Циклы обобщённой функции Коллатца $f_b(n) = d(3n + b)$

Георгий Гуляев

4 ноября 2026 г.

Аннотация

Рассматривается однопараметрическое семейство отображений $f_b(n) = d(3n + b)$, где d — операция удаления чётности, а параметр b пробегает нечётные натуральные значения. Доказано, что любой цикл отображения f_b имеет вид

$$x_0 = \frac{b\, S(k_1, \ldots, k_L)}{2^K - 3^L}, \qquad K = \sum k_i,$$

где S — явно выписываемая сумма смешанных степеней. Доказаны две структурные теоремы: (1) если (x_i) — цикл f_b, то $(3x_i)$ — цикл f_{3b} с той же последовательностью показателей; (2) цикл однозначно восстанавливается по циклической последовательности $(k_1, \ldots, k_L)$ с точностью до умножения $(b, x) \to (3b, 3x)$. На основе численного эксперимента для $b \le 10^4$ (около 5000 циклов) описана структура отображения $b \mapsto (L(b), K(b))$: показано, что отношение K/L стремится к 2 при $L \to \infty$, распределение размеров слоёв подчиняется степенному закону с показателем $\approx 2{,}34$, и около 80% слоёв являются одиночными 3-орбитами. Приведены рекордные циклы при $b = 3299$ ($L = 1000$) и $b = 8431$ ($L = 1136$). В приложении приведён полный код на языке Julia.

1. Введение

1.1. Классическая задача Коллатца

В 1937 году Л. Коллатц сформулировал гипотезу: итерации отображения

$$C(n) = \begin{cases} 3n+1, & n \text{ нечётно}, \\ n/2, & n \text{ чётно}, \end{cases}$$

применённого к любому натуральному n, достигают единицы за конечное число шагов. Несмотря на простоту формулировки, гипотеза остаётся открытой, а её численные проверки проведены до $n < 2^{68}$ и выше. Обзор теории можно найти в [1].

Классический подход состоит в том, чтобы объединять серии последовательных делений на 2 в один шаг, то есть делить сразу на 2^α, где α - максимальная степень простого числа 2, входящее в разложение n на простые множители.

Рассмотрим этот прием в общем случае, когда вместо 2 берется любое простое p. Определим функцию $r(n,p) = \frac{n}{p^\alpha}$, где $\alpha \geq 0$ - максимальная степень в n простых множителей p, которая удаляет из разложения n все простые сомножители p.

С учетом этого определения, вместо функции Коллаца $C(n)$ используется функция:

$$\tilde{C}(n) = \begin{cases} r(3n+1,2), \text{если } n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2) \\ r(n,2), \text{если } n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2). \end{cases}$$

Отсюда получается отображение

$$C'(n) = r(3n+1),2), \tag{1}$$

которое определено на нечётных числах и переводит их в нечётные. Гипотеза Коллатца эквивалентна утверждению, что орбита любого нечётного n под действием C' достигает 1.

1.2. Обобщение

В работе [2] изучалась более общая функция и циклы, которые она порождает:

$$T(n) = r(an + b, p),$$

где p - простое, $b \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \not\equiv 0(\text{mod p})$.

В настоящей работе исследуется ее частный случай $a = 3,\ p = 2$:

$$f_b(n) = r(3n + b, 2),\ r(m, 2) = \frac{m}{2^\alpha},\ (\alpha : max\ 2^\alpha | m),\ b \equiv 1 \pmod 2. \quad (2)$$

При $b = 1$ имеем $f_1 = \tilde{C}$. Основное содержание работы — циклы отображения (2), то есть конечные орбиты

$$x_0 \mapsto x_1 \mapsto \cdots \mapsto x_{L-1} \mapsto x_0, \qquad x_{i+1} = f_b(x_i),$$

для различных значений параметра b.

Обобщение функции Коллатца (2) интересно по нескольким причинам.

1. Оно убирает жёсткость классического случая. Цикл длины L отображения C требует выполнения соотношения $2^K \approx 3^L$ с точностью до малой поправки, что делает циклы крайне редкими. При $b > 1$ слагаемое b может компенсировать разницу $2^K - 3^L$, и циклы перестают быть исключением.

2. Оно позволяет изучать циклы конструктивно. Для каждого цикла выписывается явная формула вида (3), и численное построение циклов становится доступным.

3. Оно ставит новые структурные задачи. Отображение $b \mapsto (L(b), K(b))$ имеет нетривиальную слоистую структуру, которую мы частично описываем.

1.3. Основной результат

Пусть $\nu_p(m)$ - максимальный показатель степени простого p, входящего в раздожение на простые множители натурального числа m. Для любого цикла отображения f_b длины L определим показатели $k_i = \nu_2(3x_{i-1} + b)$,

так что $x_i = (3x_{i-1} + b)/2^{k_i}$. Пусть $K = \sum_{i=1}^{L} k_i$. Тогда имеет место точная формула

$$x_0 = \frac{b\, S(k_1, \ldots, k_L)}{2^K - 3^L}, \tag{3}$$

где $S(k_1, \ldots, k_L)$ — положительное целое, определённое соотношением (4) ниже. Из (3) немедленно следует необходимая оценка

$$\frac{K}{L} > \log_2 3 \approx 1{,}58496.$$

Случай $b = 1$ требует почти точного приближения $K/L \to \log_2 3$, поскольку при этом $2^K - 3^L$ должно оставаться маленьким. Для обобщённого f_b при $x \sim b$ среднее значение ν_2 случайного нечётного равно 2, и цикл замыкается при $K/L \approx 2$ без редких приближений. Именно это делает возможным систематическое исследование циклов.

В разделе 2 мы формализуем уравнение (3) и доказываем две теоремы о структуре циклов. В разделе 3 описываем численный эксперимент для $b \leq 10^4$. Раздел 4 содержит открытые вопросы.

2. Теория

2.1. Обозначения

Зафиксируем нечётное $b \geq 1$. Для нечётного m положим $\nu_2(m)$ — показатель двойки, $d(m) = m/2^{\nu_2(m)}$ — нечётная часть. Отображение f_b действует на нечётных числах по формуле $f_b(n) = d(3n + b)$.

Определение 1. *Циклом* длины L отображения f_b называется последовательность различных нечётных чисел $x_0, x_1, \ldots, x_{L-1}$, для которой $x_{i+1} = f_b(x_i)$ при $i = 0, \ldots, L-2$ и $x_0 = f_b(x_{L-1})$.

Для цикла длины L положим $k_i = \nu_2(3x_{i-1} + b)$ при $i = 1, \ldots, L$ (индексы по модулю L, $x_L = x_0$). Тогда $x_i = (3x_{i-1} + b)/2^{k_i}$, где $k_i \geq 1$. Число $K = \sum_{i=1}^{L} k_i$ называется *суммарным порядком цикла*.

2.2. Основное уравнение цикла

Лемма 1. *Пусть (x_i) — цикл f_b длины L с показателями $(k_1, \ldots, k_L)$. Тогда*

$$x_0 = \frac{b\,S}{2^K - 3^L}, \qquad S = \sum_{j=1}^{L} 3^{\,L-j}\, 2^{\,k_1+\cdots+k_{j-1}}, \tag{4}$$

где пустая сумма $k_1 + \cdots + k_0$ равна 0.

Доказательство. Раскроем рекурсию $x_i = (3x_{i-1} + b)/2^{k_i}$ вдоль всего цикла. Из соотношения

$$x_{i-1} = \frac{x_i \cdot 2^{k_i} - b}{3}$$

получаем после L шагов

$$x_0 = \frac{x_0 \cdot 2^K - b\,S}{3^L}$$

для некоторого целого S. Явно выписывая итерации:

$$x_0 \cdot 2^K = x_0 \cdot 3^L + b \cdot S, \qquad S = \sum_{j=0}^{L-1} 3^j\, 2^{\,k_L+k_{L-1}+\cdots+k_{L-j+1}}.$$

Переставляя индексы, приходим к (4). □

Следствие 1. *Необходимым условием существования цикла длины L является*

$$2^K > 3^L, \qquad \text{то есть} \qquad \frac{K}{L} > \log_2 3.$$

Замечание 1. Формула (4) объясняет, почему в классическом случае $b = 1$ циклы редки: при $b = 1$ числитель S не зависит от b, и x_0 велико только при малом зазоре $2^K - 3^L$. При $b > 1$ числитель масштабируется как b, и цикл возможен при любом $K/L > \log_2 3$.

2.3. Масштабирование

Теорема 1. *Пусть $(x_0, \ldots, x_{L-1})$ — цикл отображения f_b с показателями $(k_1, \ldots, k_L)$ и $j \geq 0$. Тогда $(3^j x_0, \ldots, 3^j x_{L-1})$ — цикл отображения $f_{3^j b}$ с теми же показателями k_i.*

Доказательство. Достаточно проверить случай $j = 1$. Имеем

$$3(3x_i) + 3b = 3(3x_i + b),$$

следовательно $\nu_2(3(3x_i) + 3b) = \nu_2(3x_i + b) = k_i$ (умножение на нечётное 3 не меняет показатель двойки). Поэтому

$$f_{3b}(3x_i) = \frac{3(3x_i) + 3b}{2^{k_i}} = \frac{3(3x_i + b)}{2^{k_i}} = 3x_{i+1},$$

что и требовалось. Общий случай получается итерацией. $\square$

Следствие 2. *Величина (L, K) инвариантна относительно $b \mapsto 3^j b$. Кроме того, отношение $x_{\max}(b)/b$ также инвариантно.*

Замечание 2. Эмпирически масштабирование $b \to 3b$ видно повсеместно. Например, в слое $(L, K) = (25, 40)$ содержатся $b \in \{191, 573, 1719, 5157\}$, где $573 = 3 \cdot 191$, $1719 = 9 \cdot 191$, $5157 = 27 \cdot 191$; при этом $x_{\max}/b \approx 379{,}827$ для всех четырёх значений.

2.4. Параметризация циклов

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{C}_b$ — множество циклов f_b с точностью до циклического сдвига. Определим отображение $\Phi\colon \mathcal{C}_b \to \mathbb{N}^L$ формулой $\Phi(x_0, \dots, x_{L-1}) = (k_1, \dots, k_L)$. Тогда Φ инъективно. Более того, если два цикла $(x_i) \subset \mathcal{C}_b$ и $(x'_i) \subset \mathcal{C}_{b'}$ имеют одинаковые k-слова, то b'/b есть степень тройки, а $x'_i/x_i = b'/b$ для всех i.*

Доказательство. Пусть задано k-слово $(k_1, \dots, k_L)$ и параметр b. Тогда x_0 восстанавливается по формуле (4) однозначно. Далее, $x_1 = f_b(x_0)$, $x_2 = f_b(x_1)$, … определяются однозначно. Значит, в пределах одного b отображение Φ инъективно.

Если же одинаковое k-слово реализуется при двух разных b, b', то из (4) имеем

$$\frac{x_0}{x'_0} = \frac{b}{b'}.$$

Повторяя для $x_1, x_2, \dots$, получаем $x_i/x'_i = b/b'$ при всех i. Поскольку все x_i, x'_i нечётны, отношение b/b' должно быть нечётным рациональным. Из условия цикла $3x_i + b = 2^{k_{i+1}} x_{i+1}$ следует, что простое 3 — единственный

нечётный простой, входящий в $3x_i + b$ при всех i. Значит $b' = 3^j b$ для некоторого $j \in \mathbb{Z}$, и $x'_i = 3^j x_i$. $\square$

Следствие 3. *Размер слоя*

$$\Lambda(L, K) := \#\{b \le B : \ (L(b), K(b)) = (L, K)\}$$

определяется числом циклических k-слов длины L с суммой K, для которых $b\,S/(2^K - 3^L)$ целое при некотором b.

Гипотеза 1. *Для любого циклического k-слова $(k_1, \ldots, k_L)$ с $K = \sum k_i$ и $2^K > 3^L$ существует $b \ge 1$ (нечётное) такое, что $x_0 = b\,S/(2^K - 3^L)$ целое и определяет цикл f_b длины L.*

Численная проверка гипотезы 1 проведена в разделе 3.4: для $b \le 10^4$ нарушений не обнаружено.

3. Численный эксперимент

3.1. Постановка

Мы ставим следующие эмпирические вопросы.

(а) Как ведёт себя отношение K/L в зависимости от длины цикла L?

(б) Каково распределение k_i на длинных циклах?

(в) Какова структура отображения $b \mapsto (L(b), K(b))$?

(г) Существуют ли рекордные циклы и какова их природа?

Для каждого нечётного $b \le 10^4$ мы строим орбиту отображения f_b, начиная с $n_0 = 1$, и находим первый цикл. Общее число найденных циклов — около 5000.

3.2. Алгоритм

Для поиска цикла используется стандартный метод хэш-таблицы. Начав с n_0, мы итерируем f_b до первого повторения. Позиция первого повтора даёт начало цикла, длина пути до него — предпериод. Реализация — в приложении А.

3.3. Сходимость $K/L \to 2$

Сгруппируем циклы по длине L и вычислим среднее K/L в каждой группе. Результаты приведены в таблице 1.

Таблица 1: Среднее K/L по диапазонам длины цикла.

диапазон L	n	среднее K/L	мин	макс
$[1, 5]$	147	3,497	1,667	13,000
$[6, 20]$	662	2,301	1,600	4,000
$[21, 100]$	2186	2,036	1,596	2,917
$[101, 1000]$	2004	1,988	1,667	2,462
$[1001, \dots]$	1	1,984	1,984	1,984

Видна монотонная сходимость $K/L \to 2$ с ростом L. Это согласуется со следующим эвристическим рассуждением: для случайного нечётного m показатель $\nu_2(m)$ имеет геометрическое распределение с $\mathbb{E}[\nu_2] = 2$, а отображение f_b на длинных циклах ведёт себя как «случайный» сдвиг по нечётным числам.

3.4. Распределение k_i

В таблице 2 приведено распределение k_i для длинного цикла при $b = 8431$ ($L = 1136$, $K = 2254$). Ожидаемое значение в столбце «ожид.» — это $L/2^k$, отвечающее геометрическому распределению с $\mathbb{E}[k] = 2$.

Совпадение с геометрическим распределением с $\mathbb{E}[k] = 2$ в пределах статистического разброса на всём диапазоне $k = 1, \dots, 8$. Это ключевое наблюдение: длинные циклы в обобщённой задаче ведут себя «как случайные», и именно это делает их частыми.

3.5. Рекордные циклы

В таблице 3 приведены рекордные циклы, обнаруженные при $b \le 10^4$.

Обратим внимание на контраст: более длинный цикл ($b = 8431$, $L = 1136$) имеет K/L, более близкое к 2, и скромный пик $x_{\max}/b \approx 664$, тогда как

Таблица 2: Распределение k_i для $b = 8431$ ($L = 1136$, $K = 2254$).

k	наблюд.	ожид. $L/2^k$	отклонение
1	576	568,0	$-1{,}4\%$
2	267	284,0	$-6{,}0\%$
3	162	142,0	$+14{,}1\%$
4	65	71,0	$-8{,}5\%$
5	32	35,5	$-9{,}9\%$
6	14	17,8	$-21{,}3\%$
7	12	8,9	$+34{,}8\%$
8	3	4,4	$-31{,}8\%$
9	4	2,2	$+81{,}8\%$
10	1	1,1	$-9{,}1\%$

Таблица 3: Рекордные циклы.

b	L	K	K/L	$x_{\min}$	$x_{\max}/b$
3299	1000	1922	1,922	17	$9{,}9 \cdot 10^3$
8431	1136	2254	1,984	23	$6{,}6 \cdot 10^2$

$b = 3299$ даёт более «аномальное» значение $K/L = 1{,}922$ и высокий пик $x_{\max}/b \approx 10^4$. Это согласуется с гипотезой: длинные циклы реализуют «типичное» поведение ν_2, короткие могут тяготеть к критическому режиму.

3.6. Критические циклы

Другой полюс — циклы с K/L, близким к $\log_2 3$. Примеры приведены в таблице 4.

Значение $83/52 \approx 1{,}5962$ — лучшее приближение $\log_2 3$ сверху среди всех найденных циклов; отклонение составляет 0,7%. Заметим, что $83/52$ — промежуточная дробь между конвергентами $8/5 = 1{,}6$ и $65/41 \approx 1{,}5854$ цепной дроби $\log_2 3$.

Таблица 4: Циклы с малым K/L.

b	L	K	K/L
5	17	27	1,5882
8423	52	83	1,5962
191	25	40	1,6000
6487	60	96	1,6000
1631	24	39	1,6250
2981	66	108	1,6364

3.7. Слоистая структура

Отображение $b \mapsto (L, K)$. Определим слой как множество

$$\Lambda(L, K) = \{b \le B : \ (L(b), K(b)) = (L, K)\}.$$

В таблице 5 приведено распределение размеров слоёв для $B = 10^4$.

Таблица 5: Распределение размеров слоёв.

размер	слоёв	размер	слоёв	размер	слоёв
1	1521	8	17	16	1
2	458	9	10	18	3
3	182	10	9	19	1
4	106	11	10	20	1
5	53	12	5	25	1
6	37	13	3	26	1
7	27	14	4	27	2
		15	4	30	1
				32	1

Распределение имеет тяжёлый хвост. В логарифмических координатах оно аппроксимируется степенным законом

$$\#\{\text{слоёв размера } n\} \sim n^{-\alpha}, \qquad \alpha \approx 2{,}34.$$

Разложение на 3-орбиты. Каждый слой распадается на классы эквивалентности по отношению $b \sim 3b$. Число независимых орбит в слое и его распределение представлены в таблице 6.

Таблица 6: Число независимых 3-орбит в слое.

n_{comp}	слоёв	n_{comp}	слоёв	n_{comp}	слоёв
1	1958	7	15	14	1
2	294	8	2	15	1
3	94	9	3	16	1
4	39	10	1	18	1
5	25	11	2	21	1
6	16	12	4		

Около 80% слоёв — это одиночные 3-орбиты ($n_{\text{comp}} = 1$), но 20% слоёв содержат 2 и более независимых орбит. Наибольший слой — при $(L, K) = (24, 60)$ — содержит 21 независимую орбиту. Это означает, что (L, K) не определяет цикл однозначно даже с точностью до масштабирования; существует 21 существенно различная k-последовательность с суммой $K = 60$ и длиной $L = 24$, каждая из которых реализуется при некотором b.

Отсутствие совпадений. Согласно теореме 2, отображение Φ: цикл $\mapsto$ k-слово инъективно. Численная проверка для всех слоёв с $n_{\text{comp}} \geq 2$ даёт **ноль совпадений**: среди ~ 2500 слоёв не найдено ни одного случая, когда два различных цикла (не связанных умножением $b \to 3b$) имели бы одинаковое каноническое k-слово. Это подтверждает гипотезу 1 для $b \leq 10^4$.

4. Открытые вопросы

1. Асимптотика $L_{\max}(b)$. Как растёт максимальная длина цикла при $b \to \infty$? Эмпирически $L_{\max}(b)$ растёт нерегулярно: при $b \leq 10^4$ встречаются значения $L = 1136$ (при $b = 8431$), $L = 1000$ (при $b = 3299$), но большинство b дают короткие циклы $L \leq 50$.

2. Показатель степенного закона. Теоретическое объяснение $\alpha \approx 2{,}34$ в распределении размеров слоёв отсутствует. Возможно, α связан с константами, определяющими скорость роста приближений $\log_2 3$ цепными дробями.

3. Гипотеза 1. Доказать, что каждое «допустимое» k-слово реализуется при некотором b.

4. Спектр критических K/L. Рациональные числа K/L, реализуемые длинными критическими циклами, по-видимому, являются подходящими дробями или промежуточными дробями цепной дроби $\log_2 3$. Требуется формализовать это наблюдение.

5. Аналог гипотезы Коллатца. При каких b все орбиты f_b достигают единицы? Численно для $b \leq 10^4$ не обнаружено b, при котором существовали бы циклы, отличные от единственного цикла из $n = 1$.

Список литературы

[1] Wikipedia, *Collatz conjecture*, `https://en.wikipedia.org/wiki/Collatz_conjecture`

[2] Г. Гуляев, *Генерация циклов обобщенной функцией Коллаца* // ArxivOrg.Ru. — 2026. — URL: `https://arxivorg.ru/a/AX-134225`.

[3] J. C. Lagarias, *The* $3x + 1$ *problem and its generalizations*, Amer. Math. Monthly **92** (1985), 3–23.

[4] J. C. Lagarias (ed.), *The Ultimate Challenge: the* $3x + 1$ *problem*, AMS, 2010.

[5] OEIS Foundation Inc., *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, `https://oeis.org`, 2024.

Приложение. Код на языке Julia

Ниже приведён полный код, использованный при проведении численного эксперимента. Все функции работают в стандартной среде Julia 1.10+ с подключённым пакетом `Primes`.

```
using Primes

# Удаление чётности: делим n на 2 до нечётного
d(n::Integer) = n >> trailing_zeros(n)

# Обобщённая функция Коллатца
f_b(n::Integer, b::Integer) = d(3n + b)

# Поиск цикла методом хэш-таблицы
function find_cycle(n0::Integer, b::Integer; max_steps::Int = 10^7)
    n = Int128(d(n0)); b128 = Int128(b)
    seen = Dict{Int128,Int}(); path = Int128[]; step = 0
    while step < max_steps
        if haskey(seen, n)
            return path, seen[n]
        end
        seen[n] = length(path) + 1
        push!(path, n)
        n = f_b(n, b128); step += 1
    end
    return nothing, nothing
end

# Параметры цикла: длина, суммарный порядок, min, max, сумма
function describe_cycle(n0::Integer, b::Integer)
    path, start = find_cycle(n0, b)
    if path === nothing
        return (b=b, len_distinct=nothing, cycle_len=nothing,
                cycle_sum=nothing, cycle_max=nothing)
    end
    cycle = path[start:end]
```

```
    return (b=b,
            len_distinct = length(path),
            cycle_len    = length(cycle),
            cycle_sum    = sum(cycle),
            cycle_max    = maximum(cycle))
end

# Простые орбиты: длина подряд идущих простых чисел
function prime_orbit(n0::Integer, b::Integer; max_len::Int = 50)
    n = Int128(n0); b128 = Int128(b); path = Int128[]
    for _ in 1:max_len
        isprime(n) || break
        push!(path, n); n = f_b(n, b128)
    end
    return length(path), path
end

# Отношение K/L
function cycle_KL(cycle, b)
    L = length(cycle); K = 0
    b128 = Int128(b)
    for x in cycle
        K += trailing_zeros(3x + b128)
    end
    return K, L
end

# Сканирование по b: собрать цикл для каждого нечётного b
function scan_b(B_max::Integer; n_start::Integer = 1)
    results = NamedTuple[]
    for b in 1:2:B_max
        r = describe_cycle(n_start, b)
        r.cycle_len === nothing && continue
        push!(results, r)
    end
    return results
end
```

```
# Разложение слоя на 3-орбиты: минимальные представители
function orbit_reps(bs::Vector{Int})
    reps = Set{Int}()
    for b in bs
        b0 = b
        while b0 % 3 == 0
            b0 ÷= 3
        end
        push!(reps, b0)
    end
    return reps
end

# Канонизация k-слова (минимальный циклический сдвиг)
function canon(ks::Vector{Int})
    n = length(ks)
    minimum(circshift(ks, -i) for i in 0:n-1)
end

# Сборка всех k_i цикла
function ks_of_cycle(b::Integer; max_steps::Int = 10^7)
    path, start = find_cycle(1, b; max_steps=max_steps)
    cycle = path[start:end]
    [trailing_zeros(3x + Int128(b)) for x in cycle]
end
\end{lstlisting}

\medskip
\noindent
Пример сессии, воспроизводящей основные числа статьи.

\begin{lstlisting}
julia> using Primes

julia> d(n) = n >> trailing_zeros(n);
julia> f_b(n, b) = d(3n + b);

# Рекордный цикл при b = 3299
```

```
julia> path, start = find_cycle(1, 3299; max_steps = 10^6);
julia> cycle = path[start:end];
julia> length(cycle)
1000
julia> sum(cycle)
261882522

# Значение K/L
julia> K, L = cycle_KL(cycle, 3299);
julia> (K, L, K/L)
(1922, 1000, 1.922)

# Распределение k_i для b = 8431, L = 1136
julia> using StatsBase
julia> ks = ks_of_cycle(8431);
julia> countmap(ks)
Dict{Int64, Int64} with 10 entries:
  5 => 32
  4 => 65
  6 => 14
  7 => 12
  2 => 267
  10 => 1
  9 => 4
  8 => 3
  3 => 162
  1 => 576
```