Обобщение законов Кеплера

Владимир Браун

01.06.2023, 4.11.2026

Законы Кеплера могут быть аналитически получены исходя из закона всемирного тяготения с помощью законов сохранения момента импульса и энергии [1].
Однако, ни законы Кеплера, ни закон всемирного тяготения, не допускают вращающихся кеплеровых орбит. Чтобы изначально такие орбиты не исключать, при выводе кинематических уравнений движения в центральном поле тяготения, следует отказаться от использования закона всемирного тяготения.
В настоящей работе такие уравнения, более общие, чем законы Кеплера, получены.

Вывод обобщённых уравнений

1. Универсальное уравнение траектории

Используя две формы записи производной, по Ньютону и по Лейбницу, запишем в полярной системе координат (r, φ) тождества

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \quad \text{и} \quad \dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

Исключив из них время:

$$\mathrm{d}\varphi = \dot{\varphi}\,\mathrm{d}t, \;\; \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}r}{\dot{r}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\varphi = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}}\mathrm{d}r,$$

и проинтегрировав почленно последнее уравнение, получим интеграл

$$\varphi = \int \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}}\mathrm{d}r,$$

который и представляет собой универсальное уравнение траектории, одно из двух возможных в полярной системе координат. Конечно, для тех случаев, когда угловая и радиальная скорости, $\dot{\varphi}$ и $\dot{r}$, представимы функциями от r и интеграл может быть взят.

2. Выражение скорости через радиальную и угловую скорости

Векторы радиальной и поперечной (трансверсальной) составляющих скорости ортогональны, поэтому квадрат скорости равен сумме квадратов этих составляющих:

$$v^2 = v_r^2 + v_\perp^2.$$

Поскольку радиальная составляющая скорости есть просто скорость изменения координаты r (радиальная скорость), а поперечная составляющая скорости есть скорость изменения угловой координаты (угловая скорость) умноженная на радиус r,

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\perp = r\dot{\varphi},$$

то имеем следующее выражение скорости через радиальную и угловую скорости:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2.$$

3. Представление угловой скорости как функции расстояния

Момент скорости тела в центральном поле постоянен:

$$rv_{\perp} = r^2\dot{\varphi} = L\,.$$

Отсюда получаем искомое представление угловой скорости как функции от *r*:

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{r^2}\,.$$

4. Уравнение скорости как функции расстояния

Заменив угловую скорость в выражении скорости через составляющие,

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\,,$$

её выражением через момент скорости и расстояние, получим уравнение, не содержащее угловой координаты:

$$v^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2}\,.$$

Движение планет происходит в ограниченной кольцевой области, между минимальным и максимальным расстоянием от центра тяготения, которые называются перигелием и афелием орбиты, и перицентром и апоцентром в общем случае. Обозначим их как *p* и *a*. При достижении границ указанной области радиальная составляющая скорости,

$$\dot{r} = \sqrt{v^2 - \frac{L^2}{r^2}}\,,$$

становится равной нулю. Приравняв радиальную скорость к нулю, получим уравнение относительно *r*, корнями которого являются *a* и *p* – апоцентр и перицентр траектории:

$$v^2r^2 - L^2 = 0\,.$$

Предположим, что функция $v^2r^2 - L^2$ является многочленом от *r*. Наличие корней *a* и *p* означает, что многочлен делится на $(a - r)$ и $(r - p)$, и имеет представление:

$$v^2r^2 - L^2 = w\left(a - r\right)\left(r - p\right),$$

где *w* – некоторый многочлен. Из этого равенства получаем для скорости уравнение:

$$v^2 = \frac{w\left(a - r\right)\left(r - p\right)}{r^2} + \frac{L^2}{r^2}\,,$$

или, после раскрытия скобок и объединения членов по степеням *r*:

$$v^2 = -w + \frac{w\left(a + p\right)}{r} + \frac{L^2 - wap}{r^2}\,.$$

Взяв значение квадрата скорости на бесконечно большом расстоянии от центра тяготения, предполагая, что значение *w* в r_{∞} остаётся конечным, получим:

$$v_{\infty}^2 = -w\,.$$

То есть, многочлен -*w* есть константа, квадрат остаточной скорости.

5. Представление радиальной скорости как функции расстояния

Имея уравнение скорости как функции расстояния, имеем вместе с тем и искомое представление радиальной скорости:

$$\dot r = \sqrt{v^2 - \frac{L^2}{r^2}} = \frac{\sqrt{w(a-r)(r-p)}}{r}.$$

6. Уравнение траектории

Получив представления угловой и радиальной скорости как функций расстояния,

$$\dot\varphi = \frac{L}{r^2} \quad \text{и} \quad \dot r = \frac{\sqrt{w(a-r)(r-p)}}{r},$$

подставим их теперь в наше универсальное уравнение траектории:

$$\varphi = \int \frac{\dot\varphi}{\dot r}\,\mathrm{d}\,r = \int \frac{L}{r\sqrt{w(a-r)(r-p)}}\,\mathrm{d}\,r\,.$$

Интеграл табличный. В случае эллиптической или гиперболической скорости, когда $wap > 0$ и $a - p \neq 0$, подходит решение: [2], № 380.111, случай 5; которое может быть записано в четырёх вариантах, с ±arccos и с ±arcsin. Записав решение в варианте с arccos, получим уравнение траектории как функцию $\varphi(r)$:

$$\varphi = \frac{L}{\sqrt{wap}}\arccos\frac{2ap-(a+p)r}{(a-p)r} + \varphi_0\,.$$

Чтобы получить уравнение траектории как функцию $r(\varphi)$, решим данное уравнение относительно r, и в результате, полагая $\varphi_0 = 0$, получим следующее уравнение:

$$r = \frac{f}{1+e\cos(i\varphi)},$$

где e – эксцентриситет орбиты, f – фокальный параметр орбиты, i – параметр смещения перицентра орбиты, и

$$e = \frac{a-p}{a+p},\ f = \frac{2ap}{a+p},\ i = \frac{\sqrt{wap}}{L}\,.$$

Полученное уравнение есть уравнение движения по вращающемуся коническому сечению, эллипсу ($a > 0$, $w > 0$) или гиперболе ($a < 0$, $w < 0$). (В случае же, когда $a = \infty$ и $w = 0$, требующем отдельного исследования, уравнение скорости и форма траектории остаются здесь неопределёнными.)

Заметим, что уравнение может быть записано в четырёх вариантах, с ±cos и с ±sin, что дает четыре варианта ориентации траектории, в частности, начального положения перицентра траектории: справа, слева, и выше, ниже центра, соответственно.

7. Интеграл времени как функции расстояния

Начнём с тождества

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,t}.$$

Из него получаем:

$$\mathrm{d}\,t = \frac{1}{\dot{r}}\mathrm{d}\,r, \qquad t = \int \frac{1}{\dot{r}}\mathrm{d}\,r.$$

Подставив сюда выражение радиальной скорости как функции расстояния от центра тяготения, получаем следующий интеграл времени движения:

$$t = \int \frac{r}{\sqrt{w(a-r)(r-p)}}\mathrm{d}\,r.$$

8. Период обращения

В общем случае период обращения – это не время совершения полного оборота, равного 2π, но время, за которое проходится повторяющийся участок траектории, например, участок от перигелия до афелия и обратно до перигелия. Воспользовавшись интегралом времени, получаем для периода обращения определённый интеграл

$$T = 2\int_p^a \frac{r}{\sqrt{w(a-r)(r-p)}}\mathrm{d}\,r.$$

Интеграл табличный. Для эллиптической скорости, когда $w > 0$ и $a - p \neq 0$, подходит решение: [2], № 380.011, со ссылкой на № 380.001, случай 5. Записывая решение в варианте с арккосинусом, получаем:

$$T = \frac{2}{\sqrt{w}}\left(\frac{a+p}{2}\arccos\frac{a+p-2r}{a-p} - \sqrt{(a-r)(r-p)}\right)\Bigg|_p^a,$$

то есть,

$$T = \frac{\pi(a+p)}{\sqrt{w}}.$$

9. Смещение перицентра траектории

Смещение перицентра определяется периодом функции

$$r(\varphi) = \frac{f}{1+e\cos(i\varphi)},$$

задающей траекторию. Её период, совпадающий с периодом функции $\cos(i\varphi)$, в отличие от периода функции $\cos(\varphi)$, не равен полному обороту, 2π, но равен $2\pi/i$. Отличие периода функции $r(\varphi)$ от полного оборота и есть искомое смещение:

$$\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{1}{i} - 1\right).$$

10. Гравитационное ускорение

Имея уравнение скорости как функции расстояния:

$$v^2 = -w + \frac{w(a+p)}{r} + \frac{L^2 - wap}{r^2},$$

нетрудно получить и аналогичное уравнение гравитационного ускорения:

$$g = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(-w + \frac{w(a+p)}{r} + \frac{L^2 - wap}{r^2}\right),$$

то есть,

$$g = -\left(\frac{w(a+p)}{2r^2} + \frac{L^2 - wap}{r^3}\right),$$

в согласии с теоремой Ньютона о движении тел по подвижным орбитам [3].

Заключение

В заключение перечислим полученные здесь новые уравнения.

1. Уравнение (орбитальной) скорости

$$v^2 = -w + \frac{w(a+p)}{r} + \frac{L^2 - wap}{r^2},$$

где w – квадрат остаточной скорости со знаком минус:

$$w = -v_\infty^2.$$

2. Уравнение радиальной скорости:

$$\dot{r} = \frac{\sqrt{w(a-r)(r-p)}}{r}.$$

3.Уравнение траектории движения (по вращающимся эллипсу или гиперболе):

$$r = \frac{f}{1 + e\cos(i\varphi)},$$

где e и f – эксцентриситет и фокальный параметр эллипса или гиперболы, i – параметр смещения перицентра траектории, равный:

$$i = \frac{\sqrt{wap}}{L}.$$

4. Интеграл времени движения как функции расстояния (от центра тяготения):

$$t = \int \frac{r}{\sqrt{w(a-r)(r-p)}}\,\mathrm{d}r.$$

5. Период обращения по (вращающемуся) эллипсу:

$$T = \frac{\pi(a+p)}{\sqrt{w}}.$$

6. Смещение перицентра орбиты (смещение вращающегося эллипса):

$$\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{1}{i} - 1\right).$$

7. Уравнение гравитационного ускорения:

$$g = -\left(\frac{w(a+p)}{2r^2} + \frac{L^2 - wap}{r^3}\right).$$

И сравним данные уравнения с законами Кеплера.

1-ый закон.

Каждая планета Солнечной системы движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

Соответствующее уравнение (невращающегося) эллипса является частным случаем уравнения вращающегося эллипса при $i = 1$.

2-ой закон.

Каждая планета движется в плоскости, проходящей через центр Солнца, причём за любые равные промежутки времени радиус-вектор, соединяющий Солнце и планету, описывает собой равные площади (секториальная скорость постоянна).

В центральном поле, момент скорости равен удвоенной секториальной скорости,

$$L = 2\dot{S},$$

и постоянен. Следовательно, и секториальная скорость постоянна [4]. Обобщение и закон Кеплера совпадают. (Постоянство момента скорости – один из исходных пунктов обобщённой теории.)

3-ий закон.

Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей орбит планет.

Из обобщённой теории следует, что в классической теории тяготения для квадрата остаточной скорости выполняется:

$$w = \frac{2GM}{a+p},$$

и, следовательно:

$$T = \frac{\pi(a+p)}{\sqrt{w}} = \pi\sqrt{\frac{(a+p)^3}{2GM}}, \text{ и } T^2 = \pi^2\frac{(a+p)^3}{2GM}.$$

Ссылки

1. Бутиков Е. И. Закономерности кеплеровых движений. 2006.
2. Г. Б. Двайт. Таблицы интегралов. Издание второе, исправленное. М.: Наука, 1966.
3. Исаак Ньютон. Математические начала натуральной философии. М.: Наука, 1989.
   О движении тел по подвижным орбитам и о перемещении апсид. Предложение XLIV Теорема XIV.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том 1. Механика. М.: Наука, 1988.