого уравнения очень удобным оказывается метод гиперсферических функций, введенных Ю.А. Симоновым для решения проблемы 3-нуклонных ядер ${}^3\text{H}$ и ${}^3\text{He}$ [37]. Затем оцениваем поправку, связанную со сверхтонким расщеплением, используя пертурбативное цвето-магнитное взаимодействие с учетом поправок, связанных с волновой функцией

$$\Delta E_{HF} = \sum_{i < j} \frac{\sigma_i \sigma_j}{\mu_i \mu_j} \left(\frac{4\pi\alpha_s}{9} \right) \left\langle \delta(r_{ij}) + \frac{\sigma \lambda_g^2}{4\pi} \langle r_{ij} K_1(\lambda_g r_{ij}) \rangle \right\rangle. \quad (6.9)$$

Первый член в (6.9) это стандартное цветомагнитное взаимодействие в КХД [22], в том время как второй член, пропорциональный натяжению струны σ , был впервые вычислен в работе [23].

6.2 Вспомогательные поля и конститюэнтные массы кварков

Основной ингредиент в МВК заключается в использовании ВП. Эти поля были первоначально введены при рассмотрении кинематики релятивистских бесспиновых частиц, чтобы избежать появления квадратного корня, связанного с релятивистским гамильтонианом. Используя формализм ВП позволяет получить простую локальную форму ЭГ для 2- и 3-кварковых частиц ²⁵, который содержит конфайнмент кварков и релятивистские эффекты. Полученный таким образом ЭЕ содержит только универсальные параметры: натяжение струны σ , сильную константу связи α_s и конститюэнтные (токовые) массы кварков m_i ²⁶. Повторим, что конститюэнтные массы кварков μ_i , равно как и константа C , не являются в этом методе подгоночными параметрами. Таким образом, используемый формализм приобретает очень наглядную интерпретацию конститюэнтных масс: эти массы полностью эквивалентны конститюэнтным массам в

²⁴Функция $\eta(t)$ была впервые вычислена в работе [21]

²⁵См. Ref. [?], в которой содержится краткий обзор формализма.

²⁶Обзор формализма ЭГ для задачи барионов содержится в части II работы [?]

кварковой модели, но не являются подгогоночными параметрами, а вычисляются из вариационного минимума, определяющего сами ВП.

ЭГ имеет вид

$$H = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{m_i^2}{2\mu_i} + \frac{\mu_i}{2} \right) + H_0 + V. \quad (6.10)$$

В уравнении (6.10) H_0 нерелятивистский оператор кинетической энергии для постоянных μ_i , независимый от спина потенциал V есть сумма струнного потенциала

$$V_Y(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = \sigma r_{min}, \quad (6.11)$$

где r_{min} минимальная длина струн, отвечающих Y -конфигурации, и кулоновский член имеет вид

$$V_C(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = \sum_{i<j} V_C(r_{ij}), \quad (6.12)$$

возникающий из 1-глюонного обмена. Этот член подробно рассмотрен в разделе ???. ЭГ полностью эквивалентен релятивистскому гамильтониану с точностью до устранения ВП (см. ур-ние (6.15)). Отметим, что $\mu_i \sim \sqrt{\sigma} \sim 400$ MeV. даже для безмассовых токовых кварков.

Масса бариона определяется как

$$M_B = M_0 + \Delta M_{string} + C, \quad (6.13)$$

$$M_0 = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{m_i^2}{2\mu_i} + \frac{\mu_i}{2} \right) + E_0(\mu_i) \quad (6.14)$$

где $E_0(\mu_i)$ собственное значение Шредингеровского оператора $H_0 + V$, и μ_i определяются из условия минимума

$$\frac{\partial M_0(m_i, \mu_i)}{\partial \mu_i} = 0. \quad (6.15)$$

Правая часть уравнения (6.13) содержит пертурбативную собственную энергию C , которая обусловлена взаимодействием цветового магнитного момента кварков с вакуумным фоновым полем [21]. Эта поправка добавляет общий отрицательный знак в массу адронов:

$$C = -\frac{2\sigma}{\pi} \sum_i \frac{\eta(t_i)}{\mu_i}, \quad t_i = m_i/T_g, \quad (6.16)$$

где $1/\lambda_g$ - упомянутая выше глюонная корреляционная длина. Численный множитель $\eta(t)$ возникает из вычисления интеграла

$$\eta(t) = t \int_0^\infty z^2 K_1(tz) e^{-z} dz, \quad (6.17)$$

где K_1 функция Мак Дональда. Непосредственное вычисление [?] дает

$$\eta(t) = \frac{1 + 2t^2}{(1 - t^2)^2} - \frac{2t^2}{(1 - t^2)^{3/2}} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - t^2}}{t}, \quad t < 1, \quad (6.18)$$

$$\frac{1+2t^2}{(1-t^2)^2} - \frac{3t^2}{(t^2-1)^{5/2}} \arctan(1+\sqrt{t^2-1}), \quad t > 1. \quad (6.19)$$

Note that $\eta(0) = 1$ and $\eta(t) \sim 2/t^2$ при $t \rightarrow \infty$. В последующем мы используем $\lambda_g = 1/1\text{GeV}$. Наконец, ΔM_{string} в Eq. (6.13) – так называемая струнная поправка, которую мы обсудим в следующем разделе.

Приведенные выше формулы являются основными формулами, определяющими спектр барионов в МВК.

6.3 Кулоноподобное взаимодействие и фоновая теория возмущений

Рассмотрим кулоноподобную часть взаимодействия $V_C(r)$. Удобно записать V_C в импульсном пространстве

$$V_C(\mathbf{q}^2) = -C_F \frac{\alpha_V(\mathbf{q}^2)}{\mathbf{q}^2}, \quad (6.20)$$

где C_F цветовой фактор. В барионе два кварка принадлежат представлению $\bar{\mathbf{3}}$ группы $SU_c(3)$ для которого $C_F = 2/3$. Бегущая константа $\alpha_V(\mathbf{q}^2)$ контролирует поведение стандартной теории возмущений (СТВ) при малых импульсах. Формальное выражение для V_C в координатном пространстве имеет вид

$$V_C(r) = -C_F \frac{\alpha_s(r)}{r}, \quad (6.21)$$

где

$$\alpha_s(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dq \frac{\sin qr}{q} \alpha_V(\mathbf{q}^2). \quad (6.22)$$

С точностью до двух петель

$$\alpha_V(\mathbf{q}^2) = \frac{4\pi}{\beta_0 t} \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_0^2} \frac{\ln t}{t} \right), \quad (6.23)$$

где β_i коэффициенты КХД β -функции,

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3} n_f, \quad \beta_1 = 102 - \frac{38}{3} n_f, \quad (6.24)$$

и

$$t = \ln \frac{\mathbf{q}^2}{\Lambda_V^2} \quad (6.25)$$

В дальнейшем полагаем $n_f = 3$.

Константа связи $\alpha_V(\mathbf{q}^2)$ имеет особенности при $\mathbf{q}^2 = \Lambda_V^2$, поэтому стандартная теория возмущений плохо определена в инфракрасной области, в которой эта константа связи начинает расти. Эта проблема, очевидно, связана с расходимостью интеграла от бегущей константы в уравнении (6.22). Поэтому $\alpha_s(r)$ известна только в пертурбативной области $r \lesssim 0.1 \text{ fm}$. Оценки средних междукварковых расстояний в легких барионах приводят к значению в области 0.7 fm , что, очевидно, лежит вне области применения теории возмущений.

Существует, однако, возможность определения бегущей константы связи, которая имеет конечные значения в инфракрасной области. Примером является “временеподобная” эффективная связь, которая используется в дисперсионном подходе [?]. The idea is that such a coupling may give an effective measure of interaction at low scale [?]. An alternative procedure is to define the fundamental coupling in QCD from a given physical observable [33]. Для наших целей определить константу связи α_B в фоновой теории возмущений ([34]. В импульсном представлении

$$\alpha_B(\mathbf{q}^2) = \alpha_s(\mathbf{q}^2 + m_B^2), \quad (6.26)$$

где $m_B \sim 1 \text{ GeV}$ подходящий массовый параметр ²⁷. Смысл уравнения (6.26) заключается в том, что пертурбативный глюонный пропагатор сильно модифицируются при $q \lesssim m_B$ физикой больших расстояний.

Определим $\alpha_B(r)$ и кулоноподобный потенциал в координатном пространстве выражениями, аналогичными (6.21) и (6.22)

$$\alpha_B(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dq \frac{\sin qr}{q} \alpha_B(\mathbf{q}^2), \quad (6.27)$$

$$V_C(r) = -C_F \frac{\alpha_B(r)}{r}. \quad (6.28)$$

Для $\alpha_B(\mathbf{q}^2)$ мы используем двух-петлевой результат (6.23) с подстановкой

$$t \rightarrow t_B = \ln \frac{\mathbf{q}^2 + m_B^2}{\Lambda_V^2} \quad (6.29)$$

В результате $\alpha_B(\mathbf{q}^2)$ оказывается конечной в инфракрасной области $\mathbf{q}^2 \rightarrow 0$. В ультрафиолетовой области $\mathbf{q}^2 \gg m_B^2$ что совпадает с результатом СТВ. Константа связи $\alpha_B(r)$ определена для всех расстояний и насыщаются при некотором критическом значении $r \gg 1/m_B$. The specific choice of the parameters in Eq. (6.29) will be discussed in Sec. ??.

6.4 Струнная поправка

Потенциал $V_Y(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ в уравнении (6.11) представляет первый член в разложении струнного Гамильтониана КХД в терминах угловых скоростей [24]. Лидирующая поправка к этому члену известна как струнная поправка (СП). Эта поправка отсутствует в релятивистских уравнениях с локальными потенциалами. Знак этой поправки отрицателен, таким образом, учет СП уменьшает массу барионов с $L \neq 0$ (вклад СП в S -волновые состояния равен нулю).

СП была вычислена для орбитальных возбуждений тяжело-легких мезонов [?] и гибридных чармониевых состояний [?]. Для барионов вычисление струнного потенциала, содержащего точку соединения струн, учет СП представляет очень громоздкую задачу. Вычисления, однако, сильно упрощаются, если точку соединения

²⁷ Этот параметр имеет смысл массы первого гибридного возбуждения, $m_B = M(Q\bar{Q}gg) - M(Q\bar{Q}g)$. Из сравнения с решеточными вычислениями $m_B \sim 1 \text{ GeV}$.

струн выбрать совпадающей с координатой центра масс системы. \mathbf{R}_{cm} . В этом случае струнный потенциал аппроксимируется суммой 1-частичных потенциалов. Точность этого приближения для P -волновых барионных лучше 1 % [?]. Полагая $\mathbf{R}_{cm} = 0$ получим следующее выражение для СП

$$V_{\text{string}}^{\text{CM}} = \sigma \sum_i |\mathbf{r}_i| \int_0^1 d\beta \sqrt{1 - \mathbf{l}_i^2}, \quad (6.30)$$

где

$$\mathbf{l}_i = \frac{\beta}{|\mathbf{r}_i|} [\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i] = \frac{\beta}{\mu_i |\mathbf{r}_i|} [\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i] = -i \frac{\beta}{\mu_i |\mathbf{r}_i|} [\mathbf{r}_i \times \nabla_i]. \quad (6.31)$$

Разлагая квадратные корни в уравнении (6.30) по степеням угловых скоростей \mathbf{l}_i^2 и сохраняя в этом разложении только первые два члена, получим

$$V_{\text{string}}^{\text{CM}} \approx \sigma \sum_i |\mathbf{r}_i| \int_0^1 d\beta \left(1 - \frac{1}{2} \mathbf{l}_i^2\right) = \sigma \sum_i |\mathbf{r}_i| + \frac{\sigma}{6} \sum_i \left(\frac{1}{\mu_i^2 |\mathbf{r}_i|} (\mathbf{r}_i \times \nabla_i)^2 \right) \quad (6.32)$$

and

$$\Delta M_{\text{string}} = -\frac{\sigma}{6} \langle \Psi | \sum_i \frac{(\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i)^2}{\mu_i^2 r_i} | \Psi \rangle, \quad (6.33)$$

где Ψ собственная функция струнного гамильтониана в нулевом приближении.

7 Численные примеры

7.1 Гиперсферический формализм для трех-кварковых систем.

Для вычисления масс основных и возбужденных барионных состояний мы используем метод гиперсферических функций [37] - [40]. Идея метода заключается в том, чтобы обобщить простоту разложения по сферическим гармоникам для угловых функций 2-х частиц для системы N частиц, вводя $3N-3$ -мерное с полной длиной R (эта величина обычно называется гиперрадиусом) и набор углов Ω . Мы кратко обсудим гиперсферический формализм в применении к нашей специфической проблеме.

Введем в системе трех кварков с динамическими массами μ_i и координатами \mathbf{r}_i 3-частичные координаты Якоби в 6-мерном координатном пространстве

$$\boldsymbol{\rho}_{ij} = \sqrt{\frac{\mu_{ij}}{\mu_0}} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad \boldsymbol{\lambda}_{ij} = \sqrt{\frac{\mu_{ij,k}}{\mu_0}} \left(\frac{\mu_i \mathbf{r}_i + \mu_j \mathbf{r}_j}{\mu_i + \mu_j} - \mathbf{r}_k \right), \quad (6.1)$$

(i, j, k - циклическая перестановка, где μ_{ij} and $\mu_{ij,k}$ приведенные массы:

$$\mu_{ij} = \frac{\mu_i \mu_j}{\mu_i + \mu_j}, \quad \mu_{ij,k} = \frac{(\mu_i + \mu_j) \mu_k}{\mu_i + \mu_j + \mu_k}, \quad (6.2)$$

и μ_0 произвольный параметр с размерностью массы, который выпадает из конечного выражения. Барийонная волновая функция зависит от Якобиевых переменных (6.1) ²⁸

Перейдем теперь от Якобиевых переменных к гиперсферическим переменным в координатном пространстве

$$\begin{aligned} R^2 &= \boldsymbol{\rho}^2 + \boldsymbol{\lambda}^2, \\ \rho &= R \sin \theta, \quad \lambda = R \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где R 6-мерный гиперрадиус, который инвариантен при перестановках кварков. В дальнейшем опускаем индексы i и j .

Явное выражение для оператора кинетической энергии H_0 для трех-кварковых систем имеет замечательно простой вид в гиперсферических координатах. В системе центра масс

$$H_0 = -\frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{5}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\mathbf{L}^2(\Omega)}{R^2} \right). \quad (6.4)$$

В уравнении (6.4) Ω означает набор 5-ти угловых координат θ , \mathbf{n}_ρ , \mathbf{n}_λ , и $\mathbf{L}^2(\Omega)$ - квадрат углового оператора в 5-мерном пространстве.. Его собственные функции (гиперсферические гармоники) имеют вид

$$\mathbf{L}^2(\Omega) Y_{[K]}(\theta, \mathbf{n}_\rho, \mathbf{n}_\lambda) = -K(K+4) Y_{[K]}(\theta, \mathbf{n}_\rho, \mathbf{n}_\lambda), \quad (6.5)$$

где K - значение орбитального момента в 6-мерном пространстве.

Волновая функция $\psi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda})$ имеет вид

$$\psi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{[K]} \psi_{[K]}(R) Y_{[K]}(\Omega), \quad (6.6)$$

где набор $[K]$ определяет орбитальный момент состояния и его свойства симметрии. state and the symmetry properties.

В дальнейшем мы часто используем анзац $K = K_{\min}$, где $K_{\min} = 0$ for $L = 0$ и $K_{\min} = 1$ для $L = 1$. Точность этого приближения исследовалась в [?]. Наша задача тогда очень простая Our task is мы должны выбрать волновую функцию нулевого порядка, отвечающую минимальному K для данного L . Соответствующие гармоники имеют вид

$$\begin{aligned} Y_0 &= \sqrt{\frac{1}{\pi^3}}, \quad K = 0, \\ \mathbf{Y}_\rho &= \sqrt{\frac{6}{\pi^3}} \frac{\boldsymbol{\rho}}{R}, \quad \mathbf{Y}_\lambda = \sqrt{\frac{6}{\pi^3}} \frac{\boldsymbol{\lambda}}{R}, \quad K = 1. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Для nns барионов мы используем базис, в котором странный кварк выделен как кварк 3, но нестранные кварки все еще антисимметризованы. Точно также для ssn бариона мы используем базис, в котором нестранный кварк выделен как кварк 3. nns базисные состояния диагонализуют задачу конфайнмента, при этом базисные функции

²⁸Существует три эквивалентных способа введения Якобиевых переменных, которые связаны друг с другом линейными преобразованиями с Якобианом, равным единице.

отвечают отдельным возбуждениям нестранного и странного кварков. Эти возбуждения обозначаются как ρ - и λ возбуждения, соответственно). В частности, возбуждение по переменной λ в отличие от возбуждения по переменной ρ включает возбуждение “нечетного” кварка (s для nns или n for ssn). Несимметризованные базисные состояния uds и ssq обычно представляют более простую интерпретацию возбужденных состояний. [?].

Введем приведенную функцию $u_\nu(R)$:

$$\Psi_\nu(R, \Omega) = \frac{u_\nu(R)}{R^{5/2}} \cdot Y_\nu(\Omega), \quad (6.8)$$

where $\nu = 0$ for $L = 0$, and $\nu = \rho, \lambda$ for $L = 1$ ²⁹, и новую переменную

$$x = \sqrt{\mu_0} R = \left(\sum_i \frac{\mu_1 \mu_2}{M} r_{i2}^2 + \frac{\mu_2 \mu_3}{M} r_{23}^2 + \frac{\mu_3 \mu_1}{M} r_{31}^2 \right)^{1/2}, \quad (6.9)$$

которая не зависит от μ_o . Подставляя уравнение (6.8) в уравнение Шредингера для $\Psi_\nu(R, \Omega)$ и усредняя потенциал $V = V_Y + V_C$ по 6-мерной сфере Ω с весом $|Y_\nu|^2$, получаем 1-мерное уравнение Шредингера для $u_\nu(x)$

$$\frac{d^2 u_\nu(x)}{dx^2} + 2 \left(E_0 - \frac{(K + \frac{3}{2})(K + \frac{5}{2})}{2x^2} - V_Y^\nu(x) - V_C^\nu(x) \right) u_\nu(x) = 0, \quad (6.10)$$

где

$$V_Y^\nu(x) = \int |Y_\nu(\theta, \chi)|^2 V_Y(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) d\Omega = \sigma b_\nu x, \quad (6.11)$$

and

$$V_{\text{Coulomb}}^\nu(x) = -\frac{2}{3} \int |Y_\nu(\theta, \chi)|^2 \sum_{i < j} \frac{\alpha_B(r_{ij})}{r_{ij}} d\Omega = -\frac{2}{3} \frac{a_B^\nu(x)}{x}. \quad (6.12)$$

Константы b_ν в уравнении (6.11) определяются 2-мерным интегралом в плоскости $(\theta, \cos \varphi = \hat{\rho} \hat{\lambda})$. Явные выражения для этих интегралов выписаны в Приложении работы Ref. [?]. Функции $a_B^\nu(x)$ имеют вид

$$a_B^\nu(x) = \sum_{i < j} \sqrt{\mu_{ij}} \int \alpha_B \left(\frac{x \sin \theta}{\sqrt{\mu_{ij}}} \right) \frac{d\omega_\nu}{\sin \theta}, \quad (6.13)$$

где

$$d\omega_0 = \frac{16}{\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta, \quad (6.14)$$

and

$$d\omega_\rho = \frac{32}{\pi} \sin^4 \theta \cos^2 \theta d\theta, \quad d\omega_\lambda = \frac{32}{\pi} \sin^2 \theta \cos^4 \theta d\theta. \quad (6.15)$$

²⁹В дальнейшем мы опускаем магнитные индексы векторных сферических гармоник.

Таблица 8: Величины $\alpha_B(\infty)$ для различных значений Λ_V и m_B . Величины Λ_V и m_B даны в единицах GeV.

Λ_V	0.34			0.36			0.38		
m_B	0.95	1.00	1.05	0.95	1.00	1.05	0.95	1.00	1.05
$\alpha_B(\infty)$	0.492	0.467	0.445	0.526	0.496	0.471	0.563	0.528	0.500

8 Численные примеры

В предыдущей главе определен гамильтониан, который используется для вычисления спектров барионов. Этот гамильтониан содержит 5 параметров: бегущие массы m_n and m_s ³⁰, натяжение струны σ , и два параметра Λ_V and m_B входящие в определение $\alpha_B(\mathbf{q}^2)$ в уравнении (6.29). Еще раз подчеркнем, что все эти параметры не являются подгоночными. В приведенных ниже Таблицах использовано значение $\sigma = 0.15 \text{ GeV}^2$ найденное в решеточных КХД вычислениях [?]. Мы используем токовую массу легких кварков $m_u = m_d = 7 \text{ MeV}$ и голую массу s -кварка $m_s = 175 \text{ MeV}$ определенную независимо из описания D_s спектров. Это значение согласуется с оценкой полученной из правил сумм КХД $m_s(2 \text{ GeV}) = (125 \pm 40) \text{ MeV}$. Более новые вычисления дают значения $m_s(2 \text{ GeV}) = (90 \pm 10) \text{ MeV}$ ³¹. Для оставшихся двух параметров Λ_V and m_B в уравнении (6.29) используем значения

$$\Lambda_V = (0.36 \pm 0.02) \text{ GeV}, \quad m_B = (1 \pm 0.05) \text{ GeV}. \quad (6.16)$$

Результат согласуется с замораживанием $\alpha_B(r)$ на величине $\sim 0.5 - 0.6$, см. Таблицу 8. В этой Таблице приведены значения $\alpha_B(r)$ для $\Lambda_V = 0.36 \text{ GeV}$ и трех различных значений m_B . Ошибки в уравнении иллюстрируют(6.16) чувствительность барионных масс от параметров. Отметим, что $\alpha_B(r)$ увеличивается с ростом Λ_V и что, для фиксированного значения Λ_V , $\alpha_B(r)$ уменьшается с ростом m_B .

Рассмотрим сначала связанные состояния nnn , nns and snn барионов с $L = 0$. В Таблице 9 приведены массы этих барионов для трех различных значений Λ_V : 0.34, 0.36 и 0.38 GeV, и трех значений m_B : 0.95, 1.00 and 1.05 GeV. В таблице также указан динамические массы μ_i , найденные из условия минимума (6.15). Результаты таблицы показывают, что массы барионов уменьшаются с ростом Λ_V и, для фиксированного Λ_V уменьшаются, когда m_B увеличивается. Эта зависимость не является удивительной: эффект легко может быть считан из результатов Таблицы 8. Увеличение Λ_V при фиксированном m_B и уменьшение m_B при фиксированном Λ_V приводит к увеличению бегущей константы $\alpha_B(r)$ и, следовательно, к уменьшению теоретического значения массы бариона.

³⁰Напомним, что m_n означает общую массу u и d кварков

³¹Напомним, что в наш гамильтониан токовая масса m_s входит при гораздо меньшей скале

Таблица 9: Массы nnn , nns and ssn барионов с $L = 0$. Значения Λ_V и m_B приведены в единицах GeV.

		nnn			nns			ssn		
Λ_V	m_B	μ_1	μ_3	M_B	μ_1	μ_3	M_B	μ_1	μ_3	M_B
340	1050	407	407	1209	412	452	1297	457	417	1383
	1000	409	409	1201	414	453	1288	458	419	1373
	950	410	410	1190	415	455	1277	460	421	1363
360	1050	409	409	1197	415	454	1286	459	420	1371
	1000	411	411	1187	417	456	1276	461	422	1360
	950	414	414	1177	419	458	1263	463	424	1347
380	1050	412	412	1186	418	457	1274	462	423	1358
	1000	414	414	1174	420	459	1252	464	425	1345
	950	417	417	1161	422	461	1246	466	428	1330

Варьируя параметры Λ_V и m_B , мы получаем барионные массы в интервале 1161–1209 MeV (nnn), 1246–1297 MeV (nns), and 1330–1383 MeV (ssn). Различие масс связано главным образом с поведением бегущей константы связи в области промежуточных импульсов.

Поучительно сравнить результаты, полученные из вычислений с бегущей константой связи (КСС) с результатами, полученными для замороженной константы (ФСС) $\alpha_s^{(0)} = 0.39$ [?]. Это сравнение показано в таблице 10 д S - and P -барионов для частного выбора параметров $\Lambda_V = (0.36 \pm 0.02)$ GeV и $m_B = 1$ GeV. В этой таблице мы сравниваем динамические массы μ_i и барионные массы $M_0 + C$ в уравнении (6.13). Величины, приведенные в строчке РСС, были получены для $m_B = 1.00$ GeV, центральные результаты отвечают $\Lambda_V = 0.36$ GeV, верхнее значение отвечает $\Lambda_V = 0.34$ GeV, нижнее значение отвечает $\Lambda_V = 0.38$ GeV.

Из результатов, представленных в таблице 10, видно что массы барионных S -состояний, полученные для РСС, согласуются с массами, полученными для ФСС, согласуются друг с другом и в пределах ошибок хотя для центральных значений nnn , nns and ssn состояний массы на 20 MeV меньше. Для P -волновых барионов центральные значения ρ возбуждений, полученные при использовании РСС на 20 MeV меньше центральных значений, полученных с использованием ФСС $\alpha_s^{(0)} = 0.39$,

Таблица 10: Сравнение $M_0 + C$ in Eq. (6.13)б вычисленных с использованием RCC $\alpha_B(r)$ без струнных поправок с аналогичными вычислениями с использованием FCC $\alpha_s = 0.39$ from Ref. [?]. Величины показанные в строчке RCC были вычислены для параметров $\Lambda_V = 360$ MeV, $m_B = 1000$ MeV, верхняя приведенная ошибка отвечает $\Lambda_V = 340$ MeV, нижняя ошибка отвечает $\Lambda_V = 380$ MeV. Массы барионов и динамические массы μ_i даны в единицах MeV.

		<i>nnn</i>			<i>nns</i>			<i>ssn</i>		
	L	μ_1	μ_3	$M_0 + C$	μ_1	μ_3	$M_0 + C$	μ_1	μ_3	$M_0 + C$
RCC	0	411_{-4}^{+6}	411_{-4}^{+6}	1187_{-26}^{+22}	417_{-5}^{+5}	456_{-4}^{+5}	1276_{-30}^{+22}	461_{-5}^{+5}	422_{-5}^{+6}	1360_{-30}^{+23}
FCC		408	408	1209	414	453	1298	458	419	1384
RCC	1$_\rho$	454_{-2}^{+2}	454_{-2}^{+2}	1695_{-10}^{+9}	477_{-2}^{+2}	460_{-2}^{+2}	1774_{-10}^{+9}	516_{-2}^{+4}	424_{-2}^{+3}	1832_{-10}^{+9}
FCC		457	457	1674	482	459	1751	520	424	1810
RCC	1$_\lambda$	469_{-3}^{+4}	469_{-3}^{+4}	1625_{-15}^{+13}	456_{-4}^{+2}	540_{-3}^{+2}	1687_{-15}^{+13}	496_{-3}^{+3}	513_{-3}^{+3}	1771_{-15}^{+14}
FCC		457	457	1674	441	534	1738	483	506	1827

в то время как соответствующие центральные значения λ возбуждений меньше на 50 MeV. Отметим, что введение RCC устраняет вырождение ρ и λ -возбуждений для *nnn* состояний, найденную ранее для FCC [?].

Теперь рассмотрим струнную поправку для орбитальных возбуждений. Непосредственное вычисление матричных элементов в уравнении (6.33) приводит к следующему результату [?]

$$\Delta M_{\text{string}}^\rho = -\frac{64\sigma}{45\pi} \cdot \frac{1}{\mu^{3/2}} \sqrt{\frac{1+\kappa}{2+\kappa}} \gamma_\rho, \quad (6.17)$$

$$\Delta M_{\text{string}}^\lambda = -\frac{64\sigma}{45\pi} \cdot \frac{\kappa}{\mu^{3/2}(2+\kappa)^{3/2}} \left(\frac{1}{\kappa^{5/2}} + 2\sqrt{1+\kappa} \right) \gamma_\lambda, \quad (6.18)$$

где $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $\kappa = \mu_3/\mu$,

$$\gamma_\nu = \int_0^\infty \frac{u_\nu^2(x)}{x} dx, \quad \nu = \rho, \lambda, \quad (6.19)$$

и волновые функции $u_\nu(x)$ нормированы на единицу.

Величины γ_ν в уравнении (6.19), которые определяют струнные поправки практически не зависят от барионного флейвора и типа P волнового возбуждения. Например, для $\Lambda_V = 0.36$ GeV и $m_B = 1$ GeV мы получаем (в единицах $\text{GeV}^{1/2}$)

$$\gamma_\rho = 0.328(nnn), \quad \gamma_\rho = 0.326(nns), \quad \gamma_\rho = 0.325(ssn),$$

и

$$\gamma_\lambda = 0.333(nnn), \quad \gamma_\lambda = 0.332(nns), \quad \gamma_\lambda = 0.331(ssn).$$

Массы P -волновых возбуждений nnn , nns и ssn барионов с учетом струнной поправки показаны в Таблице 11. Анализ полученных результатов показывает, что струнные поправки, как и величины γ_ν в уравнении (6.19), слабо зависят от флейвора барионов и типа возбуждений. Учет этих поправок приводит к уменьшению предсказываемого уменьшению масс всех рассмотренных барионов на одно и то же значение $\sim 50 - 60$ MeV (см. 6-й столбец Таблицы 11).

В целом мы получаем разумное согласие с данными PDG, особенно если принять во внимание, что в нашем анализе мы пренебрегаем поправками, связанными со спиновым взаимодействием. Например, для $L = 0$ мы получаем $\frac{1}{4}(\Lambda + \Sigma + 2\Sigma^*)_{\text{theory}} = 1276_{-30}^{+23}$ MeV, где указанные ошибки отвечают вариации масс гиперонов при изменении параметров Λ_V и m_B в указанных пределах $\frac{1}{4}(\Lambda + \Sigma + 2\Sigma^*)_{\text{exp}} = 1267$ MeV. Для Ξ , получаем $\Xi_{\text{theory}} = 1360_{-30}^{+23}$ MeV, в то время как $\Xi_{\text{exp}} = 1315$ MeV. Однако, для нуклона $\frac{1}{2}(N + \Delta)_{\text{theory}} = 1187_{-21}^{+22}$ MeV, что примерно на 100 MeV больше экспериментального значения $\frac{1}{2}(N + \Delta)_{\text{exp}} = 1085$ MeV. Разницу можно приписать эффектам зависящих от спина кварк-кварковых сил, возникающих из глюонного обмена в КХД [?] или 1-бозонного обмена, которыми в данном подходе пренебрегалось³². Другой источник различия между экспериментальными и теоретическими значениями обусловлен систематической погрешностью, связанной использованием формализма ВП, которая максимальна для S -волновых nnn состояний [41]. Физические P -состояния не являются чистыми ρ - или λ - возбуждениями, но представляют линейные суперпозиции этих двух состояний с заданным полным моментом J . Однако, большинство физических состояний имеют массу, близкую к масс чистых ρ или λ состояний [?]. Например массы For N(1535) и N(1520) резонансов с $J^P = \frac{1}{2}^-$ и $J^P = \frac{3}{2}^-$, соответственно, хорошо согласуются с массой λ -возбуждения nnn бариона в Таблице 11: $M_\lambda(nnn) = 1567_{-14}^{+13}$ MeV. Массы $\Sigma(1620)$ и $\Sigma(1670)$ состояний с $J^P = \frac{1}{2}^-$ и $J^P = \frac{3}{2}^-$, соответственно, хорошо согласуются с массой λ -возбуждения nns бариона: $M_\lambda(nns) = 1636_{-15}^{+13}$ MeV. Массы ρ -возбуждений, которые P -состояниям легких дикварков лежат на 60 - 80 MeV выше.

Сравнение результата для основного состояния с отрицательной энергией в Ξ канале, $M_\lambda(ssn) = 1720_{-15}^{+14}$ MeV с другими теоретическими предсказаниями для этого состояния и результат из PDG представлены в Таблице 13.

³²Заметим, что эффекты, связанные с 1-бозонным обменом более существенны для барионов, содержащих скалярные nn дикварки (N and Λ) и много меньше существенны для барионов, содержащих аксиальные дикварки (Δ and Σ).

9 Приложение. Сферические функции Бесселя

Решениями уравнения

$$x^2 \frac{d^2 z_l(x)}{dx^2} + 2x \frac{dz_l}{dx} + [x^2 - l(l+1)] = 0 \quad (7.1)$$

с целым l являются *сферические функции Бесселя*

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x), \quad (7.2)$$

сферические функции Неймана

$$n_l(x) = -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{l+1/2}(x) = (-)^l j_{-l-1}(x), \quad (7.3)$$

и *сферические функции Ганкеля* первого и второго рода

$$h_l^{(+)}(x) = i\sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{l+1/2}^{(1)}(x) = i[j_l(x) - in_l(x)], \quad (7.4)$$

$$h_l^{(-)}(x) = -i\sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{l+1/2}^{(2)}(x) = -i[j_l(x) + in_l(x)]. \quad (7.5)$$

Сферические функции Ганкеля могут быть записаны в виде

$$h_l^{(+)}(x) = C_l^+ \frac{e^{ix}}{x}, \quad h_l^{(-)}(x) = C_l^- \frac{e^{-ix}}{x}, \quad (7.6)$$

где

$$C_l^{\pm} = (\mp i)^l \sum_{k=0}^l \frac{1}{2^k k!} \frac{(l+k)!}{(l-k)!} (\mp ix)^{-k}. \quad (7.7)$$

Приведем явный вид первых двух функций Ганкеля ($l=0,1$)

$$h_0^{(\pm)} = \frac{e^{\pm ix}}{x}, \quad h_1^{(\pm)} = (\mp i + \frac{1}{x}) \frac{e^{\pm ix}}{x}. \quad (7.8)$$

Разрешив (7.4) и (7.5) относительно $j_l(x)$ и $n_l(x)$, получим

$$j_l(x) = \frac{1}{2i} [h_l^{(+)}(x) - h_l^{(-)}(x)], \quad n_l(x) = \frac{1}{2} [h_l^{(+)}(x) + h_l^{(-)}(x)], \quad (7.9)$$

Первые две сферические функции Бесселя и Неймана имеют вид, соответственно,

$$j_0(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad j_1(x) = \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{\cos(x)}{x}, \quad (7.10)$$

$$n_0(x) = \frac{\cos(x)}{x}, \quad n_1(x) = \frac{\cos(x)}{x^2} + \frac{\sin(x)}{x}. \quad (7.11)$$

Для малых x

$$j_l(x) \sim \frac{x^l}{(2l+1)!!}, \quad n_l(x) \sim \frac{(2l-1)!!}{x^{(l+1)}}. \quad (7.12)$$

где $(2l+1)!! = 1 \times 3 \times \dots \times (2l+1)$. Асимптотические значения этих функций при $x \rightarrow \infty$

$$j_l(x) \sim \frac{1}{x} \sin(x - \frac{1}{2}l\pi), \quad n_l(x) \sim -\frac{1}{x} \cos(x - \frac{1}{2}l\pi) \quad (7.13)$$

Список литературы

- [1] R.Jost, *Helv. Phys. Acta*, **20**, 1947, 256
- [2] В.А. Липпманн и Ж. Швингер, *Phys. Rev.* **79**, 1950, 469
- [3] Л. Д. Фаддеев, Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц, *Тр. МИАН СССР*, **69**, 3, 1963
- [4] R.Jost and A.Pais, *Phys.Rev.* **82**, 840, 1951
- [5] V.Bargmann, *Proc. Nat. Acad. of Sci., USA*, **38**, 961, 1952
- [6] J.Schwinger, *Proc. Nat. Acad. Sci., USA* **47**, 122, 1960
- [7] F.Calogero, *Variable phase approach to potential scattering*, N.Y. 1967
- [8] R.H.Dalitz, *Proc. R. Lond.* **S206**, 509, 1951
- [9] R.Newton, *Scattering theory of waves and particles*, Springer Verlag 1966 (Русский перевод *МИП*, Москва, 1969, Глава 10)
- [10] L.Hulthén, *Ark.Mat.Aatr.PY8* **28A**, No.5 1942, L.Hulthén and M.Sugawara in *Structure of Atomic Nuclei*, Encyclopedia of Physics, volume XXXIX, Springer Verlag 1957, part 1
- [11] J.J.Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc, 1985, Section 7.6
- [12] Г.В.Скорняков и К.А.Тер-Мартirosян, *ЖЭТФ*, **31** (1956) 775
- [13] Л.Д.Фаддеев, *ЖЭТФ*, **39** (1960) 1459
- [14] О.А.Якубовский, *ЯФ* **5** (1967) 312
- [15] S.Weinberg, *Phys. Rev.* **131** (1964) 440
- [16] W.Rarita and J.Schwinger, *Phys. Rev.* **59** (1941) 436, 556.
- [17] I.M.Narodetskii and M.A.Trusov, *Письма в ЖЭТФ* **99** (2014) 61

- [18] C.Caso *et al.*, Eur. Phys. Journal C**3** (1998) 1
- [19] N.Isgur, G.Karl, Phys. Rev. D**18** 4187 (1978), D**19** 2653 (1979)
- [20] Frank X.Lee, F. Aleksandru, The XXVIII International Symposium on Lattice Field Theory, Sardinia Italy arXiv:1011.4325 [hep-lat]
- [21] Yu. A. Simonov, Phys.Lett. B **515**, 137 (2001)
- [22] A. De Rujula, H.Georgy, S.L.Glashow, Phys.Rev. D **12**, 147 (1975)
- [23] Yu. A. Simonov, Phys.Rev. D **65**, 11004 (2002)
- [24] A. Yu. Dubin, A. B. Kaidalov and Yu. A. Simonov, Phys. Lett. B **323**, 41 (1994),
- [25] A. Yu. Dubin, A. B. Kaidalov and Yu. A. Simonov, Phys. Atom. Nucl. **56**, 1745 (1993)
- [26] I. M. Narodetskii, C. Semay, A.I. Veselov, Eur. Phys. J. C**55**, 403 (2008)
- [27] S. J. Brodsky, S. Menke, C. Merino, and J. Rathsman, Phys. Rev. D**67**, 055008 (2003)
- [28] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, and V. I. Zakharov, Nucl. Phys. B**147**, 385, 448 (1979)
- [29] B. L. Ioffe, Prog. Part. and Nucl. Phys., **56** (2006), 232
- [30] M. B. Voloshin, Nucl. Phys. B, **154** (1979), 365
- [31] P.Bali, M Beneke and V.M.Braun, Nucl. Phys. B**452**, (1995) 563
- [32] Yu.L.Dokshitzer, G.Marchesini, Nucl.Phys. B**469**, (1996) 93
- [33] S.J.Brodsky et al., Phys.Rev. D**67**, (2003) 05500
- [34] Yu.A.Simonov, Phys. Atom. Nuclei, **58**, (1995), 107
- [35] H. G. Dosch, Phys. Lett. B, 190 (1987), 177, H. G. Dosch and Yu. A. Simonov, Phys. Lett. B, 205 (1988), 339 Yu. A. Simonov, Nucl. Phys. B, 307 (1988), 512
- [36] A. Di Giacomo, H. G. Dosch, V. I. Shevchenko, and Yu.A.Simonov, Phys. Rep., bf 372 (2002) 319
- [37] Ю.А. Симонов, ЯФ **3** (1966) 630
- [38] А.М. Бадалян и Ю.А. Симонов, ЯФ **3** (1966) 1032
- [39] F. Calogero and Yu.A. Simonov, Phys.Rev. **169** (1968) 789
- [40] A.M. Badalian, F. Calogero and Yu.A. Simonov, Nuovo Cimento **68A** (1970) 572
- [41] I.M. Narodetskiy, C. Semay and A.I. Veselov, Eur.Phys. J. C**55** (2008) 403, e-print Arxiv 0801.1270 [hep-ph]

- [42]] I. V. Danilkin and Yu. A. Simonov, e-print arXiv:0907.1088 [hep-ph], Phys. Rev. D.**81** (2010) 074027
- [43] S.Capstick and N. Isgur, Phys. Rev. D**34** (1986) 2809

Таблица 11: Массы ρ и λ барионных P -волновых возбуждений для $m_B = 1000$ MeV с учетом струнных поправок (6.17), (6.18). Массы барионов, струнные поправки и динамические массы конститюэнтных кварков μ_i даны в единицах MeV.

Baryon	Excitation	Λ_V	$\mu_1 = \mu_2$	μ_3	$M_0 + C$	ΔM_{string}	M_B
<i>nnn</i>	$\mathbf{1}_\rho$	340	452	452	1704	-60	1644
		360	454	454	1695	-59	1636
		380	456	456	1685	-59	1626
	$\mathbf{1}_\lambda$	340	466	466	1638	-58	1580
		360	469	469	1625	-58	1567
		380	471	471	1610	-57	1553
<i>nns</i>	$\mathbf{1}_\rho$	340	475	458	1783	-55	1728
		360	477	460	1774	-55	1719
		380	479	462	1764	-55	1709
<i>nns</i>	$\mathbf{1}_\lambda$	340	452	537	1700	-51	1649
		360	455	540	1687	-51	1636
		380	458	542	1672	-51	1621
<i>ssq</i>	$\mathbf{1}_\rho$	0.34	514	422	1841	-48	1793
		0.36	516	424	1832	-48	1784
		0.38	518	427	1822	-48	1774
	$\mathbf{1}_\lambda$	0.34	493	510	1785	-51	1734
		0.36	496	513	1771	-51	1720
		0.38	499	516	1756	-51	1705

Таблица 12: Low-lying Ξ spectrum of spin $L = 1$ predicted by the nonrelativistic quark models of Chao, Isgur and Karl [?] and of Pervin and Roberts [?], the relativized quark model of Capstick and Isgur [?], the Glozman-Riska model [?], the large N_c analysis [?], the algebraic model [?], QCD sum rules [?], and the Skyrme model [?]. The question mark in the last column means that the J^P quantum numbers are not identified by PDG. The masses are given in MeV.

State	[?]	[?]	[?]	[?]	[?]	[?]	[?]	[?]	This work	PDG
$\Xi(\frac{1}{2}^-)$	1785	1725	1755	1758	1780	1869	1550	1660	1720_{-15}^{+14}	$\Xi(1690) ?$
$\Xi(\frac{3}{2}^-)$	1800	1759	1785	1758	1815	1828	1840	1820	1720_{-15}^{+14}	$\Xi(1820)$

Таблица 13: Low-lying Ξ spectrum of spin $L = 1$ predicted by the nonrelativistic quark models of Chao, Isgur and Karl [?] and of Pervin and Roberts [?], the relativized quark model of Capstick and Isgur [?], the Glozman-Riska model [?], the large N_c analysis [?], the algebraic model [?], QCD sum rules [?], and the Skyrme model [?]. The question mark in the last column means that the J^P quantum numbers are not identified by PDG. The masses are given in MeV.

State	[?]	[?]	[?]	[?]	[?]	[?]	[?]	[?]	This work	PDG
$\Xi(\frac{1}{2}^-)$	1785	1725	1755	1758	1780	1869	1550	1660	1720_{-15}^{+14}	$\Xi(1690) ?$
$\Xi(\frac{3}{2}^-)$	1800	1759	1785	1758	1815	1828	1840	1820	1720_{-15}^{+14}	$\Xi(1820)$

Таблица 14: Массы b-барионов, обнаруженных CDF и DO коллаборациями

Σ_b^+	$5808_{-2.3}^{+2.0}(stat.) \pm 1.7(syst.)$
Σ_b^-	$5816_{-1.0}^{+1.0}(stat.) \pm 1.7(syst.)$
Σ_b^{*-}	$5837_{-1.9}^{+2.1}(stat.) \pm 1.7(syst.)$