УДК 511

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ПРОСЕИВАНИЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ: ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ РЕШЕТО (LOGSIEVE)

А.Ю. Юткин
независимый исследователь, г. Самара, Россия

A GEOMETRIC SIEVING METHOD FOR PRIMES: LOGARITHMIC SIEVE (LOGSIEVE)

A. Yu. Yutkin
independent researcher, Samara, Russia

Аннотация

В работе предложен геометрический метод просеивания простых чисел – логарифмическое решето (LogSieve). Метод использует аддитивное свойство логарифмов на плоскости $(u = \log x, v = \log y)$: прямая, проходящая через узел $(\log a, \log b)$ перпендикулярно биссектрисе $v = u$, пересекает ось абсцисс в точке $\log(ab)$, что позволяет исключать нечетные составные числа $n = ab$ маркировкой их логарифмических образов на оси абсцисс. Оптимизация метода на основе канонических узлов обеспечивает его линейную асимптотическую сложность $\Theta(N)$ по числу геометрических построений. В рамках идеальной непрерывной геометрии метод полон и корректен; практическая реализация ограничена погрешностью позиционирования узлов $\varepsilon < 1/(2N)$. В отличие от вычислительных алгоритмов, LogSieve служит наглядным инструментом визуализации механизма просеивания.

Abstract

This paper proposes a geometric method for identifying prime numbers — the logarithmic sieve (LogSieve). The method exploits the additive property of logarithms on the plane (u, v), where $u = \log x, v = \log y$: a straight line passing through the grid node $(\log a, \log b)$ perpendicular to the bisector $v = u$ intersects the abscissa axis at the point $\log(ab)$, which makes it possible to eliminate odd composite numbers $n = ab$ by marking their logarithmic images on the abscissa axis. Optimization of the method based on canonical nodes yields a linear asymptotic complexity $\Theta(N)$ in the number of geometric constructions. Within the framework of ideal continuous geometry, the method is complete and correct; its practical implementation is limited by the node positioning accuracy $\varepsilon < 1/(2N)$. Unlike computational algorithms, LogSieve serves as a visual tool for illustrating the sieving mechanism.

Ключевые слова: простые числа, решето простых чисел, геометрический метод, аддитивность логарифмов, логарифмическое решето, LogSieve.

Keywords: prime numbers, prime sieve, geometric method, additivity of logarithms, logarithmic sieve, LogSieve.

1. Введение

Проблема выявления и систематизации простых чисел традиционно занимает одно из центральных мест в теории чисел и сохраняет свою актуальность как в фундаментальных исследованиях, так и в прикладных областях – в частности, в современной криптографии и вычислительной математике. Традиционные алгоритмы поиска простых чисел (решето Эратосфена, Сундарама, Аткина и др. [1-3]) опираются на алгебраический аппарат, что обеспечивает их высокую вычислительную эффективность при реализации на уровне программного кода. Однако наряду с классическими подходами существуют также и геометрические методы просеивания, основанные на визуальной идентификации простых чисел посредством графических построений – без их прямого вычисления.

Наиболее известным из таких методов является визуальное решето Матиясевича–Стечкина [4]. Метод использует параболу $x = y^2$ в декартовой системе координат и основан на том, что прямая, проведенная через точки параболы $(i^2, -i)$, (j^2, j), пересекает X-ось в точке с абсциссой $i \cdot j$. Таким образом, каждая прямая, проведенная через пару отмеченных точек параболы ($i, j = 2, 3, ...$), исключает на оси абсцисс ровно одно составное число, а простые числа остаются «невычеркнутыми».

В настоящей работе предлагается иной (конструктивно альтернативный) геометрический метод просеивания простых чисел – логарифмическое решето (LogSieve). Метод основан на аддитивном свойстве логарифмов и реализуется в системе координат с логарифмическим масштабом по обеим осям (на логарифмической плоскости). Ключевыми преимуществами LogSieve являются:

- линейная асимптотическая сложность $\Theta(N)$ по числу геометрических построений;
- экспоненциальное сжатие рабочего поля (величины порядка $\log N$ против порядка N^2);
- конструктивная простота.

В совокупности это делает метод не только наглядным инструментом визуализации, но и структурно лаконичным способом представления механизма просеивания простых чисел на логарифмической плоскости.

2. Геометрическая основа метода

Покажем, что прямая на логарифмической плоскости (u, v), где $u = \log x$ и $v = \log y$ (масштаб по обеим осям одинаковый), проходящая через точку $A(\log a, \log b)$ перпендикулярно биссектрисе $v = u$, пересекает ось абсцисс в точке с абсциссой $\log(ab)$ (рис. 1).

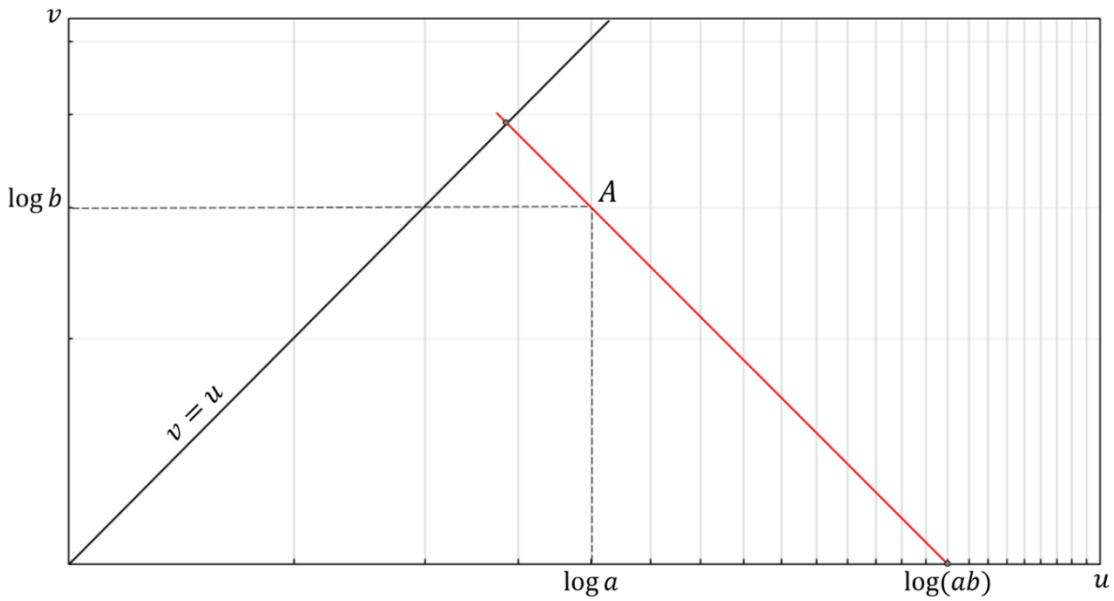


Рисунок 1. Геометрическая интерпретация аддитивного свойства логарифмов

В координатах (u, v) прямая, перпендикулярная биссектрисе $v = u$, имеет угловой коэффициент $k = -1$. Запишем уравнение искомой прямой, проходящей через точку $A\ (\log a\,, \log b)$:

$$v - \log b = -(u - \log a);$$
$$v = -u + \log a + \log b.$$

Найдем точку пересечения прямой с осью абсцисс, положив $v = 0$:

$$0 = -u + \log a + \log b;$$
$$u = \log a + \log b;$$
$$u = \log(ab).$$

Таким образом, предложенное геометрическое построение, опирающееся на аддитивное свойство логарифмов, дает конструктивный способ для реализации решета простых чисел: составные числа $n = ab$ исключаются на оси абсцисс путем маркировки их логарифмических образов $\log n = \log a + \log b$. В итоге на оси абсцисс остаются лишь точки $\log p$, соответствующие простым числам p, так как их логарифмы не представимы в виде суммы логарифмов целых сомножителей, больших единицы.

3. Геометрическая схема просеивания простых чисел

Применим доказанное в разделе 2 свойство к множеству нечетных натуральных чисел. Рассмотрим логарифмическую координатную плоскость с осями u и v, на которых это множество задано логарифмами его элементов: $\{\log 3, \log 5, \log 7, ...\}$. Рассмотрение только нечетных чисел позволяет вдвое сократить объем геометрических построений.

Система линий $u = \log a$ и $v = \log b$, порожденная этим множеством, образует координатную сетку с узлами в точках пересечения $(\log a, \log b)$, где a и b – нечетные натуральные числа, не меньшие трех. В силу симметрии для построения решета простых чисел в рамках данного метода достаточно ограничиться рассмотрением узлов с координатами $(\log a, \log b)$, где $3 \le b \le a$.

Через узлы сетки для каждого фиксированного значения b проведем серию прямых, перпендикулярных биссектрисе $v = u$. Каждая из этих прямых задается уравнением:

$$u + v = \log a + \log b = \log(ab)$$

и пересекает ось абсцисс (при $v = 0$) в точке с координатой $u = \log(ab)$, маркируя на оси значение, соответствующее нечетному составному числу ab (рис. 2).

Поскольку произведение двух нечетных чисел, каждое из которых не меньше трех, является нечетным составным числом, а любое нечетное составное число n допускает представление $n = ab$, где a и b – нечетные натуральные числа, не меньшие трех, построенное множество точек пересечения совпадает со множеством $\{\log n\}$, где n принимает значения всех нечетных составных чисел, начиная с девяти.

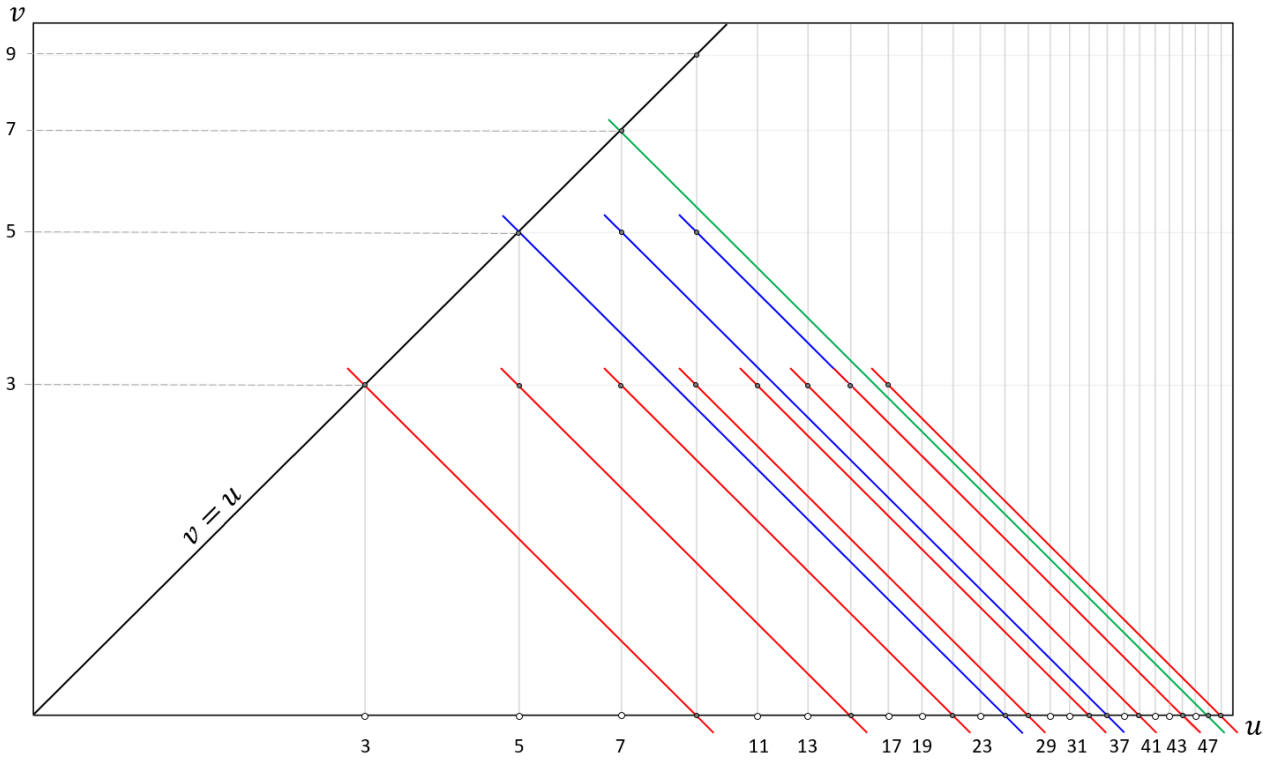


Рисунок 2. Схема просеивания простых чисел на логарифмической плоскости

В итоге на оси абсцисс немаркированным останется множество точек $\{\log p\}$, где p – нечетное простое число.

Заметим, что для просеивания простых чисел, не превосходящих заданного N, достаточно ограничиться рассмотрением узлов $(\log a, \log b)$, где b – простое число. Если b составное, то все числа вида ab уже будут исключены на этапах, соответствующих простым делителям b. Кроме того, из условий $3 \le b \le a$ и $ab \le N$ следует $b^2 \le N$, поэтому достаточно рассматривать значения $b \le \sqrt{N}$.

Таким образом, данная геометрическая конструкция реализует решето, в котором каждая серия прямых маркирует на оси абсцисс точки, соответствующие нечетным составным числам, кратным b, начиная с b^2. Это соответствует логике исключения кратных, характерной для решета Эратосфена.

4. Оптимизация процедуры просеивания

В геометрической схеме, описанной в разделе 3, различные представления $n = ab$ порождают одну и ту же прямую $u + v = \log n$, пересекающую ось абсцисс в одной и той же точке. В результате нечетное составное число n, представленное на оси абсцисс значением $\log n$, оказывается исключенным неоднократно. Например, число 45 исключается дважды: при построении серии прямых, соответствующих простому делителю $b = 3$ (через узел $(\log 15, \log 3)$), и при построении серии прямых для $b = 5$ (через узел $(\log 9, \log 5)$) (рис. 2).

Для устранения избыточности построений достаточно рассмотрения только канонических узлов $(\log(n/p), \log p)$, где p – наименьший простой делитель n. С геометрической точки зрения это ограничение означает, что в построении участвуют лишь те узлы, обе координаты которых не были маркированы на предыдущих этапах просеивания. Под этапом будем понимать построение серии прямых, перпендикулярных биссектрисе $v = u$ и проходящих через канонические узлы, соответствующие фиксированному простому числу p (наименьшему простому делителю n).

При таком подходе каждое нечетное составное число, представленное на оси абсцисс своим логарифмом, исключается ровно один раз – на этапе просеивания, соответствующем его наименьшему простому делителю.

5. Пример

Найдем все нечетные простые числа в диапазоне $[3, N]$ для $N = 100$.

Рассмотрим на логарифмической плоскости только канонические узлы $(\log a, \log b)$, где a и b – нечетные натуральные числа, удовлетворяющие условиям $3 \le b \le a, b \le \sqrt{100} = 10$; в соответствии с разделом 4 из рассмотрения исключаются узлы, у которых хотя бы одна координата уже была маркирована на предыдущих этапах просеивания.

1. На первом этапе ($b = 3$) через канонические узлы $(\log a, \log 3)$ проведем серию прямых $u + v = \log(3a)$. На оси абсцисс маркируются логарифмические образы нечетных составных чисел, кратных трем:

$$\{9, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57, 63, 69, 75, 81, 87, 93, 99\}.$$

2. На втором этапе ($b = 5$) проведем прямые $u + v = \log(5a)$ через узлы $(\log a, \log 5)$. Значения $\log 9$ и $\log 15$ уже были маркированы на первом этапе просеивания, поэтому узлы $(\log 9, \log 5)$, $(\log 15, \log 5)$ исключаются из рассмотрения. Серия прямых исключает составные числа, кратные пяти:

$$\{25, 35, 55, 65, 85, 95\}.$$

3. На третьем этапе ($b = 7$) проведем прямые $u + v = \log(7a)$ через узлы $(\log a, \log 7)$. Узел $(\log 9, \log 7)$ исключается из рассмотрения, так как его абсцисса $\log 9$ уже маркирована. Серия прямых исключает:

$$\{49, 77, 91\}.$$

Просеивание завершается, так как следующее нечетное число $b = 9$ является составным (абсцисса $\log 9$ была маркирована на этапе просеивания чисел, кратных трем), а следующее простое число $b = 11$ больше $\sqrt{100}$.

Таким образом, на оси абсцисс немаркированными остаются значения $\{\log p\}$, соответствующие нечетным простым числам:

$$\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97\}.$$

6. Область применения метода

Определим границы применимости предложенного геометрического метода.

6.1. Идеальная непрерывная геометрия как математическая модель

В рамках данной работы логарифмическое решето LogSieve рассматривается как строгая математическая модель. Метод реализуется в рамках идеальной непрерывной геометрии, следовательно, в этой парадигме:

- логарифмическая плоскость представляет собой непрерывный континуум $\mathbb{R}^2$;
- геометрические объекты (точки, прямые) не имеют толщины;
- на оси абсцисс, представляющей собой континуум $\mathbb{R}$, выделено дискретное подмножество точек, соответствующих логарифмам нечетных натуральных чисел, не меньших трех.

Геометрический метод не аппроксимирует арифметику, а представляет собой ее точное отображение на логарифмической плоскости. В данной парадигме дискретность множества нечетных натуральных чисел проявляется как дискретное множество точек пересечения на непрерывной оси абсцисс, в то время как сама логарифмическая плоскость и узлы на ней остаются идеальными объектами непрерывной геометрии.

6.2. Корректность и полнота метода

Рассмотрим свойства решета LogSieve с точки зрения корректности и полноты.

- ***Корректность (отсутствие ложных отметок)***

На логарифмической плоскости рассматриваются только узлы, отвечающие парам нечетных натуральных чисел $a, b,\ 3 \le b \le a$. Произведение нечетных натуральных чисел, каждое из которых не меньше трех, нечетно и составно. Следовательно, ни один узел сетки не может быть спроецирован на ось абсцисс в точку, соответствующую четному или простому числу.

- ***Полнота (отсутствие пропусков)***

Пусть $n = ab$ – нечетное составное число, где b – наименьший простой делитель n. Тогда $a = n/b$ – нечетное натуральное число, не меньшее b, и узел с координатами $(\log a, \log b)$ на логарифмической плоскости проецируется на ось абсцисс в точку с координатой $\log(ab)$. Таким образом, каждому нечетному составному числу n, отмеченному на оси абсцисс, соответствует геометрический прототип – канонический узел. Поскольку представление $n = ab$, в котором b – наименьший простой делитель

n, единственно, соответствие «нечетное составное число ↔ канонический узел» взаимно однозначно по построению.

6.3. Практическая реализация метода

Для перехода от идеальной модели в область ее практической реализации (ручной чертеж, компьютерная растеризация) необходимо учесть погрешность $\varepsilon > 0$ позиционирования. Идеальная точка с координатами $(\log a, \log b)$ на логарифмической плоскости отображается точкой $(\log a + \delta_a, \log b + \delta_b)$, где $|\delta_a| \le \varepsilon, |\delta_b| \le \varepsilon$; здесь δ – величина ошибки смещения логарифмических координат при построении точки. Прямая, перпендикулярная биссектрисе $v = u$ и проходящая через смещенный узел, пересекает ось абсцисс в точке:

$$u_{int} = \log a + \delta_a + \log b + \delta_b = \log(ab) + \delta_a + \delta_b.$$

Тогда абсолютная погрешность на логарифмической оси составляет $\Delta = |\delta_a + \delta_b| \le 2\varepsilon$.

Чтобы исключить пропуск составных чисел или ошибочное отнесение простого числа к составным, погрешность Δ должна быть меньше половины минимального расстояния между соседними проекциями на оси абсцисс. Консервативная оценка снизу для минимального расстояния d_{min} достигается на наибольшем просеиваемом числе N:

$$d_{min} = \log(N+2) - \log N = \log\left(1 + \frac{2}{N}\right) \le \frac{2}{N}.$$

Следовательно, условие надежной идентификации числа на логарифмической оси $2\varepsilon < d_{min}/2$ принимает вид:

$$\varepsilon < \frac{1}{4}\log\left(1 + \frac{2}{N}\right).$$

Используя асимптотическое разложение $\log(1+x) \approx x$ при $x \to 0$ (то есть для больших N), получаем практическую оценку:

$$\varepsilon < \frac{1}{2N}.$$

Можно показать, что в рамках ручного черчения, исходя из эргономических ограничений ($\varepsilon \approx 10^{-3}$), метод остается надежным инструментом до $N \sim 5 \cdot 10^2$, что достаточно для образовательных целей и визуализации механизма просеивания простых чисел. Заметим, что практическая реализация решета LogSieve требует наличия только элементарных чертежных инструментов – масштабной линейки и чертежного угольника с углом 45°, что подчеркивает концептуальную простоту метода и обеспечивает наглядность механизма просеивания простых чисел.

Компьютерная реализация метода позволяет позиционировать узлы сетки с машинной точностью (double precision): с учетом накопления абсолютной погрешности при вычислении логарифмических координат условие практической реализации метода выполняется до $N \sim 10^{13} - 10^{15}$. Ограничение на визуальное считывание при фиксированном масштабе устраняется за счет интерактивной визуализации (масштабирование и панорамирование).

Таким образом, идеальная геометрическая модель реализуема и на практике: погрешность позиционирования ε искажает проекции узлов на оси абсцисс, но аддитивное свойство логарифмов в вычислениях координат сохраняется, а условие $\varepsilon < \frac{1}{2N}$ задает требуемую точность построения, убывающую с ростом N.

7. Асимптотическая сложность метода

Оценим вычислительную сложность геометрического метода в терминах количества геометрических построений. Пусть N – верхняя граница просеивания. Под элементарной операцией будем понимать построение на уже заданной логарифмической плоскости (u, v) одной прямой, ортогональной биссектрисе $v = u$, с маркировкой абсциссы точки ее пересечения с осью абсцисс.

В базовом исполнении (без учета оптимизации, описанной в разделе 4) геометрический метод является графической интерпретацией классического решета Эратосфена, в которой некоторые нечетные составные числа могут исключаться неоднократно. Его асимптотическая сложность по числу элементарных операций соответствует оценке $O(N \log\log N)$.

В оптимизированной схеме каждое нечетное составное число исключается ровно один раз. Следовательно, число элементарных геометрических построений $T(N)$ равно количеству нечетных составных чисел, не превосходящих N по порядку величины:

$$T(N) \sim \frac{N}{2} - \pi(N).$$

Согласно теореме о распределении простых чисел [5], асимптотика функции $\pi(N)$ имеет вид:

$$\pi(N) = \frac{N}{\ln N} + O\left(\frac{N}{\ln^2 N}\right).$$

Подставляя это выражение в формулу для $T(N)$, получаем:

$$T(N) = \frac{N}{2} - \frac{N}{\ln N} + O\left(\frac{N}{\ln^2 N}\right) = \Theta(N).$$

Оптимизация процедуры просеивания меняет асимптотику метода: общее количество геометрических операций становится линейно зависимым от верхней границы поиска. С точки зрения асимптотики оптимизированный метод является графической интерпретацией решета с линейным временем работы, где каждое составное число исключается ровно один раз [6].

Принципиальное отличие предложенного подхода состоит в природе операций: в классическом решете (и его модификациях) каждое исключение составного числа требует арифметического вычисления кратного, тогда как в геометрическом решете LogSieve эта процедура осуществляется посредством геометрических построений на логарифмической плоскости.

8. Заключение

В настоящей работе предложен новый геометрический метод просеивания простых чисел, опирающийся на аддитивное свойство логарифмов, – логарифмическое решето LogSieve.

Новизна предлагаемого подхода заключается в следующем:

- ***Геометризация арифметики.*** Метод представляет мультипликативные соотношения как результат построения линейных объектов (прямых и точек) на логарифмической плоскости, позволяя просеивание простых чисел осуществить посредством замены арифметических вычислений геометрическими построениями.
- ***Конструктивная простота и наглядность.*** Практическая реализация LogSieve (с учетом ограничения $\varepsilon < \frac{1}{2N}$) требует лишь элементарных чертежных инструментов, что подчеркивает его концептуальную простоту и обеспечивает наглядность механизма просеивания простых чисел.
- ***Согласованность с классическими результатами.*** Структура решета LogSieve сохраняет логику исключения кратных, характерную для классического решета Эратосфена (и его оптимизированной версии с линейным временем работы), но представляет ее в новой геометрической форме.

Следует отметить, что LogSieve не конкурирует с современными вычислительными реализациями решет простых чисел в производительности – его ценность в другом: метод дает конструктивно простую и наглядную демонстрацию самого механизма просеивания простых чисел, что делает его эффективным инструментом для образовательных целей, визуализации и концептуального понимания.

Список литературы

1. Horsley S. Κόσκινον Ερατοσθένους, or, The Sieve of Eratosthenes. Being an Account of His Method of Finding All the Prime Numbers // Philosophical Transactions of the Royal Society (1683–1775). — 1772. — Vol. 62. — P. 327–347.

2. Ramaswami Aiyar V. Sundaram's Sieve for Prime Numbers // The Mathematics Student. — 1934. — Vol. 2, № 2. — P. 73.

3. Atkin A. O. L., Bernstein D. J. Prime Sieves Using Binary Quadratic Forms // Mathematics of Computation. — 2004. — Vol. 73, № 246. — P. 1023–1030.

4. Matiyasevich Yu., Stechkin B. A Visual Sieve for Prime Numbers [Электронный ресурс] // Personal Journal of Yuri Matiyasevich: сайт. — 1999. — URL: logic.pdmi.ras.ru (дата обращения: 05.11.2026).

5. Hardy G. H., Wright E. M. An Introduction to the Theory of Numbers. — 6th ed. — Oxford: Oxford University Press, 2008. — Ch. XXII. (Теорема о распределении простых чисел.)

6. Gries D., Misra J. A Linear Sieve Algorithm for Finding Prime Numbers // Communications of the ACM. — 1978. — Vol. 21, № 10. — P. 809–811.