НЕ СУЩЕСТВУЕТ ГЕРОНОВЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ С ТРЕМЯ ЦЕЛЫМИ МЕДИАНАМИ

Logman Shihaliev logman1@list.ru +994505149553

ORCID: 0000-0003-1063-4712

АННОТАЦИЯ. Актуальность настоящей статьи обусловлена тем, что в ней решаются две ранее нерешённые открытые задачи. В первой части статьи доказывается новая лемма, из которой следует, что если существует треугольник с целочисленными сторонами и медианами, то обязательно существует другой, не подобный ему, треугольник с теми же свойствами. Иными словами, такие треугольники могут существовать только парами.

Во второй части статьи путем преобразования известных формул доказывается новая теорема в виде *универсального тождества* для всех треугольников. Предметом исследования данной теоремы является доказательство отсутствия героновых треугольников с тремя целыми медианами.

Приходим к выводу, что из семи элементов (3 стороны, 3 медианы и площадь) треугольника только шесть элементов могут быть целыми.

Стоит отметить, что, если вышеуказанное *универсальное тождество* рассмотрим как Диофантово уравнение, то такое Диофантово уравнение будет иметь решения. В качестве примеров можно рассмотреть следующую пару треугольников. Треугольник со сторонами $146, 102, 52$, площадью 1680 и двумя целыми медианами $35, 97$. Также, согласно условиям вышеуказанной леммы, существует другой треугольник с медианами $219, 153, 78$, площадью 5040 и двумя целыми сторонами $70, 194$.

Данная версия статьи отличается от предыдущих тем, что материал здесь упрощен до уровня отличника средней школы.

Еще один примечательный результат приведен в Следствии 2, где обнаружен парадокс «треугольников-близнецов».

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Геронов треугольник; Целочисленные треугольники; Теория чисел; Геометрия; Диофантов уравнение; Универсальное тождество.

CLASSIFICATION NUMBERS: MSC: 11G05, 11R04, 14G99, 11D99

ЧАСТЬ I

ЛЕММА. Если существует треугольник с рациональными сторонами и медианами, то обязательно существует другой, не подобный ему,

треугольник с рациональными сторонами и медианами.

Доказательство леммы. Рассмотрим треугольник ΔABC с рациональными сторонами и рациональными медианами (рис. 1). Используя треугольник ΔABC, построим треугольник ΔOPC. Для этого из точки C проведём отрезок $CP \| OB$ до его пересечения с продолжением медианы $AF = m_a$ в точке P. В результате треугольники ΔAPC и ΔAOE оказываются подобными.

Запишем:

$CP : EO = AP : AO = AC : AE = 2 : 1$

Принимая во внимание свойства медиан (ΔABC) для сторон треугольника ΔOPC, получаем

$$CP = OB = \frac{2}{3}m_b, \quad OC = \frac{2}{3}m_c, \quad OP = OA = \frac{2}{3}m_a \qquad (1)$$

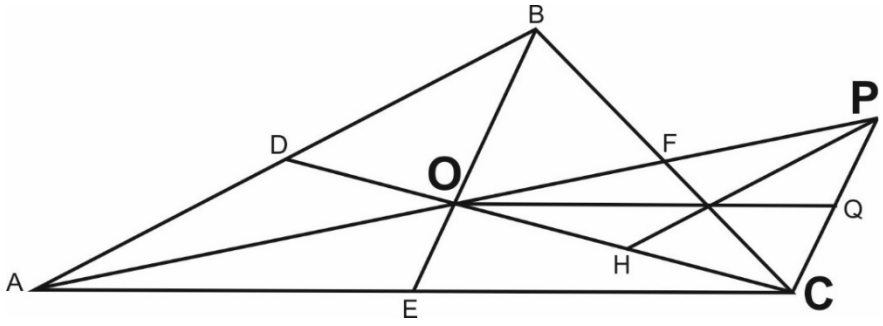

Fig1

Здесь (**рис.1**): $AB = c, BC = a,\ AC = b, AF = m_a, BE = m_b,\ CD = m_c,$
$OP = \frac{2}{3}m_a, CP \| OB, CP = OB = \frac{2}{3}m_b, OC = \frac{2}{3}m_c\ \ OQ = EC = \frac{1}{2}b,$
$HP = DB = \frac{1}{2}c, CF = \frac{1}{2}a, A_{\Delta ABC} = 3A_{\Delta OPC}$

А для медиан треугольника ΔOPC получаем:

$$FC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a, \quad OQ = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}b, \quad HP = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}c \qquad (2)$$

Иными словами, треугольник ΔOPC строится путём параллельных переносов $\frac{2}{3}$ частей медиан треугольника ΔABC. Медианы треугольника ΔOPC, в свою очередь, строятся путём параллельных переносов $\frac{1}{2}$ частей сторон треугольника ΔABC. Это означает, что все стороны и медианы треугольника ΔOPC также являются рациональными.

Так как $A_{\Delta OFC} = \frac{A_{\Delta ABC}}{6}$, получаем $A_{\Delta OPC} = 2 \cdot A_{\Delta OFC} = \frac{A_{\Delta ABC}}{3}$. Запишем:

$$\frac{A_{\Delta OPC}}{A_{\Delta ABC}} = \frac{1}{3} \qquad (3)$$

Соотношение площадей подобных треугольников с рациональными сторонами равно квадрату рационального коэффициента подобия. А дробь $\frac{1}{3}$ не является квадратом рационального числа.

Лемма доказана.

Следствие 1: Если (1) и (2) применить на треугольник ΔOPC, то получим треугольник подобный треугольнику ΔABC.

Например, пусть $136, 170, 174$ стороны треугольника ΔABC, и $158, 131, 127$ медианы треугольника ΔABC. В таком случае получаем треугольник ΔOPC с целыми сторонами $316, 262, 254$ и с целыми медианами $204, 255, 261$. Далее, продолжая, получаем следующий треугольник со сторонами $204, 255, 261$ и медианами $237,\ 196.5,\ 190.5$:

$\frac{204}{136} = \frac{255}{170} = \frac{261}{174}$.

Запишем известные тождества (в качестве справки):

$$\begin{cases} a = \frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2} \\ b = \frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2} \\ c = \frac{2}{3}\sqrt{2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \\ m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} \\ m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} \end{cases} \qquad (4)$$

Часть II

Теорема. Для любого треугольника и при любом порядке расположения его сторон ($3! = 6$ вариантов) верно следующее тождество:

$$\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^2 + (A_{\Delta ABC})^2 = \left(\frac{c}{2}m_c\right)^2. \qquad (5)$$

Доказательство теоремы.

Для площади треугольника ΔABC запишем формулу Герона

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} \qquad (6)$$

Отметим, что формула Герона (6) доказуема с помощью тригонометрии (без применения теоремы Пифагора).

Преобразуем (6). Целью данного преобразования является *визуальное внедрение* еще одного элемента (в данном случае медианы) треугольника в формулу (6).

Знаем, что треугольник с известными сторонами уникален, тем самым определяется его площадь и эти *четыре элемента* имеются в (6). Присутствие пятого элемента (*пятый не лишний*) треугольника в единой формуле создает возможность для более эффективного анализа.

(6) запишем так:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{4}\sqrt{2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}$$

$$16A_{\Delta ABC}^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2$$

$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 16A_{\Delta ABC}^2 = 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4$$

$$\frac{a^4-2a^2b^2+b^4}{16} + A_{\Delta ABC}^2 = \frac{2a^2c^2+2b^2c^2-c^4}{16}$$

$$\frac{a^4-2a^2b^2+b^4}{16} + A_{\Delta ABC}^2 = \frac{c^2(2a^2+2b^2-c^2)}{4\cdot 4}$$

$$\frac{(a^2-b^2)^2}{16} + A_{\Delta ABC}^2 = \frac{c^2\cdot m_c^2}{4}$$

$$\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^2 + A_{\Delta ABC}^2 = \left(\frac{c}{2}m_c\right)^2 \quad (7)$$

Так как равенство (7) относительно сторон треугольника симметрично, получем $3! = 6$ вариантов равносильных тождеств:

$$\begin{cases} \left(\pm\left(\frac{a}{2}\right)^2 \mp \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^2 + (A_{\Delta ABC})^2 = \left(\frac{c}{2}m_c\right)^2 \\ \left(\pm\left(\frac{a}{2}\right)^2 \mp \left(\frac{c}{2}\right)^2\right)^2 + (A_{\Delta ABC})^2 = \left(\frac{b}{2}m_b\right)^2 \\ \left(\pm\left(\frac{b}{2}\right)^2 \mp \left(\frac{c}{2}\right)^2\right)^2 + (A_{\Delta ABC})^2 = \left(\frac{a}{2}m_a\right)^2 \end{cases} \quad (8)$$

ТЕОРЕМА доказана.

Анализ тождеств (8) позволит нам решить следующую открытую проблему.

ПРОБЛЕМА. Существует ли треугольники с целыми сторонами, медианами и площадью? [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ.

Предположим, что существует треугольник, у которого все медианы, стороны и площадь являются целыми числами (будем называть *целочисленный треугольник*) и выполняется

$$(a, b, c, m_a, m_b, m_c, A_{\Delta ABC}) = 1 \quad (9)$$

Запишем тождество из (8):

$$\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right)^2 + (A_{\Delta ABC})^2 = \left(\frac{c}{2}m_c\right)^2 \quad (10)$$

По условиям (4), очевидно, что все стороны *целочисленных треугольников* (в данном случае треугольника ΔABC) четные. Запишем:

$$(a, b, c) = 2^k \quad (11)$$

Следовательно, числа $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ целые. Здесь $k = 1$. Если $k > 1$, то получится

$$(m_a, m_b, m_c) = 2^p. \quad (12)$$

А это противоречит условию (9), так как площадь героновых треугольников является чётным числом. Вместо (9) получаем

$$(a, b, c, m_a, m_b, m_c, A_{\Delta ABC}) = 2t > 1 \quad (13)$$

Здесь k, p и t – натуральные числа.

ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЛЕММА. Одна и только одна из сторон *целочисленного треугольника* кратна 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЛЕММЫ.

Противоречие (9) и (13) показало, что все три стороны *целочисленного треугольника* не могут быть кратными 4.

Предположим, что ни одна из сторон *целочисленного треугольника* не кратна 4. В таком случае получается

$$\frac{c}{2} \equiv 1(mod2) \quad \textbf{(14)}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \equiv 0(mod2) \quad \textbf{(15)}$$

Поскольку площадь $A_{\Delta ABC}$ является чётным числом, из этого следует, что левая сторона тождества (10) четная. Следовательно, и правая сторона (10) должна быть четной. А это возможно только при условии

$$m_c \equiv 0(mod2). \quad \textbf{(16)}$$

Это означает, что согласно формуле (4), сторона c кратна 4, что противоречит нашему предположению (14).

Теперь предположим, что две стороны целочисленного треугольника (пусть это будут a и b) кратны 4, а для стороны c будет $\frac{c}{2} \equiv 1(mod2)$. В соответствии с условиями формулы (4) это означает, что

$$m_a \equiv 0(mod2),\ m_b \equiv 0(mod2). \quad \textbf{(17)}$$

С учетом

$$\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} \not\equiv 0(mod4) \quad \textbf{(18)}$$

получаем

$$m_c \equiv 1(mod2) \quad \textbf{(19)}$$

Значит,

$$\left(\frac{c}{2} m_c\right)^2 \equiv 1(mod2). \quad \textbf{(20)}$$

Следовательно, левая и правая части равенства (10) имеют разную четность, а значит, наше предположение неверно.

ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЛЕММА доказана.

Является ли пифагорова тройка (10) примитивной? Для определения рассмотрим все возможные значения q:

$$\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2, A_{\Delta ABC},\ \frac{c}{2} m_c\right) = q \quad \textbf{(21)}$$

Рассмотрим условие

$$(q, 6) = 1 \text{ для } q > 1 \quad \textbf{(22)}$$

Если все стороны треугольника кратны q, то с учетом тождеств (4) получается, что все медианы также кратны q. Следовательно и площадь треугольника кратна q

$$(a, b, c, m_a, m_b, m_c, A_{\Delta ABC}) = q \quad (\mathbf{23})$$

А это противоречит условию (9).

Если только две стороны (пусть a и b, для которых выберем тождество (10) из системы (9)) треугольника кратны q, то с учетом тождеств (4) получается, что $m_a m_b m_c \not\equiv 0(mod q)$. Следовательно, для правой стороны (10) получится

$$\left(\frac{c}{2} m_c\right)^2 \not\equiv 0(mod q) \quad (\mathbf{24})$$

(24) противоречит условию (21).

Замечание 1. Результаты (21), (23) и (24) означают, что если существует *целочисленный треугольник*, то при выполнении условия (22) пифагорова тройка $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2, A_{\Delta ABC}, \frac{c}{2} m_c$ примитивна.

Замечание 2. Используя результаты вспомогательной леммы приходим к выводу, что только одно из трех следующих выражений четное

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2, \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2, \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Запишем

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \equiv 1(mod 2), \ \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 \equiv 1(mod 2). \quad (\mathbf{25})$$

Замечание 3. В тождествах (4) имеют место дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{2}$. По этой причине приходится анализировать значения $q = \{1, 2, 3, 6\}$ и все остальные значения q отдельно.

Теперь в (21) рассмотрим возможные варианты $q = \{1, 2, 3, 6\}$.

Если $q = 1$, то пифагорова тройка $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$, $A_{\Delta ABC}$, $\frac{c}{2} m_c$ является примитивной. Известно, что согласно формуле Евклида, каждая примитивная пифагорова тройка возникает из единственной пары взаимно простых чисел. Рассмотрим два варианта:

1. $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$
2. $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = w^2 - r^2 = \left(\frac{2w}{2}\right)^2 - \left(\frac{2r}{2}\right)^2$

Для 1-го варианта запишем:

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ A_{\Delta ABC} = 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{ab}{2} \\ \frac{c}{2} m_c = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \end{cases} \quad (\mathbf{26})$$

В отличии от (26) известна другая формула для площади $A_{\Delta ABC}$:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} ab \cdot sin\angle C \quad (\mathbf{27})$$

Значит,

$$\frac{1}{2} ab \cdot sin\angle C = \frac{ab}{2} \Rightarrow sin\angle C = 1 \Rightarrow \angle C = \frac{\pi}{2} \quad (\mathbf{28})$$

Согласно (25) выберем тождество

$$\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2\right)^2 + (A_{\Delta ABC})^2 = \left(\frac{b}{2} m_b\right)^2 \quad (\mathbf{29})$$

Запишем

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 \\ A_{\Delta ABC} = 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{c}{2} = \frac{ac}{2} \\ \frac{b}{2} m_b = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \end{cases} \quad (\mathbf{30})$$

Получим $\angle B = \frac{\pi}{2}$. (**31**)

В одном треугольнике два угла не могут быть равны $\frac{\pi}{2}$.

Для 2-го варианта запишем:

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{2w}{2}\right)^2 - \left(\frac{2r}{2}\right)^2 \\ A_{\Delta ABC} = 2 \cdot \frac{2w}{2} \cdot \frac{2r}{2} = \frac{2w \cdot 2r}{2} \\ \frac{c}{2} m_c = \left(\frac{2w}{2}\right)^2 + \left(\frac{2r}{2}\right)^2 \end{cases}$$

И тут получаем прямоугольный треугольник с двумя сторонами $2w,\ 2r$ и с той же площадью $A_{\Delta ABC}$. Повторяется 1-й вариант, (26).

Замечание 4. Проведенные математические преобразования выделяют частный случай (*я так считаю*), когда две стороны исследуемого треугольника «пересекаются» в бесконечности.

Замечание 5. По полученным тождествам (8) становится очевидно, что треугольники стягиваются в точку (*я так считаю*) на плоскости без «повреждений», в результате чего (32) становится возможным

$$a = b = c = 0 \Rightarrow \left(\left(\frac{0}{2}\right)^2 - \left(\frac{0}{2}\right)^2\right)^2 + (0)^2 = \left(\frac{0}{2} \cdot 0\right)^2 \quad (\mathbf{32})$$

Если $q = 2$, то возникает противоречие. В этом случае число $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2$ становится нечётным, поскольку $a \equiv 0(mod 4)$. Следовательно, в (21) $q \neq 2$. Отсюда также следует, что $q \neq 6$. Также по условиям (11) и (12) верно $q \neq 4$.

Если $q = 3$, то, используя (4), запишем следующее

$$\begin{cases} m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \\ m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} \\ m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_a = \frac{1}{2}\sqrt{3b^2 + 3c^2 - (a^2 + b^2 + c^2)} \\ m_b = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 3c^2 - (a^2 + b^2 + c^2)} \\ m_c = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 3b^2 - (a^2 + b^2 + c^2)} \end{cases} \quad (\mathbf{33})$$

По условиям (33) очевидно:

Если одна медиана *целочисленного треугольника* кратна 3, то должно быть $(a^2 + b^2 + c^2) \equiv 0(mod3)$. Это означает, что все медианы кратны 3.

Условие $(a^2 + b^2 + c^2) \equiv 0(mod3)$ возможно только в двух случаях:

1. Либо все стороны треугольника кратны 3. Значит, все медианы и площадь *целочисленного треугольника* кратны 3. Это противоречит условию (9).

2. Либо ни одна из сторон треугольника не кратна 3. А это противоречит Следствию 2.

Исследуем треугольник ΔABC с целыми сторонами и медианами.

Если все стороны треугольника ΔABC кратны 3, то с учетом (4) для треугольника ΔABC получим $(a, b, c, m_a, m_b, m_c) \geq 3$. Данный вариант противоречит условиям (9).

С учетом (4) очевидно, что все стороны треугольника ΔABC четные. Предположим, что ни одна из сторон треугольника ΔABC не кратна 3. В таком случае с учетом (4) все медианы треугольника ΔABC кратны 3.

Согласно Лемме треугольники ΔABC и ΔOPC привязаны друг другу и существуют одновременно. Следовательно $\frac{2}{3}m_a$, $\frac{2}{3}m_b$, $\frac{2}{3}m_c$ являются сторонами, а $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$ являются медианами треугольника ΔOPC. Получается, что ни одна медиана треугольника ΔOPC не кратна 3. А это означает, что одна из сторон ($\frac{2}{3}m_a$, $\frac{2}{3}m_b$, $\frac{2}{3}m_c$) треугольника ΔOPC кратна 3.

	ΔABC	ΔOPC
Стороны:	$316, 262, 254$	$136, 170, 174$
Медианы:	$204, 255, 261$	$158, 131, 127$

Следствие 2: Если исследуем произвольно взятый треугольник с целыми сторонами и медианами, и при этом рассматриваем вариант, когда у данного треугольника ни одна из сторон не кратна 3, то получается, что мы **одновременно** исследуем треугольник, у которого только одна из сторон точно кратна 3. Это в дальнейшем приводит к тому, что для одного из равенств (8) в (21) $q \neq 3$. Следовательно, одно из (8) состоит из примитивных пифагоров троек.

Следствие 3: Не существует героновых треугольников с тремя целочисленными медианами.

P.S. Предположим, что существуют некоторые натуральные числа x и y, для которых выполняются следующие условия

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = A_{\Delta ABC} \\ 2xy = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ x^2 + y^2 = \frac{c}{2} m_c \end{cases}$$

Однако получаем противоречие. Ранее мы установили, что две стороны целочисленного треугольника кратны только 2 (пусть это будут c и b), тогда как третья сторона (пусть это будет a) обязательно кратна 4. Получается $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \equiv 1(mod 2)$. Значит, $2xy \neq \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Литература

1. Richard K. Guy, ″Unsolved Problems in Number Theory, second edition″. Springer Verlag. New York: 1994. Page 188.
2. http://cage.ugent.be/~hvernaev/problems/Proble22.html
3. https://en.wikipedia.org/wiki/Heronian_triangle
4. "An infinite set of Heron triangles with two rasonal medians", R.H. Buchholz and R.L. Rathbu, Amer. Math. Monthly 104 (1997), 107-115.
5. "Heron triangles with three rational medians", R.H. Buchholz and R.P. Stingley, Rocky Mountain J. Math. 49 (2019), 405-417.
6. "Heron triangles with two rational medians and Somos-5 sequences", Andrew Hone, Eur. J. Math. 8 (2022), 1424-1486.
7. "Some results on Evans problems", P. Yuan, Publ. Math. Debrecn 101 (2022), 337-351.