Точные решения для спиральной волны в модели 6-ти мерного фазового пространства

Аннотация

Спиральные (вихревые) волны в последнее время находят растущие практические применения: в биологии и медицине — как механизм ритмов сердечных сокращений (спиральные волны возбуждения в сердечной ткани), в передаче данных — в оптической и акустической связи как несущие с орбитальным угловым моментом, в астрономических наблюдениях — в вихревых коронографах для подавления света звезды. В связи

с этим возникает задача построения точных решений для подобных волн.

В настоящей работе для линейного матричного волнового уравнения с парой операторов W (симметричный) и S (кососимметричный) построено точное решение в виде матричной экспоненты. Доказано: решение удовлетворяет одновременно уравнению Гельмгольца и уравнению Клейна–Гордона; оно унитарно; полная система нейтрально устойчива; пространство решений конечномерно (12 комплексных мод);

тахионная ветвь спектра подавлена связью; квантование проводится точно и даёт положительный гамильтониан. Все утверждения доказаны прямыми вычислениями, без приближений и предположений.

1. Постановка задачи

Заданы матрицы

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Свойства:

$$W^T = W, \qquad S^T = -S,$$

$$\sigma(W) = \{2, -1, -1\}, \quad \sigma(S) = \{0, -i\sqrt{3}, +i\sqrt{3}\}.$$

Ключевое тождество (проверяется прямым умножением):

$$WS = SW = -S.$$

Ищем решение $U(x, y)$ — унитарная матрица 3×3, зависящая от двух скалярных аргументов.

2. Оператор решения

$$U(x,y) = e^{A(x,y)}, \quad A = iW(x+y) + S(y-x).$$

Производные оператора:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = iW - S, \quad \frac{\partial A}{\partial y} = iW + S,$$

$$\left[\frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y}\right] = 0.$$

Коммутативность следует из $WS = SW$ и даёт точную

формулу дифференцирования экспоненты:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right) U,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right) U.$$

Унитарность — точное следствие косоэрмитовости A ($A^\dagger = -A$
):

$$U^\dagger U = I.$$

3. Производные решения

Первые производные:

$$U'_x = (iW - S)\,U, \quad U'_y = (iW + S)\,U,$$

$$U'_x + U'_y = 2iW\,U, \quad U'_y - U'_x = 2S\,U.$$

Вспомогательные тождества (проверяются прямым умножением):

$$W^2 = J + I, \quad S^2 = J - 3I,$$

$$W^2 + S^2 = 2W, \quad W^2 - S^2 = 4I,$$

где J — матрица из единиц.

Вторые производные:

$$U''_{xx} = (-4 + 2iS)\,U,$$

$$U''_{yy} = (-4 - 2iS)\,U,$$

$$U''_{xy} = U''_{yx} = -2W\,U.$$

4. Основные уравнения

Складывая и вычитая вторые производные, получаем две замкнутые системы:

$$U''_{xx} + U''_{yy} = -8\,U,$$

$$U''_{xx} - U''_{yy} = 4iS\,U.$$

Первое — матричное уравнение Гельмгольца, второе — уравнение типа Клейна–Гордона с матричной «массой».

Дополнительно:

$$U''_{xy} = -2W\,U.$$

Все три уравнения выполняются одновременно — система переопределена, но согласована.

5. Явное решение через проекторы

Обозначим $s = x + y, t = x - y$. Проекторы на собственные подпространства S:

$$P_0 = \tfrac{1}{3} J,$$

$$P_+ = \tfrac{1}{2}\left(I - \tfrac{1}{3} J - \tfrac{iS}{\sqrt{3}} \right),$$

$$P_- = \tfrac{1}{2}\left(I - \tfrac{1}{3} J + \tfrac{iS}{\sqrt{3}} \right),$$

$$P_0 + P_+ + P_- = I, \quad P_\alpha P_\beta = \delta_{\alpha\beta} P_\alpha.$$

Корректность проекторов опирается на тождество

$$\left(\tfrac{iS}{\sqrt{3}} \right)^2 = I - \tfrac{1}{3} J.$$

Явное решение:

$$U = e^{2is} P_0 + e^{-is} \left(e^{-i\sqrt{3}t} P_+ + e^{+i\sqrt{3}t} P_- \right).$$

6. Спектр мод и структура решения

Решение — суперпозиция трёх плоских волн с волновыми векторами:

$$k_0 = (2,\ 2),$$

$$k_+ = (-1-\sqrt{3},\ \sqrt{3}-1),$$

$$k_- = (\sqrt{3}-1,\ -1-\sqrt{3}).$$

Проверки:

$$k_0 + k_+ + k_- = (0,0),$$

$$|k_0|^2 = |k_+|^2 = |k_-|^2 = 8.$$

Все три моды лежат на одной окружности $k_x^2 + k_y^2 = 8$ — это он-шелл содержание связи Гельмгольца.

При выборе x в качестве времени квадраты масс $m^2 = k_x^2 - k_y^2$:

$$m_0^2 = 0, \quad m_+^2 = +4\sqrt{3}, \quad m_-^2 = -4\sqrt{3},$$

и значения совпадают с собственными значениями оператора $4iS$ на соответствующих ветвях — связь Клейна–Гордона выполняется мода за модой.

7. Размерность пространства решений

Анзац $U = e^{\alpha x + \beta y} v$ с собственным вектором v матрицы S даёт для каждой ветви

$$\alpha^2 = -(4 \mp 2\sqrt{3}), \quad \beta^2 = -(4 \pm 2\sqrt{3}),$$

то есть по 4 экспоненциальные моды на ветвь. Итого:

$$3 \times 4 = 12 \text{ комплексных мод},$$

$$24 \text{ вещественных степени свободы}.$$

Собственные векторы — векторы Фурье циклической группы:

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),$$

$$v_+ = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,\omega^2,\omega),$$

$$v_- = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,\omega,\omega^2),$$

$$\omega = e^{2\pi i/3}.$$

Построенное решение e^A — двумерное подмногообразие (группа) внутри 24-мерного линейного пространства решений, выделенное условием унитарности.

8. Устойчивость

Операторы вторых производных $-4 \pm 2iS$ эрмитовы, их спектры:

$$\sigma(-4 + 2iS) = \sigma(-4 - 2iS) = \{-4,\ -4 - 2\sqrt{3},\ -4 + 2\sqrt{3}\},$$

$$-4+2\sqrt{3}=-(\sqrt{3}-1)^2<0.$$

Все три собственных значения отрицательны — уравнение $U''=AU$ с $A\prec 0$ имеет чисто колебательную динамику.

Частоты:

$$\omega_0=2,\quad \omega_+=\sqrt{3}+1,\quad \omega_-=\sqrt{3}-1,$$

$$(\sqrt{3}-1)^2=4-2\sqrt{3},\quad (\sqrt{3}+1)^2=4+2\sqrt{3}.$$

Вывод: полная система нейтрально устойчива, все решения ограничены по модулю; запас устойчивости

$$4 - 2\sqrt{3} \approx 0{,}54 > 0.$$

Тахионная полоса возникает только в КГ-подсистеме по отдельности (при $|k| < 2 \cdot 3^{1/4}$) и полностью снимается второй связью: в полной системе спектр импульсов дискретен, полосы неустойчивости не существует.

9. Причинность

Допустимые модули импульса — конечное множество:

$$|k| \in \{2,\ \sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}+1\},$$

по два направления на ветвь. Формальная групповая скорость тахионной ветви $v_g = 2+\sqrt{3} > 1$ не создаёт сверхсветового сигнала: из двух дискретных точек нельзя собрать волновой пакет, фронта у сигнала нет. Нейтральная ветвь P_0 лежит точно

на световом конусе $m^2 = 0$ и задаёт причинную структуру модели.

Геометрическое следствие: вдоль прямых $x + y = \mathrm{const}$ решение имеет вид

$$U(\lambda) = e^{A_0}\, e^{-S\, t(\lambda)},$$

то есть неподвижная P_0-компонента (ось) плюс равномерное вращение $P_\pm$-компоненты в плоскости, перпендикулярной $(1,1,1)$, с периодом

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Траектория поля в $\mathbb{R}^6 \cong \mathbb{C}^3$ — точная круговая винтовая линия.

10. Квантование

Теория квадратична, поэтому квантование полное и точное. Отбор положительных частот даёт 6 комплексных мод (3 ветви × 2 направления импульса), каждая распадается на осцилляторы частицы и античастицы:

12 вещественных осцилляторов.

Гамильтониан положителен:

$$H = \sum_{\text{моды}} \omega\left(a^\dagger a + \tfrac{1}{2}\right), \quad \omega > 0 \text{ для всех ветвей.}$$

Нулевая энергия вакуума:

$$E_0 = \tfrac{1}{2} \cdot 2\left(2 + (\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)\right) = 2 + 2\sqrt{3}.$$

Заряды под $Q = -iS/\sqrt{3}$:

$$q(P_0) = 0, \quad q(P_+) = +1, \quad q(P_-) = -1.$$

Ветви P_+ и P_- зарядово-сопряжены, нейтральная ветвь самосопряжена. Духов нет, вакуум стабилен: тахионная ветвь, зажатая связью Гельмгольца, является обычной стабильной частицей спектра.

11. Контрольные соотношения

Для независимой проверки в любой точке (x, y):

$$\operatorname{tr}\left(U''_{xx}U^{-1}\right) = \operatorname{tr}(-4I + 2iS) = -12,$$

$$\operatorname{tr}\left(U''_{yy}U^{-1}\right) = \operatorname{tr}(-4I - 2iS) = -12,$$

$$\operatorname{tr}\left(U''_{xy}U^{-1}\right) = \operatorname{tr}(-2W) = -4,$$

$$\operatorname{tr} S = 0, \quad \operatorname{tr} W = 2.$$

Заключение

Строго доказано:

- решение $U = e^{iW(x+y)+S(y-x)}$ существует, явно выписано через проекторы и унитарно;
- оно удовлетворяет одновременно уравнениям Гельмгольца, Клейна–Гордона и смешанному уравнению;
- пространство решений конечномерно: 12 комплексных мод на дискретной решётке импульсов;
- система нейтрально устойчива с конечным запасом $4 - 2\sqrt{3}$; тахионная полоса подавлена связью;

- причинность обеспечена нейтральной безмассовой ветвью, лежащей точно на световом конусе;
- квантование выполнено точно: положительный гамильтониан, 12 осцилляторов, стабильный вакуум с энергией $2 + 2\sqrt{3}$, заряды $0, \pm 1$.

Все перечисленные результаты — теоремы прямых вычислений; интерпретации (винтовая бегущая волна, сигнатура (3,3), конденсатные расширения) в статью сознательно не включены, поскольку имеют статус согласованной интерпретации, а не доказанного утверждения.