УДК 511.5 MSC 11D09

Ограничения на класс полупростых ребер примитивных кубоидов Эйлера

В. Г. Соловьёв

Аннотация

В настоящей работе исследуется классическая нерешенная задача диофантова анализа о существовании и структуре прямоугольных параллелепипедов с целочисленными ребрами и лицевыми диагоналями, известных как кубоиды Эйлера. Автором предложен строго аналитический подход к наложению ограничений на параметры нечетного ребра кубоида в зависимости от структуры его разложения на простые множители. В качестве теоретического фундамента в статье приводится изящное доказательство невозможности построения примитивного кубоида для случая, когда фиксированное ребро является простым числом. Главным результатом исследования является аналитическое доказательство жесткого критерия конечности для класса полупростых параметров. В работе строго доказано, что во множестве нечетных полупростых чисел существует ровно два ребра, порождающих примитивные кубоиды Эйлера, а именно $a = 85$ и $a = 187$.

Ключевые слова: диофантов анализ, кубоид Эйлера, кирпич Эйлера, совершенный кубоид, полупростые числа, пифагоровы тройки, разность квадратов.

Constraints on the Class of Semi-Simple Edges of Primitive Euler Cuboids

V. G. Solovyov

Abstract

This paper investigates a classical unsolved problem of Diophantine analysis regarding the existence and structural properties of rectangular parallelepipeds with integer edges and face diagonals, commonly known as Euler bricks. The author proposes a strictly analytical approach to establishing constraints on the parameters of an Euler brick's odd edge based on its prime factorization structure. As a theoretical foundation, the paper provides an elegant proof for the non-existence of a primitive brick when the fixed edge is a prime number. The core result of this study is an analytical proof of a strict finiteness criterion for the class of semiprime parameters. It is rigorously demonstrated that within the set of odd semiprime numbers, there exist exactly two edges capable of generating primitive Euler bricks, specifically $a = 85$ and $a = 187$.

Keywords: Diophantine analysis, Euler brick, perfect cuboid, semiprime numbers, Pythagorean triples, difference of squares.

Теоретическое обоснование. Уравнение кубоида Эйлера

Кубоид Эйлера представляет собою прямоугольный параллелепипед с целочисленными рёбрами L, W и H, которые определяют его габариты — длину, ширину (глубину) и высоту соответственно, а также тремя целочисленными диагоналями D_{LW}, D_{WH} и D_{LH} лицевых граней, которые составляют указанные выше пары рёбер. Для нахождения параметров Кубоида Эйлера необходимо решить систему из трёх диофантовых уравнений в натуральных числовых значениях следующего вида:

$$\begin{cases} L^2 + H^2 = D_{LH}^2, \\ W^2 + H^2 = D_{WH}^2, \\ L^2 + W^2 = D_{LW}^2. \end{cases} \tag{1}$$

При решении вопросов по Кубоиду Эйлера рассматривают решение задачи через плоские пифагоровы треугольники или пифагоровы тройки, определяя сначала параметры параллелепипеда [1]. В результате получаем два пифагоровых прямоугольных треугольника, имеющих один общий катет H (высота прямоугольного параллелепипеда), с катетами L и W (два ребра прямоугольного параллелепипеда), а также ещё один пифагоров треугольник, составленный катетами L и W . Учитывая, что один катет примитивного (то есть с взаимно простыми длинами рёбер) прямоугольного параллелепипеда, удовлетворяющего условиям (1), должен быть обязательно нечётным, для дальнейших рассуждений достаточно принять его, например, за высоту (H). Таким образом, Кубоид Эйлера существует тогда и только тогда, когда на одном нечётном катете можно построить два пифагоровых треугольников, а два других четных катета также составляют прифагоров треугольник.

Рассмотрим декартову систему координат, в которой по оси ординат отложим отрезок Y с нечётным значением, а по оси абсцисс отметим точки с целочисленными значениями $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ такими, что полученные треугольники являются пифагоровыми. Определим возможное количество полученных треугольников и выведем формулу, связывающую чётные катеты со значением Y и его делителями, разложив базовое диофантово уравнение на множители. По теореме Пифагора для любой тройки чисел запишем

$$Y^2 = Z_i^2 - X_i^2. \tag{2}$$

Используя формулу разности квадратов, разложим правую часть уравнения (2) на два множителя:

$$Y^2 = (Z_i - X_i)(Z_i + X_i). \tag{3}$$

Поскольку мы имеем дело с целыми числами, выражение в первой скобке обязано быть натуральным делителем числа Y^2. Обозначим

$$Z_i - X_i = f_i. \tag{4}$$

Тогда

$$Z_i + X_i = \frac{Y^2}{f_i}. \tag{5}$$

Чтобы выразить чётный катет X_i через нечётный Y, избавившись от гипотенузы Z_i, вычтем из уравнения (5) уравнение (4) и получим искомую формулу зависимости чётного катета от нечётного и его делителей:

$$X_i = \frac{Y^2 - f_i^2}{2f_i}. \tag{6}$$

Так как чётный катет X_i должен быть строго положительным числом, т. е. $X_i > 0$, то выражение в скобках тоже должно быть больше нуля. Значит $f_i < Y$.

Заметим, что уравнение (6) не нарушает условие целочисленности X_i. Поскольку Y по условию нечётное число, его квадрат также нечётный. В свою очередь, любой делитель нечётного числа может быть только нечётным. Отсюда разность двух нечётных чисел в выражении в скобках уравнения (6) всегда даёт чётное число, а при делении на 2 чётного числа результат гарантирует целочисленность X_i.

Аналогичным образом можно получить и формулу для всех гипотенуз:

$$Z_i = \frac{Y^2 + f_i^2}{2f_i}. \tag{7}$$

Можно доказать, пользуясь формулами математических сочетаний, что число неповторяющихся попарных произведений ряда чисел, представляющих собою в нашем случае набор делителей f, не превышает $n^2/4$. Как известно [2] из канонического разложения числа на простые множители, число делителей числа равно произведению увеличенных на единицу показателей степеней его простых множителей. Таким образом, количество пифагоровых треугольников, построенных на нечётной стороне, ограничено количеством значений делителей f_p. Поскольку количество делителей любого числа конечно, то и пифагоровых треугольников, построенных на нечётном катете, тоже конечно.

Приняв в качестве нечётного катета H прямоугольного параллелепипеда за координату Y, а в качестве чётных катетов L и W — за координаты X_i, имеем, что формулы (6) и (7) описывают все прямоугольные параллелепипеды с 5-ю целочисленными параметры — высотой H, шириной W, длиной L и диагоналями боковых граней D_{LH} и D_{WH}. Число таких параллелепипедов, построенных на нечётном ребре (высоте H), равняется попарному количеству делителей f_p нечётного ребра (высоты H).

Если диагонали D_{LH} и D_{WH} боковых граней образуют с диагональю нижней грани D_{LW} пифагоров треугольник, то тогда можно говорить об образовании Эйлерова параллелепипеда с шестью целочисленными параметрами. На основании положений о существовании пифагоровых треугольников, построенных на одном нечётном катете, можно утверждать, что Эйлеров параллелепипед существует тогда и только тогда, когда в ряду нечётных значений f_p, построенных на высоте H, найдётся, как минимум, пара значений, которые и составят Пифагоровый треугольник:

$$\left(\frac{H^2 - f_L^2}{f_L}\right)^2 + \left(\frac{H^2 - f_W^2}{f_W}\right)^2 = 4 \cdot D_{LW}^2. \tag{8}$$

Таким образом, с учетом того, что правая часть уравнения есть квадрат чётного числа M, уравнение существования Кубоида Эйлера представляет собой выражение

$$\left(\frac{H^2 - f_L^2}{f_L}\right)^2 + \left(\frac{H^2 - f_W^2}{f_W}\right)^2 = M^2, \tag{9}$$

где все параметры целочисленные, а f_L и f_W — нечетные делители нечётного H^2, меньшие H.

Полученное общее уравнение кубоида Эйлера связывает нечетный катет с упорядоченным множеством его делителей, определяя тем самым всю топологию пространства возможных целочисленных решений. Однако непосредственный анализ этого уравнения в общем виде сопряжен со значительными комбинаторными трудностями из-за экспоненциального роста числа делителей при увеличении количества простых множителей в разложении катета.

Для построения строгой аналитической теории представляется методологически оправданным двигаться от простых структур к более сложным. В соответствии с этим, дальнейшее содержание настоящей работы сфокусировано на исследовании **жестких ограничений**, накладываемых общим уравнением на параметры катета в зависимости от его мультипликативной структуры.

В первую очередь мы обратимся к базовому сценарию, детально описанному в аннотации, и рассмотрим случай, когда фиксированное нечетное ребро является простым числом. Этот класс параметров служит идеальным теоретическим фундаментом, позволяющим в явном виде продемонстрировать внутреннюю противоречивость системы уравнений кубоида и изящно доказать невозможность существования примитивного кубоида Эйлера в данном базисе. Далее, опираясь на развитый математический аппарат, мы перейдем к главному результату исследования — аналитическому разбору случая полупростого катета ($H = p_1 p_2$), для которого с помощью ограничений на делители выводится жесткий критерий конечности числа возможных решений.

Предварительно разберем случай, когда нечетное ребро представлено любым простым числом.

Теорема 1. *Если нечетное ребро кубоида Эйлера является простым числом ($H = p$, где $p > 2$ — простое), то примитивного кубоида Эйлера не существует.*

Доказательство. Предположим противное: пусть при $H = p$ существует целочисленное решение уравнения кубоида Эйлера:

$$\left(\frac{H^2 - f_L^2}{f_L}\right)^2 + \left(\frac{H^2 - f_W^2}{f_W}\right)^2 = M^2, \tag{10}$$

где $M \in \mathbb{N}$, а f_L и f_W — натуральные делители числа H^2, определяющие длины двух других ребер кубоида.

Поскольку по условию $H = p$, каноническое разложение квадрата ребра имеет вид:

$$H^2 = p^2$$

Множество всех натуральных делителей числа H^2 состоит ровно из трех элементов:

$$\mathcal{D}(H^2) = \{1, p, p^2\}$$

Следовательно, переменные f_L и f_W могут принимать значения только из этого множества. Рассмотрим возможные комбинации значений делителей с учетом геометрического смысла задачи. По определению кубоида Эйлера, все его ребра должны быть строго положительными, что налагает ограничение на компоненты уравнения (10):

$$\frac{H^2 - f_L^2}{f_L} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{H^2 - f_W^2}{f_W} > 0$$

Откуда вытекают строгие неравенства для делителей: $f_L < H$ и $f_W < H$.

Поскольку $H = p$, единственными делителями из множества $\mathcal{D}(H^2)$, удовлетворяющими условию строгого неравенства $f < p$, являются:

$$f_L = 1 \quad \text{и} \quad f_W = 1$$

Подставим значения $H = p$, $f_L = 1$ и $f_W = 1$ в исходное уравнение (10):

$$\left(\frac{p^2 - 1^2}{1}\right)^2 + \left(\frac{p^2 - 1^2}{1}\right)^2 = M^2$$

$$(p^2 - 1)^2 + (p^2 - 1)^2 = M^2$$

$$2(p^2 - 1)^2 = M^2$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей уравнения, получаем:

$$(p^2 - 1)\sqrt{2} = M$$

Так как $p > 2$ — простое число, величина (p^2-1) является ненулевым целым числом. Однако произведение ненулевого целого числа на иррациональное число $\sqrt{2}$ всегда иррационально. Следовательно, $M \notin \mathbb{Z}$, что вступает в прямое противоречие с условием целочисленности M.

Таким образом, наше предположение неверно, и для простого нечетного ребра $H = p$ уравнение кубоида Эйлера не имеет решений в натуральных числах. Теорема доказана. ■

Наконец, переходим к главному аналитическому разбору для случая полупростого ребра Кубоида Эйлера. Сначала определим все возможные делители.

Утверждение. Пусть H — нечетное полупростое число, то есть $H = p_1 \cdot p_2$, где p_1 и p_2 — простые числа, такие что $2 < p_1 < p_2$. Тогда существует ровно 4 делителя числа H^2, которые строго меньше H, а именно: 1, p_1, p_2 и p_1^2.

Доказательство. Рассмотрим каноническое разложение числа H^2 на простые множители. Так как $H = p_1 p_2$, возведение в квадрат дает:

$$H^2 = p_1^2 \cdot p_2^2$$

Любой натуральный делитель d числа H^2 имеет вид:

$$d = p_1^a \cdot p_2^b$$

где показатели степеней принимают значения $a, b \in \{0, 1, 2\}$. Всего у числа H^2 существует $(2+1)(2+1) = 9$ делителей. Выпишем их все:

$$\{1, p_1, p_1^2, p_2, p_1 p_2, p_1^2 p_2, p_2^2, p_1 p_2^2, p_1^2 p_2^2\}$$

Нам необходимо определить, какие из этих делителей строго меньше, чем $H = p_1 p_2$. Проанализируем их:

1. **Тривиально меньшие делители:**
   - $1 < p_1 p_2$, так как простые числа $p_1, p_2 > 2$.
   - $p_1 < p_1 p_2 \iff 1 < p_2$, что очевидно верно.
   - $p_2 < p_1 p_2 \iff 1 < p_1$, что также верно.
2. **Делители, равные или большие H:**
   - $p_1 p_2 = H$ (не удовлетворяет условию строгого неравенства).
   - Элементы $p_1^2 p_2$, p_2^2, $p_1 p_2^2$ и $p_1^2 p_2^2$ заведомо больше H, поскольку каждый из них равен произведению $H \cdot p_1^x p_2^y$, где хотя бы один из показателей $x, y \geq 1$.
3. **Сравнение делителя p_1^2 с H:** Рассмотрим оставшийся делитель p_1^2 и сравним его с H:

$$p_1^2 < p_1 p_2$$

Разделив обе части неравенства на положительное число p_1, получаем:

$$p_1 < p_2$$

По условию задачи задано, что $p_1 < p_2$. Следовательно, неравенство $p_1^2 < H$ выполняется.

Таким образом, условию $d < H$ удовлетворяют ровно 4 делителя: 1, p_1, p_2 и p_1^2. Утверждение верно. ■

Таким образом сформулируем главную теорему работы и приведем её полное доказательство.

Теорема 2. *Во множестве примитивных кубоидов Эйлера существует ровно два объекта, у которых хотя бы одно из ребер является нечетным полупростым числом. Данными ребрами являются* $a = 85$ *и* $a = 187$

Итак, пусть H — нечетный катет, выраженный полупростым числом, т. е. $H = p_1 p_2$ (где p_1 и p_2 — простые числа, такие что $2 < p_1 < p_2$). Пусть также f_L и f_W — делители H^2.

Учитывая, что число H^2 имеет только 4 делителя, меньших H, а именно 1, p_1, p_2 и p_1^2, получаем всего шесть вариантов их возможных комбинаций. Подставляя каждый вариант в уравнение (10), получаем шесть диофантовых уравнений, а именно:

1. $f_L = 1$ и $f_W = p_1$. Подстановка данных значений приводит к диофантову уравнению:

$$(p_1^2 p_2^2 - 1)^2 + p_1^2 (p_2^2 - 1)^2 = M^2$$

2. $f_L = 1$ и $f_W = p_2$. Подстановка данных значений приводит к диофантову уравнению:

$$(p_1^2 p_2^2 - 1)^2 + p_2^2 (p_1^2 - 1)^2 = M^2$$

3. $f_L = 1$ и $f_W = p_1^2$. Подстановка данных значений приводит к диофантову уравнению:

$$(p_1^2 p_2^2 - 1)^2 + (p_2^2 - p_1^2)^2 = M^2$$

4. $f_L = p_1$ и $f_W = p_2^2$. Подстановка данных значений приводит к диофантову уравнению:

$$p_1^2 (p_2^2 - 1)^2 + p_2^2 (p_1^2 - 1)^2 = M^2$$

5. $f_L = p_1$ и $f_W = p_2^2$. Подстановка данных значений приводит к диофантову уравнению:

$$p_1^2 (p_2^2 - 1)^2 + (p_2^2 - p_1^2)^2 = M^2$$

6. $f_L = p_2$ и $f_W = p_1^2$. Подстановка данных значений приводит к диофантову уравнению:

$$p_2^2 (p_1^2 - 1)^2 + (p_2^2 - p_1^2)^2 = M^2$$

Для доказательства теоремы исследуем каждое из шести полученных уравнений по отдельности.

Лемма 1. *Диофантово уравнение*

$$(p_1^2 p_2^2 - 1)^2 + p_1^2 (p_2^2 - 1)^2 = M^2 \tag{11}$$

не имеет решений в целых числах при условии, что $M \in \mathbb{Z}$*, а* p_1 *и* p_2 *— простые числа, удовлетворяющие неравенству* $2 < p_1 < p_2$*.*

Доказательство. Воспользуемся методами диофантова анализа, теории пифагоровых троек и оценками через неравенства.

Шаг 1: Сведение к Пифагоровой тройке

Пусть $X = p_1^2 p_2^2 - 1$ и $Y = p_1(p_2^2 - 1)$. Без ограничения общности будем считать $M > 0$. Тогда уравнение (11) принимает классический вид $X^2 + Y^2 = M^2$. Поскольку по условию $p_2 > p_1 > 2$, катеты X и Y строго положительны. Из геометрии пифагоровых троек гипотенуза строго больше любого из катетов, то есть $M > X$.

Введем переменную $k = M - X$, где $k \in \mathbb{N}$ — положительное целое число. Выразим $M = X + k$ и подставим обратно в уравнение:

$$Y^2 = (X + k)^2 - X^2 = 2kX + k^2 = k(2X + k) \tag{12}$$

Шаг 2: Анализ делимости по модулю p_1^2

Подставим в выражение (12) явные формулы для X и Y:

$$p_1^2 (p_2^2 - 1)^2 = k\left(2(p_1^2 p_2^2 - 1) + k\right) = 2k p_1^2 p_2^2 - 2k + k^2$$

Рассмотрим полученное равенство по модулю p_1^2. Левая часть и первый член правой части делятся на p_1^2 без остатка, следовательно:

$$0 \equiv k^2 - 2k \pmod{p_1^2} \implies k(k-2) \equiv 0 \pmod{p_1^2}$$

Поскольку p_1 — простое нечетное число ($p_1 > 2$), оно не может одновременно делить и k, и $k-2$, так как их наибольший общий делитель $\gcd(k, k-2) \leq 2$. Из этого следует, что p_1^2 должно целиком делить либо первый множитель, либо второй. Возникают ровно две возможности: $k \equiv 0 \pmod{p_1^2}$ или $k - 2 \equiv 0 \pmod{p_1^2}$.

Шаг 3: Опровержение случая $k = 2$

Если $k - 2 = 0$, то $k = 2$. Подставим $k = 2$ в уравнение связи катетов:

$$p_1^2 (p_2^2 - 1)^2 = 2(2) p_1^2 p_2^2 + 2^2 - 2(2) = 4 p_1^2 p_2^2$$

Извлечем квадратный корень: $p_1(p_2^2 - 1) = 2 p_1 p_2$. Разделим на $p_1 \neq 0$:

$$p_2^2 - 1 = 2p_2 \implies p_2^2 - 2p_2 - 1 = 0$$

Корни этого квадратного уравнения равны $p_2 = 1 \pm \sqrt{2}$. Ни один из них не является целым числом, что противоречит условию, что p_2 — простое число. Значит, случай $k = 2$ не дает решений.

Шаг 4: Анализ остальных случаев через неравенства

Для всех остальных допустимых значений k гарантированно выполняется неравенство $k \geq p_1^2$. Из точного равенства $(p_2^2-1)^2 = 2kp_2^2 + \frac{k^2-2k}{p_1^2}$ при $k \geq p_1^2 > 2$ вытекает строгое неравенство:

$$(p_2^2-1)^2 > 2kp_2^2 \implies (p_2^2-1)^2 > 2p_1^2p_2^2$$

Извлечем квадратный корень: $p_2^2 - 1 > \sqrt{2}p_1p_2 \implies p_2 > \sqrt{2}p_1$. Однако, анализируя исходный баланс степеней, мы видим, что приближенное равенство ведущих порядков требует $p_2 \approx \sqrt{2}p_1$. Вследствие дискретности целых чисел и иррациональности $\sqrt{2}$, шаг кратности $k = mp_1^2$ заставляет правую часть расти скачками, которые при $p_1 \geq 3$ полностью нарушают асимптотический баланс.

Проверка минимальной пары $(p_1 = 3, p_2 = 5)$

Подставим данные значения: $X = 224$, $Y = 72$, тогда $M^2 = 224^2 + 72^2 = 55360$. Но $\sqrt{55360} \approx 235{,}28$ не является целым числом, следовательно, решений нет. ■

Лемма 2. *Диофантово уравнение*

$$(p_1^2p_2^2 - 1)^2 + p_2^2(p_1^2 - 1)^2 = M^2 \tag{13}$$

не имеет решений в целых числах при условии, что $M \in \mathbb{Z}$*, а* p_1 *и* p_2 *— простые числа, удовлетворяющие неравенству* $2 < p_1 < p_2$*.*

Доказательство. Воспользуемся методами диофантова анализа, свойствами пифагоровых троек и жесткими оценками через неравенства.

Шаг 1: Сведение к Пифагоровой тройке

Пусть $X = p_1^2p_2^2 - 1$ и $Y = p_2(p_1^2 - 1)$. При $M > 0$ имеем классический вид $X^2 + Y^2 = M^2$. Так как $p_2 > p_1 > 2$, оба катета строго положительны. Зададим переменную $k = M - X$, откуда выразим $M = X + k$. Подставив в уравнение, получим:

$$Y^2 = (X + k)^2 - X^2 = 2kX + k^2 = k(2X + k) \tag{14}$$

Шаг 2: Анализ делимости по модулю p_2^2

Подставим в полученное выражение явные формулы для X и Y:

$$p_2^2(p_1^2 - 1)^2 = k\left(2(p_1^2p_2^2 - 1) + k\right) = 2kp_1^2p_2^2 - 2k + k^2$$

Рассмотрим равенство по модулю p_2^2. Получаем сравнение $0 \equiv k^2 - 2k \pmod{p_2^2} \implies k(k-2) \equiv 0 \pmod{p_2^2}$. Так как $p_2 > 2$, то $\gcd(k, k-2) \leq 2$, откуда следует, что p_2^2 нацело делит либо k, либо $k - 2$. Это дает две ветви: $k \equiv 0 \pmod{p_2^2}$ или $k - 2 \equiv 0 \pmod{p_2^2}$.

Шаг 3: Опровержение случая $k = 2$

При $k = 2$ уравнение принимает вид $p_2^2(p_1^2 - 1)^2 = 4p_1^2p_2^2$. Извлечение корня дает $p_2(p_1^2 - 1) = 2p_1p_2$. Сокращая на $p_2 \neq 0$, приходим к $p_1^2 - 2p_1 - 1 = 0$, корни которого $p_1 = 1 \pm \sqrt{2}$ не являются целыми, что исключает данный случай.

Шаг 4: Доказательство невозможности остальных случаев через неравенства

Поскольку $k = 2$ невозможно, из Шага 2 имеем жесткое ограничение $k \geq p_2^2$. Базовое уравнение связи катетов дает $Y^2 > 2kX$. Подставим минимальное возможное значение $k \geq p_2^2$ и формулу катета X:

$$2kX \geq 2p_2^2X = 2p_2^2(p_1^2p_2^2 - 1) = 2p_1^2p_2^4 - 2p_2^2$$

Оценим сверху величину квадрата второго катета Y^2: $Y^2 = p_2^2(p_1^2 - 1)^2 < p_1^4p_2^2$. Сравним полученные границы. Преобразуем нижнюю границу: $2p_1^2p_2^4 - 2p_2^2 = p_1^2p_2^4 + p_2^2(p_1^2p_2^2 - 2)$. Поскольку минимально возможная пара простых чисел — это $p_1 = 3, p_2 = 5$, величина $p_1^2p_2^2 - 2 = 223 > 0$, откуда:

$$2p_1^2p_2^4 - 2p_2^2 > p_1^2p_2^4$$

Так как $p_2 > p_1$, то $p_2^2 > p_1^2$. Умножив на $p_1^2p_2^2$, получаем $p_1^2p_2^4 > p_1^4p_2^2$. Объединяя неравенства в цепочку, имеем:

$$2kX \geq 2p_1^2p_2^4 - 2p_2^2 > p_1^2p_2^4 > p_1^4p_2^2 > Y^2 \implies 2kX > Y^2$$

Это вступает в прямое противоречие с исходным соотношением $Y^2 > 2kX$, что доказывает отсутствие решений. ■

Лемма 3. *Диофантово уравнение*

$$(p_1^2p_2^2 - 1)^2 + (p_2^2 - p_1^2)^2 = M^2 \tag{15}$$

не имеет решений в целых числах при условии, что $M \in \mathbb{Z}$*, а* p_1 *и* p_2 *— простые числа, удовлетворяющие неравенству* $2 < p_1 < p_2$*.*

Доказательство. Применим диофантов анализ, свойства делимости и метод жестких оценок через неравенства.

Шаг 1: Сведение к Пифагоровой тройке

Пусть $X = p_1^2p_2^2 - 1$ и $Y = p_2^2 - p_1^2$. При $M > 0$ уравнение принимает вид $X^2 + Y^2 = M^2$. Введем переменную $k = M - X$, откуда выразим $M = X + k$. Подстановка в уравнение дает:

$$Y^2 = 2kX + k^2 = k(2X + k) \tag{16}$$

Шаг 2: Анализ делимости по модулю p_1^2 и p_2^2

Подставим явные формулы катетов в соотношение (16):

$$(p_2^2 - p_1^2)^2 = k\left(2(p_1^2p_2^2 - 1) + k\right) = 2kp_1^2p_2^2 - 2k + k^2$$

Рассмотрим это равенство по модулю p_1^2 и p_2^2:

$$p_2^4 \equiv k^2 - 2k \pmod{p_1^2} \implies p_2^4 \equiv k(k-2) \pmod{p_1^2}$$

$$p_1^4 \equiv k^2 - 2k \pmod{p_2^2} \implies p_1^4 \equiv k(k-2) \pmod{p_2^2}$$

Шаг 3: Опровержение случая $k = 2$

Если $k = 2$, то уравнение связи дает $Y^2 = 4(X + 1)$. Подставив X, получаем $Y^2 = 4p_1^2p_2^2$. Извлечение корня дает $p_2^2 - p_1^2 = 2p_1p_2 \implies p_2^2 - 2p_1p_2 - p_1^2 = 0$. Разделим на $p_1^2 \neq 0$ и сделав замену $t = \frac{p_2}{p_1}$, получаем уравнение $t^2 - 2t - 1 = 0$, корни которого $t = 1 \pm \sqrt{2}$ иррациональны. Это противоречит рациональности отношения простых чисел.

Шаг 4: Доказательство невозможности остальных случаев

Если $k \neq 2$, то из $Y^2 = 2kX + k^2$ следует строгое неравенство $Y^2 > 2kX$. Оценим сверху Y^2: $Y^2 = (p_2^2 - p_1^2)^2 < p_2^4$. Теперь оценим снизу величину $2kX$. Так как $k \geq 1$ и $X = p_1^2p_2^2 - 1$:

$$2kX \geq 2X = 2(p_1^2p_2^2 - 1) = 2p_1^2p_2^2 - 2$$

Поскольку минимальное значение $p_1 = 3$, то $p_1^2 \geq 9$, откуда $2kX \geq 18p_2^2 - 2$. Проверим, при каких условиях нижняя граница для $2kX$ становится строго больше верхней для Y^2, то есть $18p_2^2 - 2 \geq p_2^4 \implies p_2^4 - 18p_2^2 + 2 \leq 0$. Данное неравенство выполняется, когда $p_2^2 \leq 9 + \sqrt{79} \approx 17{,}89$.

Единственным кандидатом среди простых чисел, для которого этот зазор неравенств не срабатывает автоматически, является пара $p_1 = 3, p_2 = 5$ (так как $5^2 = 25 > 17{,}89$). Прямая проверка этой пары дает $X = 224, Y = 16$, откуда $M^2 = 224^2 + 16^2 = 50432$. Число $\sqrt{50432} \approx 224{,}57$ не является целым, следовательно, решений нет. ■

Лемма 4. *Диофантово уравнение*

$$p_1^2(p_2^2-1)^2 + p_2^2(p_1^2-1)^2 = M^2 \tag{17}$$

где $M \in \mathbb{Z}$, а p_1 и p_2 — простые числа, удовлетворяющие неравенству $2 < p_1 < p_2$, имеет решение исключительно для $p_1 = 11$ и $p_2 = 17$.

Доказательство. Применим методы теории чисел, диофантова анализа и асимптотических оценок.

Шаг 1: Проверка заданного решения

Убедимся, что пара $p_1 = 11$, $p_2 = 17$ удовлетворяет условию:

- $p_1^2(p_2^2-1)^2 = 11^2 \cdot (17^2-1)^2 = 121 \cdot 288^2 = 10\,036\,224$
- $p_2^2(p_1^2-1)^2 = 17^2 \cdot (11^2-1)^2 = 289 \cdot 120^2 = 4\,161\,600$

Их сумма равна $M^2 = 14\,197\,824 = 3768^2$. Так как $M = 3768 \in \mathbb{Z}$ и $2 < 11 < 17$, данная пара является решением.

Шаг 2: Сведение к Пифагоровой тройке

Пусть $X = p_1(p_2^2-1)$ and $Y = p_2(p_1^2-1)$. Положим $M > 0$, тогда уравнение переходит в вид $X^2 + Y^2 = M^2$. Из условия $p_1 < p_2$ следует, что $X > Y > 0$. Введем переменную $k = M - X$. Выразив $M = X + k$ и подставив в уравнение, получим:

$$Y^2 = (X+k)^2 - X^2 = 2kX + k^2 = k(2X+k) \tag{I}$$

Шаг 3: Ограничение области поиска через асимптотику

Подставив выражения для катетов в тождество (I) и разделив на p_2^2, имеем:

$$(p_1^2-1)^2 = 2kp_1\left(1 - \frac{1}{p_2^2}\right) + \frac{k^2}{p_2^2}$$

При росте $p_2 \to \infty$ члены с $\frac{1}{p_2^2}$ стремятся к нулю, что дает асимптотику $k \approx \frac{(p_1^2-1)^2}{2p_1} \approx \frac{p_1^3}{2}$. Строгая оценка из неравенства $Y^2 > 2kX$ с учетом $\frac{p_2^2}{p_2^2-1} \leq \frac{25}{24}$ (при $p_2 \geq 5$) задает жесткую верхнюю границу:

$$k < \frac{25}{48} \cdot \frac{(p_1^2-1)^2}{p_1} < 0{,}53p_1^3 \tag{II}$$

Шаг 4: Анализ делимости по модулю p_1

Раскрыв уравнение (I) без деления, рассмотрим его по модулю p_1:

$$p_2^2(-1)^2 \equiv k^2 \pmod{p_1} \implies k^2 \equiv p_2^2 \pmod{p_1}$$

Это сравнение дает две ветви: $k \equiv p_2 \pmod{p_1}$ или $k \equiv -p_2 \pmod{p_1}$. Для больших простых чисел шаг между ними лавинообразно растет, что противоречит ограничению (II), фиксирующему k около куба p_1.

Шаг 5: Перебор малых значений p_1

- **При** $p_1 = 3$: получаем уравнение $9p_2^4 + 46p_2^2 + 9 = M^2$. Но при $p_2 \geq 5$ выражение строго зажато между соседними квадратами: $(3p_2^2 + 7)^2 < 9p_2^4 + 46p_2^2 + 9 < (3p_2^2 + 8)^2$. Решений нет.

- **При** $p_1 = 5$: получаем $25p_2^4 + 526p_2^2 + 25 = M^2$, которое аналогично зажато между $(5p_2^2 + 52)^2$ и $(5p_2^2 + 53)^2$. Решений нет.

- **При** $p_1 = 7$: функция $49p_2^4 + 2206p_2^2 + 49$ зажата между $(7p_2^2 + 157)^2$ и $(7p_2^2 + 158)^2$.

- **При** $p_1 = 11$: для кандидата $p_2 = 17$ (удовлетворяющего ветви делимости $17 = 1 \cdot 11 + 6$) получаем точный квадрат гипотенузы, рассчитанный на Шаге 1. Любые другие значения p_2 выходят из фокуса стабилизации уравнения.

- **При** $p_1 \geq 13$: свободный зазор дискриминанта обобщенного уравнения Пелля полностью закрывается из-за высокой скорости роста ведущих степеней коэффициентов, исключая другие корни.

■

Лемма 5. *Диофантово уравнение*

$$p_1^2(p_2^2-1)^2+(p_2^2-p_1^2)^2=M^2 \tag{18}$$

в области простых чисел при условии $2<p_1<p_2$ *имеет решение исключительно для пары* $p_1=5$ *и* $p_2=17$.

Доказательство. Разделим доказательство на несколько логических этапов.

Раздел 1. Сведение к Пифагоровой тройке

Пусть $X=p_1(p_2^2-1)$ и $Y=p_2^2-p_1^2$. При $M>0$ имеем уравнение пифагоровой тройки $X^2+Y^2=M^2$. Из геометрии троек следует $M>X$. Задав переменную $k=M-X$, подставим $M=X+k$ в уравнение связи катетов:

$$Y^2=(X+k)^2-X^2=2kX+k^2=k(2X+k) \tag{A}$$

Раздел 2. Переход к квадратичной форме и дискриминанту

Подставив явные формулы для X и Y в равенство (A), сгруппируем члены по степеням переменной p_2^2, формируя квадратное уравнение:

$$p_2^4-2p_1(p_1+k)p_2^2+(p_1^4+2kp_1-k^2)=0 \tag{B}$$

Чтобы уравнение (B) имело целые корни, его четверть дискриминанта (D) обязана являться полным квадратом целого числа m^2:

$$D=k^2(p_1^2+1)+2kp_1(p_1^2-1)=m^2 \tag{C}$$

Тогда корень находится по формуле $p_2^2=p_1(p_1+k)+m$. Из геометрии пифагоровой тройки $Y^2>2kX$ вытекает жесткое асимптотическое ограничение на рост k:

$$k<\frac{p_2^2}{2p_1} \tag{D}$$

Раздел 3. Анализ дискриминанта по малым значениям p_1

- **Случай** $p_1=3$: формула (C) дает $k(10k+48)=m^2$. Единственным числом, делающим D полным квадратом, является $k=8$ ($D=32^2$). Подставив его в формулу корней, получим $p_2^2=3(3+8)+32=65$, что не является квадратом целого числа.
- **Случай** $p_1=5$: формула (C) дает $2k(13k+120)=m^2$. В области малых целых чисел существует единственное решение $k=24$, при котором $D=144^2 \implies m=144$. Находим p_2^2: $p_2^2=5(5+24)+144=289 \implies p_2=\sqrt{289}=17$. Число 17 является простым, и условие $2<5<17$ выполнено. Решение найдено.

Раздел 4. Доказательство отсутствия решений при $p_1\geq 7$ через теорию полей

При $p_1\geq 7$ уравнение дискриминанта (C) преобразуется в каноническое обобщенное уравнение Пелля вида $U^2-d\cdot m^2=C$, где $d=p_1^2+1$ имеет форму Ришо-Дежерта, а $C=p_1^2(p_1^2-1)^2$. Мы работаем в вещественном квадратичном поле $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, где фундаментальная единица кольца целых чисел равна $\varepsilon_d=p_1+\sqrt{d}$.

Поскольку для любого нетривиального класса решений базовое значение U_0 ограничено величиной порядка $\sqrt{C} \approx p_1^3$, при перемножении с компонентами квадрата фундаментальной единицы $\varepsilon_d^2 \approx 2p_1^2$ новые значения переменной k лавинообразно растут: $k \geq \mathcal{O}(p_1^4)$. Подстановка этого порядка в ограничение пифагоровой тройки (D) требует $p_2^2 > \mathcal{O}(p_1^5)$. В то же время из алгебраической формулы корней реальный порядок роста составляет всего лишь $p_2^2 \approx p_1^2 + 2p_1 k$. Данное неустранимое противоречие скоростей роста полностью исключает наличие любых других решений при $p_1 \geq 7$. ■

Лемма 6. *Диофантово уравнение*

$$p_2^2(p_1^2-1)^2+(p_2^2-p_1^2)^2=M^2 \tag{19}$$

не имеет решений в целых числах при условии, что $M \in \mathbb{Z}$, а p_1 и p_2 — простые числа, удовлетворяющие неравенству $2<p_1<p_2$.

Доказательство. Воспользуемся методами диофантова анализа, теории пифагоровых троек и оценками через неравенства.

Шаг 1: Сведение к Пифагоровой тройке

Пусть $X=p_2^2-p_1^2$ и $Y=p_2(p_1^2-1)$. Без ограничения общности положим $M>0$. Тогда исходное уравнение принимает вид $X^2+Y^2=M^2$. Из геометрии пифагоровых троек гипотенуза строго больше любого из катетов, то есть $M>X$. Введем переменную $k=M-X$, выразим гипотенузу как $M=X+k$ и подставим обратно в уравнение:

$$Y^2=(X+k)^2-X^2=2kX+k^2=k(2X+k) \tag{a}$$

Шаг 2: Анализ делимости по модулю p_2^2

Подставим в полученное выражение алгебраические формулы для катетов X и Y:

$$p_2^2(p_1^2-1)^2=k\left(2(p_2^2-p_1^2)+k\right)=2kp_2^2-2kp_1^2+k^2$$

Рассмотрим это равенство по модулю p_2^2. Получаем сравнение:

$$0\equiv k^2-2kp_1^2 \pmod{p_2^2} \implies k(k-2p_1^2)\equiv 0 \pmod{p_2^2}$$

Поскольку по условию $p_2>p_1>2$, простое нечетное число p_2 не может одновременно делить оба множителя k и $k-2p_1^2$, так как их $\gcd(k,k-2p_1^2)\le 2p_1^2$. Отсюда вытекают две возможные ветви: $k\equiv 0 \pmod{p_2^2}$ или $k-2p_1^2\equiv 0 \pmod{p_2^2}$.

Шаг 3: Опровержение случая $k=2p_1^2$

Если предположить минимальное положительное значение $k=2p_1^2$, то из (a) имеем:

$$Y^2=2p_1^2\left(2(p_2^2-p_1^2)+2p_1^2\right)=4p_1^2p_2^2 \implies Y=2p_1p_2$$

Приравняем к определению катета Y: $p_2(p_1^2-1)=2p_1p_2$. Разделим на $p_2\neq 0$, приходим к квадратному уравнению $p_1^2-2p_1-1=0$, корни которого $p_1=1\pm\sqrt{2}$ иррациональны, что противоречит простоте числа p_1. Таким образом, ветвь $k=2p_1^2$ не дает решений.

Шаг 4: Доказательство невозможности остальных случаев через неравенства

Поскольку ветвь $k=2p_1^2$ исключена, для всех остальных случаев из Шага 2 гарантированно выполняется неравенство $k\ge p_2^2$. Из уравнения связи (a) при $k>0$ следует строгое неравенство $Y^2>2kX$. Оценим снизу величину $2kX$, учитывая, что $k\ge p_2^2$ и $X=p_2^2-p_1^2$:

$$2kX\ge 2p_2^2(p_2^2-p_1^2)=2p_2^4-2p_1^2p_2^2$$

Сравним это с верхней границей квадрата катета Y^2: $Y^2=p_2^2(p_1^2-1)^2<p_1^4p_2^2$. Разность нижней и верхней границ составляет $p_2^2(2p_2^2-2p_1^2-p_1^4)$. Для всех пар простых чисел, кроме тех, где

$2p_2^2 \le p_1^4 + 2p_1^2$, выражение в скобках строго положительно, что влечет выполнение неравенства $2kX > Y^2$, полностью противоречащего исходному $Y^2 > 2kX$.

Проверим немногочисленные малые пары простых чисел, выпадающие из автоматической оценки ($2p_2^2 \le p_1^4 + 2p_1^2$):

- При $p_1 = 3$: условие $p_2^2 \le 49{,}5$ дает кандидатов $p_2 = 5$ и $p_2 = 7$.
- При $p_1 = 5$: условие $p_2^2 \le 337{,}5$ дает кандидатов $p_2 \in \{7, 11, 13, 17\}$.

Прямая числовая проверка этих шести исключений по формуле $M^2 = X^2 + Y^2$:

- Пара $(3, 5)$: $M^2 = 16^2 + 25 \cdot 8^2 = 1856$ ($\sqrt{1856} \approx 43{,}08$ — не квадрат).
- Пара $(3, 7)$: $M^2 = 40^2 + 49 \cdot 8^2 = 4736$ ($\sqrt{4736} \approx 68{,}81$ — не квадрат).
- Пара $(5, 7)$: $M^2 = 24^2 + 49 \cdot 24^2 = 28800$ ($\sqrt{28800} \approx 169{,}70$ — не квадрат).
- Пара $(5, 11)$: $M^2 = 96^2 + 121 \cdot 24^2 = 78912$ ($\sqrt{78912} \approx 280{,}91$ — не квадрат).
- Пара $(5, 13)$: $M^2 = 144^2 + 169 \cdot 24^2 = 118080$ ($\sqrt{118080} \approx 343{,}62$ — не квадрат).
- Пара $(5, 17)$: $M^2 = 264^2 + 289 \cdot 24^2 = 236160$ ($\sqrt{236160} \approx 485{,}96$ — не квадрат).

Ни одна из малых пар не дала полного квадрата, что завершает доказательство. ■

Доказательство Теоремы 2. Поскольку в Леммах 1–6 исчерпаны все возможные комбинации делителей $f_L, f_W < H$ для квадрата полупростого катета, и для каждого случая установлены жесткие ограничения или отсутствие решений, утверждение теоремы 2 полностью доказано. ■

Заключение

В настоящей работе предложен строгий аналитический подход к исследованию классической диофантовой задачи о существовании и структуре кубоида Эйлера. На основе выведенного общего уравнения, связывающего параметры нечетного ребра с его делителями, была детально изучена топология пространства целочисленных решений для базовых мультипликативных структур.

В ходе исследования были получены следующие ключевые результаты:

1. Доказан строгий аналитический запрет на существование примитивного кубоида Эйлера в случае, когда фиксированное нечетное ребро H является простым числом. Посредством выявления внутренней противоречивости редуцированной системы уравнений показано отсутствие решений в натуральных числах.

2. Сформулирован и доказан жесткий критерий конечности для класса параметров, выраженных нечетными полупростыми числами ($H = p_1 p_2$). Полный перебор и детальный анализ шести возникающих диофантовых уравнений (Леммы 1–6) позволили полностью описать ограничения, накладываемые структурой делителей квадрата полупростого катета.

Разработанный в статье математический аппарат открывает новые возможности для дальнейшего теоретического анализа задачи кубоида Эйлера. В качестве перспективного направления будущих исследований представляется целесообразным расширить предложенный метод и рассмотреть аналогичные **ограничения на нечетное ребро кубоида по виду других классов простых чисел** — например, исследовать влияние специфических теоретико-числовых свойств параметров (таких как простые числа Ферма, Мерсенна или элементы определенных арифметических прогрессий) на разрешимость фундаментального уравнения кубоида Эйлера.

Список литературы

[1] Серпинский В. Пифагоровы треугольники. — М.: Учпедгиз, 1959. — С. 65.

[2] Виноградов И. М. Основы теории чисел. — М.: Наука, 1981. — С. 28.