Дискретные динамические системы на конечных ориентированных графах с линейно упорядоченными предпочтениями: структура аттракторов и метод Решета Хаоса

В. Г. Соловьёв

Независимый исследователь, г. Москва, Россия

E-mail: solovik532@gmail.com

Препринт (ноябрь 2026 г.)

УДК 519.17

Аннотация

В работе исследуется класс дискретных динамических систем, порождённых жадным построением элементарных (простых) путей в конечных ориентированных графах с локальным линейным порядком на множествах исходящих дуг (матрицах последовательных взаимодействий и предпочтений). Операция перехода от начальной вершины к терминальной вершине максимального простого пути индуцирует эндоморфизм $f\colon V \to V$ множества вершин графа. Проводится формальное сопоставление с оригинальным алгоритмом Решета Хаоса, доказывается теорема о конечной стабилизации итераций $f^t(V)$, устанавливаются оценки вычислительной сложности и приводятся подробные численные примеры для полного квадратного ($N = 7$) и неполного «рваного» ($N = 8$) графов с многошаговой сходимостью ($T = 4$).

Ключевые слова: *ориентированный граф, матрица последовательных взаимодействий, Решето Хаоса, функциональный орграф, дискретная динамическая система, аттрактор.*

Discrete Dynamical Systems on Finite Directed Graphs with Linearly Ordered Preferences: Attractor Structure and the Sieve of Chaos Method

V. G. Solovyov (Independent Researcher, Moscow, Russia)

Abstract. This paper investigates a class of discrete dynamical systems generated by the greedy construction of elementary (simple) paths in finite directed graphs with a local linear order on the sets of outgoing arcs (sequential interaction and preference matrices). The transition from an initial vertex to the terminal vertex of a maximal simple path induces an endomorphism $f\colon V \to V$ on the vertex set of the graph. We establish a formal correspondence with the original Sieve of Chaos algorithm, prove a theorem on the finite stabilization of the iterated images $f^t(V)$, derive computational complexity bounds, and provide detailed numerical examples for both complete ($N = 7$) and incomplete ("ragged", $N = 8$) graphs exhibiting multi-step convergence ($T = 4$).

Keywords: *directed graph, preference matrix, Sieve of Chaos, functional digraph, discrete dynamical system, attractor.*

Введение

Задачи поиска устойчивых структур в системах с большим числом элементов часто сталкиваются с комбинаторным взрывом при попытке полного перебора ($O(N!)$). В работах В. Г. Соловьёва [1, 2] предложен эвристический алгоритм полиномиальной сложности (названный автором *РХ-методом*, или методом Решета Хаоса, по аналогии с решетом Эратосфена), предназначенный для автоматического учёта геометрических, физических и иных взаимодействий на основе предпочтений между объектами хаотической системы и выделения узкого ядра устойчивых состояний.

В терминологии работ [1, 2] система описывается *матрицей последовательных взаимодействий (ПВ-матрицей)*:

1. В верхней строке ПВ-матрицы записываются номера всех N объектов системы.
2. В каждом столбце под номером u сверху вниз располагаются остальные объекты в порядке убывания степени взаимодействия (например, возрастания евклидова расстояния до точки u).
3. *Процедура «просеивания» (1-й прогон):* выбирается стартовая точка s, её номер вычёркивается во всех столбцах матрицы, после чего осуществляется переход к первому невычеркнутому элементу в столбце s. Процесс повторяется до исчерпания элементов и порождает элементарную цепь, оканчивающуюся в некоторой терминальной точке x_m.
4. *Итерации прогонов и «главные точки»:* следующая цепь (2-й прогон) запускается из терминальной точки предыдущего прогона x_m. Повторение прогонов продолжается до зацикливания системы, а вершины, образующие предельный цикл, называются *главными точками системы*.

В настоящей статье даётся строгая графовая формализация данного алгоритма (см. также классические основы теории графов [3, 4]), обобщённая на случай одновременной эволюции всего множества вершин и произвольных (в том числе неполных — прямоугольных и «рваных») матриц предпочтений. Показано, что рассматриваемый метод представляет собой полиномиальную эвристику (сложности $O(N^3)$ в плотном случае и $O(N^2)$ в разреженном) для задач выделения структурного ядра и маршрутизации в системах с ранжированными предпочтениями.

1 Формальная постановка модели

Пусть задано конечное непустое множество вершин $V = \{1, 2, \ldots, N\}$, где $N \geq 2$.

Определение 1. Графом предпочтений *назовём пару* $\mathcal{G} = (V, \mathcal{P})$, *где* $\mathcal{P} = \{P(u)\}_{u \in V}$ — *семейство упорядоченных кортежей без повторяющихся элементов таких, что для каждого* $u \in V$*:*

$$P(u) = (v_{u,1}, v_{u,2}, \ldots, v_{u,k_u}), \quad v_{u,i} \in V \setminus \{u\}, \quad 0 \leq k_u \leq N - 1.$$

Каждый кортеж $P(u)$ *задаёт на подмножестве исходящих соседей* $N^+(u) = \{v_{u,1}, \ldots, v_{u,k_u}\}$ *строгий линейный порядок* $\succ_u$*:*

$$v_{u,1} \succ_u v_{u,2} \succ_u \cdots \succ_u v_{u,k_u}.$$

В матричном представлении элементы V образуют первую строку таблицы размерности $(K+1)\times N$, где $K=\max_{u\in V} k_u$, а u-й столбец содержит элементы кортежа $P(u)$. В зависимости от степеней исхода k_u выделяются три топологических класса моделей:

1. *Полный двунаправленный граф* ($k_u = N-1$ для всех $u \in V$) — квадратная матрица (классическая ПВ-матрица в работах [1, 2]).

2. *Однородный по исходу орграф* ($k_u = k < N-1$ для всех $u \in V$) — прямоугольная матрица (учёт только k ближайших соседей).

3. *Произвольный простой орграф* (k_u различны) — «рваная» матрица со столбцами разной высоты, моделирующая системы с индивидуальными ограничениями доступности.

2 Жадный оператор просеивания и теорема о стабилизации

Определение 2. *Для фиксированной вершины $s \in V$* жадным элементарным путём $C(s) = (x_0, x_1, \ldots, x_m)$ *назовём последовательность вершин, определяемую рекуррентно:*

1. $x_0 = s$.

2. *Пусть построена последовательность $S_t = \{x_0, x_1, \ldots, x_t\}$. Если множество допустимых переходов $D_t = N^+(x_t) \setminus S_t$ непусто, то $x_{t+1} = \max_{\succ_{x_t}} D_t$.*

3. *Если $D_t = \emptyset$, процесс останавливается и полагается $m = t$.*

Лемма 1. *Для любой вершины $s \in V$ путь $C(s)$ однозначно определён, является простым и имеет длину $m \le N-1$. В случае полного графа ($k_u = N-1$) путь $C(s)$ является гамильтоновым ($m = N-1$).*

Доказательство. Однозначность выбора на каждом шаге следует из строгости линейного порядка $\succ_{x_t}$ на конечном множестве D_t. По построению $x_{t+1} \notin S_t$, следовательно, все вершины в $C(s)$ попарно различны и $|S_t| = t+1$. Так как $S_t \subseteq V$ и $|V| = N$, условие $t+1 \le N$ гарантирует остановку не более чем за $N-1$ шагов. При $k_u = N-1$ имеем $|N^+(x_t)| = N-1$, поэтому $D_t \neq \emptyset$ вплоть до $t = N-1$. □

Построение путей $C(s)$ для всех $s \in V$ задаёт эндоморфизм $f\colon V \to V$, ставящий в соответствие каждой стартовой вершине s терминальную вершину её пути: $f(s) = x_m(s)$. Траектории дискретной динамической системы (V, f) описываются функциональным орграфом $\Gamma_f = (V, E_f)$ [5], где $E_f = \{(u, f(u)) \mid u \in V\}$.

Рассмотрим эволюцию образа всего множества вершин под действием итераций отображения f:

$$A_0 = V, \quad A_t = f(A_{t-1}) = f^t(V) \quad (t \ge 1).$$

Теорема 1. *Последовательность множеств $\{A_t\}_{t=0}^{\infty}$ монотонно не возрастает по включению ($V = A_0 \supseteq A_1 \supseteq \cdots \supseteq A_T = A_{T+1} = A^*$) и стабилизируется за конечное число шагов $T \le N-1$. Предельное множество A^* (множество главных точек системы) непусто, сужение $f|_{A^*}\colon A^* \to A^*$ является биекцией, а вершины A^* совпадают с объединением всех простых ориентированных циклов функционального графа Γ_f.*

Доказательство. Из $A_1 = f(V) \subseteq V = A_0$ по индукции следует $A_{t+1} \subseteq A_t$. Так как $|V| = N$ и $A_t \neq \emptyset$, цепочка мощностей $|A_0| \geq |A_1| \geq \cdots \geq 1$ не может строго убывать более $N-1$ раз. Следовательно, найдётся минимальный индекс $T \leq N-1$, при котором $|A_T| = |A_{T+1}|$, откуда $A_{T+1} = A_T = A^*$. На конечном множестве A^* равенство $f(A^*) = A^*$ влечёт биективность $f|_{A^*}$, разлагающуюся в произведение непересекающихся циклов. □

Замечание 1. В общем случае функциональный орграф Γ_f может распадаться на $c \geq 1$ компонент слабой связности (бассейнов притяжения). При последовательном запуске из одной фиксированной стартовой точки s (как в оригинальном алгоритме [1]) траектория $s, f(s), f^2(s), \ldots$ сходится к единственному предельному циклу $C_s \subseteq A^*$, принадлежащему компоненте связности вершины s. Рассмотрение итераций всего множества $A_t = f^t(V)$ позволяет выделить объединение всех предельных циклов системы $A^* = \bigsqcup_{i=1}^{c} C_i$ независимо от выбора начальной вершины.

Предложение 1. *Если граф предпочтений $\mathcal{G}$ не содержит вершин с нулевой полустепенью исхода ($k_u \geq 1$ для всех $u \in V$), то отображение f не имеет неподвижных точек и мощность аттрактора удовлетворяет неравенству $|A^*| \geq 2$.*

Предложение 2. *Временная сложность построения полного аттрактора A^* составляет $O(N \sum_{u \in V}(k_u + 1))$, что в худшем случае (для плотной матрицы предпочтений с $k_u = N - 1$) равно $O(N^3)$, а для разреженных матриц с ограниченными степенями исхода ($k_u = O(1)$) — $O(N^2)$ операций.*

Доказательство. При использовании булева массива посещённых вершин проверка условия $v \notin S_t$ выполняется за $O(1)$. Для одной стартовой вершины $s \in V$ алгоритм просматривает не более $\sum_{u \in V} k_u$ элементов столбцов, что требует $O(\sum_{u \in V}(k_u + 1))$ операций. Вычисление $f(s)$ для всех N стартовых вершин выполняется за $O(N \sum_{u \in V}(k_u + 1))$. На втором этапе на каждом из $T \leq N - 1$ шагов выполняется не более N переходов по отображению f, что требует $O(N^2)$ операций и не увеличивает асимптотику первого этапа. □

3 Численные примеры с многошаговой стабилизацией

3.1 Полный двунаправленный граф (квадратная матрица, $N = 7$, $T = 4$)

Рассмотрим систему из $N = 7$ элементов, заданную полностью заполненной квадратной матрицей предпочтений размерности 7×7 (табл. 1). На первом этапе для каждого

Таблица 1: Полная квадратная матрица предпочтений ($N = 7$)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
4	5	7	7	3	2	1
2	3	1	1	7	5	4
5	7	4	2	1	3	3
3	1	2	3	4	7	2
7	4	5	5	6	1	5
6	6	6	6	2	4	6

столбца строится гамильтонов путь длины $m = 6$:

- $C(1) = (1, 4, 7, 6, 2, 5, 3) \implies f(1) = 3;$
- $C(2) = (2, 5, 3, 7, 1, 4, 6) \implies f(2) = 6;$
- $C(3) = (3, 7, 1, 4, 6, 2, 5) \implies f(3) = 5;$
- $C(4) = (4, 7, 1, 2, 5, 3, 6) \implies f(4) = 6;$
- $C(5) = (5, 3, 7, 1, 4, 6, 2) \implies f(5) = 2;$
- $C(6) = (6, 2, 5, 3, 7, 1, 4) \implies f(6) = 4;$
- $C(7) = (7, 1, 4, 3, 2, 5, 6) \implies f(7) = 6.$

Функциональный орграф Γ_f содержит транзиентную цепь $1 \to 3 \to 5 \to 2 \to 6 \leftrightarrow 4$. Эволюция образов $A_t = f^t(V)$ стабилизируется за $T = 4$ итерации:

$$
\begin{aligned}
&A_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},\\
&A_1 = f(A_0) = \{3, 6, 5, 2, 4\},\\
&A_2 = f(A_1) = \{5, 4, 2, 6\},\\
&A_3 = f(A_2) = \{2, 6, 4\},\\
&A_4 = f(A_3) = \{6, 4\}, \quad A_5 = f(A_4) = \{4, 6\} = A_4.
\end{aligned}
$$

Аттрактором системы является множество главных точек $A^* = \{4, 6\}$, порождающее две устойчивые цепочки: 4–7–1–2–5–3–6 и 6–2–5–3–7–1–4.

3.2 Неполный ориентированный граф («рваная» матрица, $N = 8$, $T = 4$)

Рассмотрим систему из $N = 8$ элементов, заданную «рваной» матрицей предпочтений, где длины столбцов k_u различны (табл. 2, знак «—» обозначает пустую ячейку). При-

Таблица 2: Неполная «рваная» матрица предпочтений ($N = 8$)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
2	1	4	3	6	5	8	7
—	—	—	1	—	3	—	5

меняя правило жадного просеивания к каждому из 8 столбцов, получаем цепочки с досрочным завершением:

- $C(1) = (1, 2) \implies f(1) = 2; \quad C(2) = (2, 1) \implies f(2) = 1;$
- $C(3) = (3, 4) \implies f(3) = 4; \quad C(4) = (4, 3, 1, 2) \implies f(4) = 2;$
- $C(5) = (5, 6) \implies f(5) = 6; \quad C(6) = (6, 5, 3, 4) \implies f(6) = 4;$
- $C(7) = (7, 8) \implies f(7) = 8; \quad C(8) = (8, 7, 5, 6) \implies f(8) = 6.$

Функциональный граф Γ_f содержит длинную транзиентную цепь $8 \to 6 \to 4 \to 2 \leftrightarrow 1$, и итерации стабилизируются за $T = 4$ шага:

$$
\begin{aligned}
&A_1 = f(V) = \{2, 1, 4, 6, 8\},\\
&A_2 = f(A_1) = \{1, 2, 4, 6\},\\
&A_3 = f(A_2) = \{2, 1, 4\},\\
&A_4 = f(A_3) = \{1, 2\}, \quad A_5 = f(A_4) = \{2, 1\} = A_4.
\end{aligned}
$$

Система сходится к аттрактору $A^* = \{1, 2\}$ (главные точки — 1 и 2) с устойчивыми цепочками 1–2 и 2–1.

Заключение

Формализация метода Решета Хаоса В.Г. Соловьёва на языке теории графов и конечных динамических систем показывает, что данный подход опирается на фундаментальное свойство конечных эндоморфизмов: любое отображение $f\colon V \to V$ стягивает пространство состояний к объединению предельных циклов функционального орграфа Γ_f. Расширение алгоритма на случай произвольных («рваных») матриц предпочтений сохраняет полиномиальную вычислительную сложность ($O(N^3)$ в плотном случае и $O(N^2)$ для разреженных систем) и гарантированную сходимость не более чем за $N - 1$ итераций.

Список литературы

[1] *Соловъёв В. Г.* Решето Хаоса // Сложные системы. 2020. № 4 (37). С. 42–56.

[2] *Соловъёв В. Г.* Решето Хаоса. Кишинёв: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2021. ISBN 978-620-4-71694-7.

[3] *Берж К.* Теория графов и её применения. М.: ИЛ, 1962. 319 с.

[4] *Харари Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1973. 300 с.

[5] *Флажоле Ф., Седжвик Р.* Аналитическая комбинаторика. М.: МЦНМО, 2015. 824 с.