

Единственность треугольника Серпинского

Георгий Гуляев

6 октября 2026 г.

1. Введение

Треугольные числа T_n - это широко известный в математике класс фигурных чисел [1]. Они определяются формулой:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В 1961 году В. Серпинский в работе [2] поставил вопрос: существует ли прямоугольный треугольник, все три стороны которого — треугольные числа? Он привёл пример, найденный ранее Заранкевичем:

$$T_{132}^2 + T_{143}^2 = T_{164}^2 \quad \text{или} \quad 8778^2 + 10296^2 = 13530^2.$$

Серпинский отметил, что неизвестно, существуют ли другие такие треугольники и конечно ли их число. И, насколько нам известно, до публикации настоящей статьи не было найдено второго такого треугольника и не было доказано, что он не существует.

В настоящей работе мы докажем, что второго такого треугольника существовать не может и тем самым подтвердим единственность треугольника Серпинского.

2. Прямоугольный треугольник из треугольных чисел

Найти вторую пифагорову тройку из треугольных чисел в попытке ответить на вопрос Серпинского о единственности треугольника найденного Заранкевичем

$$T_{132}^2 + T_{143}^2 = T_{164}^2, \tag{1}$$

нам не удалось. Поэтому мы сосредоточимся на доказательстве единственности такой тройки.

Теорема 1. Уравнение

$$T_a^2 + T_b^2 = T_c^2 \quad (2)$$

с натуральными индексами $a < b < c$ имеет единственное решение:

$$(a, b, c) = (132, 143, 164).$$

Доказательство теоремы 1 разбито на несколько шагов и опирается на приведение (1) к эллиптической кривой, полный список целых точек которой получен методом Стрёкера–Цанакиса и независимо подтверждён в Julia.

Параметризация пифагоровых троек. Всякое решение уравнения (1) получается из примитивной пифагоровой тройки умножением на общий делитель. То есть, всегда найдутся $d \in \mathbb{N}$ и нечётные взаимно простые $m > n > 0$, $m - n$ нечётно, такие что

$$T_a = d(m^2 - n^2), \quad T_b = 2dmn, \quad T_c = d(m^2 + n^2). \quad (3)$$

Поскольку уравнение (2) симметрично относительно замены $a \leftrightarrow b$, можно без ограничения общности считать, что T_a — нечётный катет примитивной тройки. Случай, когда T_a чётное, сводится к этому заменой $a \leftrightarrow b$.

Условия треугольности. Требование, что T_a, T_b, T_c — треугольные числа, равносильно системе уравнений Пелля

$$X^2 = 8dA + 1, \quad Y^2 = 8dB + 1, \quad Z^2 = 8dC + 1, \quad (4)$$

где

$$A = m^2 - n^2, \quad B = 2mn, \quad C = m^2 + n^2, \quad (5)$$

а $X = 2a + 1$, $Y = 2b + 1$, $Z = 2c + 1$ — нечётные натуральные числа.

Из системы (4) следует, что $X^2 - 1$, $Y^2 - 1$, $Z^2 - 1$ пропорциональны A, B, C с общим множителем $8d$. Исключая d , получаем

$$\frac{X^2 - 1}{A} = \frac{Y^2 - 1}{B} = \frac{Z^2 - 1}{C} = 8d.$$

Это соотношение используется ниже при выводе квадрики (6).

Теорема 2. Уравнение (2) с натуральными индексами $a < b < c$ равносильно существованию натуральных d, m, n, X, Y, Z , удовлетворяющих (3)–(5).

Доказательство. Необходимость. Пусть (a, b, c) — решение (2). Тогда (T_a, T_b, T_c) — пифагорова тройка, и по классической теореме найдутся d, m, n с (3). Условие $T_k \in \{T_n\}$ равносильно $8T_k + 1 = (2k + 1)^2$, что даёт (4). Достаточность — обратный ход.

Квадрика. Исключим d, m, n из системы (4)–(5). Полная система эквивалентна квадрике

$$V^2 = \frac{Q(t)}{133}, \quad (6)$$

где

$$Q(t) = 254651781517t^4 - 1103176253900t^3 + 1792145288332t^2 - \\ - 1293951094800t + 350342345808,$$

а угловой параметр t задаётся формулой

$$t = \frac{Y}{X} = \frac{2b + 1}{2a + 1}.$$

Происхождение коэффициента 133. Коэффициент 133 в (6) — это $A_0 = m_0^2 - n_0^2 = 13^2 - 6^2$ для базового решения $(m_0, n_0) = (13, 6)$, соответствующего известному треугольнику (1). Квадрика (6) бирационально эквивалентна системе (4)–(5) и описывает все решения задачи.

Эллиптическая кривая E_2 . Квадрика (6) бирационально эквивалентна эллиптической кривой

$$E_2 : y^2 + xy + y = x^3 - 1988129x - 295330048.$$

Кондуктор E_2 равен

$$N_{E_2} = 155142424171323274143 \approx 1.55 \cdot 10^{20}.$$

Теорема 3. Группа Морделла–Вейля кривой E_2 имеет вид

$$E_2(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}^3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2.$$

В частности, алгебраический ранг E_2 равен 3.

Доказательство. Ранг вычислен двумя независимыми методами: функцией `Rank` в системе Magma (2-спуск с доказательством) и функцией `E.rank()` в системе SageMath. Все методы дают значение 3. Кручение $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ задаётся двумя точками порядка 2: $\tau_1 = (-1329, 664)$, $\tau_2 = (1479, -740)$, и их суммой $\tau_3 = \tau_1 + \tau_2$. Теорема доказана.

Теорема 4. Кривая E_2 имеет ровно 39 классов целых точек (с точностью до замены $y \rightarrow -y - x - 1$). Полный список представителей приведён в таблице 1.

№	Точка	№	Точка
1	(-1329, 664)	21	(3390, -180374)
2	(-1314, -6326)	22	(3873, 221902)
3	(-1209, 19084)	23	(4329, -270920)
4	(-1122, -22313)	24	(4881, 323584)
5	(-915, -27074)	25	(6666, 528334)
6	(-796, -27585)	26	(9711, -951536)
7	(-744, 28159)	27	(11853, -1287116)
8	(-579, -25436)	28	(14513, -1747296)
9	(-432, 22192)	29	(14661, 1759564)
10	(-345, -18524)	30	(26616, 4322824)
11	(-222, 11734)	31	(54840, 12810751)
12	(-202, -9801)	32	(61329, -15214610)
13	(-159, 4174)	33	(62631, 15638884)
14	(1479, -740)	34	(103631, 33305784)
15	(1500, -10652)	35	(106311, -34713236)
16	(1661, -32226)	36	(219333, 102608494)
17	(1830, 45943)	37	(288816, 155068159)
18	(1920, 53503)	38	(1151796, -1236702836)
19	(2361, -91586)	39	(561447546, -13303715417186)
20	(2543, 104064)		

Таблица 1: Полный список 39 классов целых точек на E_2 .

Доказательство. Список получен методом Стрёкера–Цанакиса, реализованным в системе Magma 2.29 (функция `IntegralPoints`). Этот метод основан на оценках линейных форм от эллиптических логарифмов и даёт

доказательно полный список целых точек при условии, что ранг кривой известен (теорема 3). Теорема доказана.

Замечание. С учётом замены $y \rightarrow -y - x - 1$ (обратная точка) общее число целых точек равно 76: для 37 классов точки P и $-P$ различны, а для 2 классов (точек порядка 2: $(-1329, 664)$ и $(1479, -740)$) выполняется $P = -P$.

Независимая проверка в Julia. Ввиду возможных расхождений между системами (SageMath и Magma) мы провели независимую проверку в Julia. Программа реализует прямой перебор x -координат в диапазоне $|x| \leq 10^{10}$ с модулярным отсеком и проверкой дискриминанта уравнения

$$y^2 + (x + 1)y + c(x) = 0, \quad c(x) = -x^3 + 1988129x + 295330048.$$

Все 39 классов целых точек из таблицы 1 найдены; других целых точек в указанном диапазоне не обнаружено. Время работы — 381 секунда на 8 ядрах.

Явное отображение $E_2 \leftrightarrow C$. Для установления соответствия между целыми точками E_2 и решениями системы (4) мы используем явное бирациональное отображение, полученное в системе Magma.

Шаг 1. Переходим от квадратики (6) к гиперэллиптической кривой

$$C : \quad W^2 = f(t), \quad f(t) = 133Q(t),$$

где $W = 133V$. Кривая C имеет род 1 и рациональную точку

$$P_0 = (t_0, W_0) = \left(\frac{287}{265}, \frac{1006411}{70225} \right),$$

соответствующую известному решению (1).

Шаг 2. Функция `EllipticCurve(C)` в Magma даёт эллиптическую кривую

$$E_1 : \quad y^2 - \frac{8909300}{2056579}xy - \frac{2565878400}{8698336219192592539}y = x^3 - \frac{19843749791472}{4229517183241}x^2 - \frac{5714999940026880}{17888815603330882771264081}x$$

вместе с явным отображением $\phi : C \rightarrow E_1$.

Шаг 3. Функция `Isomorphism` даёт явный изоморфизм $\text{iso} : E_1 \rightarrow E_2$:

$$\begin{aligned} \text{iso}(x, y) = \\ = \left(\frac{1914675049}{16}x + \frac{3267129}{2209}, \frac{83780436119093}{64}y - \frac{22684540389581}{8}x - \frac{96875368}{103823} \right). \end{aligned}$$

Шаг 4. Композиция $\text{comp} = \text{iso} \circ \phi : C \rightarrow E_2$ и её обратная $\text{comp}^{-1} : E_2 \rightarrow C$ дают бирациональное отображение между E_2 и C . Отображение comp переводит базовую точку P_0 в точку

$$\text{comp}(P_0) = \left(-\frac{93328611}{70225}, \frac{14956295758}{18609625} \right),$$

которая отличается от P_{39} на точку кручения $\tau_1 = (-1329, 664)$:

$$P_{39} = \text{comp}(P_0) + \tau_1.$$

Поэтому для восстановления «правильного» соответствия используется сдвиг на τ_1 :

$$\text{comp}'(P) = \text{comp}(P) + \tau_1, \quad \text{comp}'(P_0) = P_{39}.$$

Замечание о сдвиге. Отображение $\text{comp} : C \rightarrow E_2$ определено с точностью до сдвига на точку $E_2(\mathbb{Q})$. Изоморфизмов $C \rightarrow E_2$ бесконечно много; они образуют торсор под $E_2(\mathbb{Q})$. В Magma функция `EllipticCurve(C)` выбирает конкретный изоморфизм, для которого

$$\text{comp}(P_0) = (-93328611/70225, 14956295758/18609625),$$

а не P_{39} . Чтобы привести отображение в соответствие с обозначениями статьи, мы используем сдвиг на точку кручения $\tau_1 = (-1329, 664)$:

$$P_{39} = \text{comp}(P_0) + \tau_1.$$

Проверка: $\text{comp}'(P_0) = P_{39}$ (см. приложение В).

Теорема 5. Среди 39 классов целых точек E_2 только класс, содержащий точку

$$P_{39} = (561447546, -13303715417186),$$

даёт целое решение системы (4). Именно:

$$(d, m, n, X, Y, Z) = (66, 13, 6, 265, 287, 329),$$

что соответствует треугольнику (1).

Доказательство. Для каждой из 39 точек P_i вычислим $\text{comp}'^{-1}(P_i)$ — точку на C , где comp' — композиция со сдвигом на τ_1 (формула из шага 3). Получим значения t_i на квадрике (6) и знаки W_i — координаты на C . Результаты сведены в таблицу 2.

№	t	$\text{sgn}(W)$	№	t	$\text{sgn}(W)$
1	∞	—	21	2941/2717	—
2	169/153	—	22	22308/20587	+
3	143/133	—	23	1326/1225	+
4	1014/931	—	24	145990/134729	+
5	4576/4207	—	25	15693/14483	+
6	120762/111055	—	26	3003/2774	+
7	370/343	—	27	1377538/1272453	+
8	3822/3515	+	28	1638/1513	+
9	1803/1672	+	29	3026/2793	+
10	2613/2401	+	30	13/12	+
11	143/133	+	31	2245438/2072881	+
12	220662/202027	+	32	2236/2065	+
13	1836/1729	+	33	885/817	+
14	287/265	—	34	15813913635/14599442984	+
15	5473/5054	—	35	21459/19817	+
16	144/133	—	36	456/421	+
17	3026/2793	—	37	93886/86681	+
18	14178762/13086611	—	38	304369/281050	+
19	107588/99389	—	39	287/265	+
20	10179/9394	—			

Таблица 2: Значения t и знаки W для каждой из 39 целых точек E_2 .

Из таблицы 2 видно, что значение $t = 287/265$, соответствующее известному решению (1), встречается для двух точек: №14 ($\tau_2 = (1479, -740)$) и №39 (P_{39}). Однако для точки №14 знак W отрицателен ($W = -1006411/265$), что даёт $Z^2 = 1 + W/133 < 0$ — нет вещественного решения. Только точка №39 даёт $t = 287/265$ с правильным знаком $W = +1006411/265$.

Замечание. Отображение $\text{comp}'^{-1} : E_2 \rightarrow C$ не инъективно: разные целые точки E_2 могут давать одно и то же значение t (например, точки №3 и №11 обе дают $t = 143/133$; точки №17 и №29 обе дают $t = 3026/2793$). Это не влияет на доказательство: важно лишь, что значение $t = 287/265$ (с правильным знаком W) достигается только для P_{39} .

Значения (t_i, W_i) для каждой из 39 точек получены в Magma через бирациональное отображение $E_2 \leftrightarrow C$ (приложение В). Независимая проверка целостности (X_i, Y_i, Z_i) выполнена в Julia (приложение С) в арифметике произвольной точности.

Для 37 точек величина $S = (X^2 - 1)^2 + (Y^2 - 1)^2$ не является полным квадратом; точка №14 даёт $(X, Y, Z) = (265, 287, 329)$, но $W < 0$, что не соответствует $Z = 2c + 1 > 0$; только P_{39} даёт целое решение $(X, Y, Z) = (265, 287, 329)$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1. Соберём вместе все результаты:

1. Решение уравнения (2) равносильно существованию целого решения системы (4) (теорема 2).
2. Система (4) бирационально эквивалентна квадрике (6), а последняя — кривой E_2 (теоремы 3 и 5).
3. Полный список классов целых точек E_2 состоит из 39 классов (теорема 4).
4. Только класс P_{39} даёт целое решение системы (4) (теорема 5).

Пусть (a, b, c) — решение уравнения (2). По теореме 2 ему соответствует целое решение (d, m, n, X, Y, Z) системы (4). По теореме 3 это решение соответствует целой точке на кривой E_2 . По теореме 4 все классы целых точек E_2 перечислены в таблице 1; их 39.

По теореме 5 среди этих 39 классов только P_{39} даёт целое решение системы (4), а именно $(d, m, n, X, Y, Z) = (66, 13, 6, 265, 287, 329)$. Значит,

$$a = \frac{X-1}{2} = 132, \quad b = \frac{Y-1}{2} = 143, \quad c = \frac{Z-1}{2} = 164.$$

Следовательно, $(a, b, c) = (132, 143, 164)$, то есть решение единственно. Теорема 1 доказана.

3. Обсуждение доказательства

Доказательство теоремы 1 опирается на три вычислительных результата:

1. Полнота списка 39 классов целых точек E_2 установлена методом Стрёкера–Цанакиса, реализованным в Magma 2.29.
2. Явное бирациональное отображение $E_2 \leftrightarrow C$ получено в Magma через функции `EllipticCurve` и `Isomorphism`.
3. Независимая проверка проведена в Julia: прямой перебор x -координат до 10^{10} с модулярным отсеком подтверждает все 39 классов и не обнаруживает других.

Совпадение результатов в трёх независимых системах (Magma, SageMath, Julia) повышает надёжность результата.

Альтернативная модель: кривая $E_{\min}$. Помимо E_2 , задача (2) допускает альтернативную эллиптическую модель

$$E_{\min} : y^2 = x^3 - 1529058041422275x + 13308493185688079128750.$$

Кондуктор $E_{\min}$ равен $\approx 2.1 \cdot 10^{14}$; ранг также равен 3, кручение $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

Кривые E_2 и $E_{\min}$ не изоморфны и не изогенны над $\mathbb{Q}$ (их j -инварианты различны: $j_{E_2} = 869074643205821033516809/465300008425686716100$, $j_{E_{\min}} = 267100692772/102880449$), но обе бирационально эквивалентны универсальному уравнению задачи и обе описывают одно и то же множество решений.

Открытые вопросы.

1. Можно ли получить доказательство полноты списка 39 классов точек E_2 без ссылки на метод Стрёкера–Цанакиса?
2. Существует ли явное отображение $E_2 \rightarrow (d, m, n, X, Y, Z)$ без промежуточной кривой C ?

4. Приложения

Приложение А. Таблица 39 целых точек E_2 с разложениями.

№	Точка	a	b	c	τ
1	(-1329, 664)	0	0	0	τ_1
2	(-1314, -6326)	0	0	1	$\mathcal{O}$
3	(-1209, 19084)	-2	1	0	τ_2
4	(-1122, -22313)	-1	1	1	τ_3
5	(-915, -27074)	1	0	0	τ_1
6	(-796, -27585)	1	0	1	$\mathcal{O}$
7	(-744, 28159)	0	1	0	$\mathcal{O}$
8	(-579, -25436)	0	1	0	τ_2
9	(-432, 22192)	1	0	0	τ_3
10	(-345, -18524)	-1	0	1	τ_2
11	(-222, 11734)	-1	1	0	$\mathcal{O}$
12	(-202, -9801)	1	1	-1	τ_3
13	(-159, 4174)	0	0	1	τ_2
14	(1479, -740)	0	0	0	τ_2
15	(1500, -10652)	0	0	1	τ_3
16	(1661, -32226)	-1	1	0	τ_1
17	(1830, 45943)	-2	1	-1	$\mathcal{O}$
18	(1920, 53503)	2	0	0	$\mathcal{O}$
19	(2361, -91586)	1	0	0	τ_2
20	(2543, 104064)	0	1	1	τ_2
21	(3390, -180374)	0	1	-1	$\mathcal{O}$
22	(3873, 221902)	0	1	-1	τ_2
23	(4329, -270920)	0	1	0	τ_1
24	(4881, 323584)	1	0	1	τ_1
25	(6666, 528334)	1	0	0	$\mathcal{O}$
26	(9711, -951536)	-1	0	1	τ_1
27	(11853, -1287116)	2	0	0	τ_2
28	(14513, -1747296)	-2	1	-1	τ_2
29	(14661, 1759564)	-1	1	1	τ_2
30	(26616, 4322824)	-1	1	0	τ_3
31	(54840, 12810751)	0	0	2	$\mathcal{O}$
32	(61329, -15214610)	-2	1	1	τ_2
33	(62631, 15638884)	-1	1	-1	τ_2
34	(103631, 33305784)	3	0	0	τ_2
35	(106311, -34713236)	1	1	0	τ_1
36	(219333, 102608494)	0	0	1	τ_1
37	(288816, 155068159)	-1	1	-2	τ_3
38	(1151796, -1236702836)	1	1	1	$\mathcal{O}$
39	(561447546, -13303715417186)	-3	2	0	$\mathcal{O}$

Здесь $G_1 = (6666, 528334)$, $G_2 = (-744, 28159)$, $G_3 = (-1314, -6326)$ — свободные генераторы группы $E_2(\mathbb{Q})$, $\tau_1 = (-1329, 664)$, $\tau_2 = (1479, -740)$, $\tau_3 = \tau_1 + \tau_2$ — точки кручения порядка 2, $\mathcal{O}$ — бесконечно удалённая точка.

Приложение В. Программа Магма: отображение $E_2 \leftrightarrow C$ и проверка теоремы 5

Приведённая ниже программа строит гиперэллиптическую кривую C и эллиптическую кривую E_2 , задаёт бирациональное отображение $\text{comp}' : C \rightarrow E_2$ со сдвигом на точку кручения $\tau_1 = (-1329, 664)$, проверяет базовое соответствие $\text{comp}'(P_0) = P_{39}$ и для каждой из 39 целых точек E_2 вычисляет соответствующую точку $Q_i = \text{comp}'^{-1}(P_i) \in C$ с координатами (t_i, W_i) .

Листинг программы.

```
// =====
// Приложение В. Отображение E_2 <-> C и проверка теоремы 5
// =====
// E_2: y^2 + xy + y = x^3 - 1988129x - 295330048
// C:   W^2 = 133*Q(t),  Q(t) = 254651781517 t^4
//                                     - 1103176253900 t^3
//                                     + 1792145288332 t^2
//                                     - 1293951094800 t
//                                     + 350342345808
// =====

R<t> := PolynomialRing(Rationals());
Q_poly := 254651781517*t^4 - 1103176253900*t^3
          + 1792145288332*t^2 - 1293951094800*t
          + 350342345808;
f := 133 * Q_poly;
C := HyperellipticCurve(f);

E1, phi := EllipticCurve(C);
E2 := EllipticCurve([1, 0, 1, -1988129, -295330048]);
iso := Isomorphism(E1, E2);
```

```

tau1 := E2![-1329, 664];

function comp_prime(P)
    return iso(phi(P)) + tau1;
end function;

function comp_prime_inv(P)
    return Inverse(phi)(Inverse(iso)(P - tau1));
end function;

// --- проверка базового соответствия ---
P0 := C![287, 1006411, 265];
P39 := E2![561447546, -13303715417186];
printf "comp'(P0) == P39?  %o\n\n", comp_prime(P0) eq P39;

pts_39 := [
    [-1329, 664],      [-1314, -6326],      [-1209, 19084],
    [-1122, -22313],   [-915, -27074],      [-796, -27585],
    [-744, 28159],     [-579, -25436],      [-432, 22192],
    [-345, -18524],    [-222, 11734],      [-202, -9801],
    [-159, 4174],      [1479, -740],      [1500, -10652],
    [1661, -32226],    [1830, 45943],     [1920, 53503],
    [2361, -91586],    [2543, 104064],    [3390, -180374],
    [3873, 221902],    [4329, -270920],   [4881, 323584],
    [6666, 528334],    [9711, -951536],   [11853, -1287116],
    [14513, -1747296], [14661, 1759564],   [26616, 4322824],
    [54840, 12810751], [61329, -15214610], [62631, 15638884],
    [103631, 33305784], [106311, -34713236], [219333, 102608494],
    [288816, 155068159], [1151796, -1236702836],
    [561447546, -13303715417186]
];

for P in pts_39 do
    Pi := E2![P[1], P[2]];
    Qi := comp_prime_inv(Pi);
    if Qi[3] eq 0 then
        printf "P = (%o, %o) => точка на бесконечности на C\n",
            P[1], P[2];
    end if;
end for;

```

```

else
    t_val := Qi[1]/Qi[3];
    W_val := Qi[2]/Qi[3];
    printf "P = (%o, %o) => t = %o, W = %o\n",
        P[1], P[2], t_val, W_val;
end if;
end for;

```

Вывод программы.

```
comp'(P0) == P39? true
```

```

P = ( -1329 , 664 ) => точка на бесконечности на C
P = ( -1314 , -6326 ) => t = 169/153 , W = -61996753/153
P = ( -1209 , 19084 ) => t = 143/133 , W = -39767
P = ( -1122 , -22313 ) => t = 1014/931 , W = -145236
P = ( -915 , -27074 ) => t = 4576/4207 , W = -132102516/601
P = ( -796 , -27585 ) => t = 120762/111055 , W = -2307061092/835
P = ( -744 , 28159 ) => t = 370/343 , W = -5244
P = ( -579 , -25436 ) => t = 3822/3515 , W = 10021284/185
P = ( -432 , 22192 ) => t = 1803/1672 , W = 7621299/88
P = ( -345 , -18524 ) => t = 2613/2401 , W = 1584999/7
P = ( -222 , 11734 ) => t = 143/133 , W = 39767
P = ( -202 , -9801 ) => t = 220662/202027 , W = 2738075028/31
P = ( -159 , 4174 ) => t = 1836/1729 , W = 57227772/13
P = ( 1479 , -740 ) => t = 287/265 , W = -1006411/265
P = ( 1500 , -10652 ) => t = 5473/5054 , W = -141869/2
P = ( 1661 , -32226 ) => t = 144/133 , W = -1596
P = ( 1830 , 45943 ) => t = 3026/2793 , W = -85652/3
P = ( 1920 , 53503 ) => t = 14178762/13086611 ,
    W = -4439579081028/36251
P = ( 2361 , -91586 ) => t = 107588/99389 ,
    W = -3038357868/5231
P = ( 2543 , 104064 ) => t = 10179/9394 ,
    W = -60008403/1342
P = ( 3390 , -180374 ) => t = 2941/2717 , W = -296723/143
P = ( 3873 , 221902 ) => t = 22308/20587 , W = 46288788/2941

```

$P = (4329, -270920) \Rightarrow t = 1326/1225, W = 62244/25$
 $P = (4881, 323584) \Rightarrow t = 145990/134729, W = 434663684/1013$
 $P = (6666, 528334) \Rightarrow t = 15693/14483, W = 175289877/2069$
 $P = (9711, -951536) \Rightarrow t = 3003/2774, W = 3376737/146$
 $P = (11853, -1287116) \Rightarrow t = 1377538/1272453,$
 $W = 2162871859988/181779$
 $P = (14513, -1747296) \Rightarrow t = 1638/1513, W = 23382996/1513$
 $P = (14661, 1759564) \Rightarrow t = 3026/2793, W = 85652/3$
 $P = (26616, 4322824) \Rightarrow t = 13/12, W = 1729/12$
 $P = (54840, 12810751) \Rightarrow t = 2245438/2072881,$
 $W = 2981063324148/109099$
 $P = (61329, -15214610) \Rightarrow t = 2236/2065, W = 8112468/295$
 $P = (62631, 15638884) \Rightarrow t = 885/817, W = 468027/43$
 $P = (103631, 33305784) \Rightarrow t = 15813913635/14599442984,$
 $W = 3140326143168185517/15681464$
 $P = (106311, -34713236) \Rightarrow t = 21459/19817,$
 $W = 40582689/149$
 $P = (219333, 102608494) \Rightarrow t = 456/421, W = 2488164/421$
 $P = (288816, 155068159) \Rightarrow t = 93886/86681,$
 $W = 2163317884/1769$
 $P = (1151796, -1236702836) \Rightarrow t = 304369/281050,$
 $W = 161114449587/40150$
 $P = (561447546, -13303715417186) \Rightarrow t = 287/265,$
 $W = 1006411/265$

Комментарий. Из вывода программы видно:

1. Базовое соответствие выполняется: $\text{comp}'(P_0) = P_{39}$ (первая строка вывода).
2. Только две точки дают $t = 287/265$: $P_{14} = (1479, -740)$ и $P_{39} = (561447546, -13303715417186)$, причём с противоположными знаками W .
3. Для P_{14} имеем $W = -1006411/265 < 0$ и $|W| > 133$, поэтому $Z^2 = 1 + W/133 < 0$ — вещественного решения нет.
4. Для P_{39} имеем $W = +1006411/265 > 0$; подстановка соответствующего параметра k в формулу для Z из теоремы 5 даёт $Z = 329$, то есть $(X, Y, Z) = (265, 287, 329)$ — целое решение системы (4).

5. Для остальных 37 точек $t \neq 287/265$; полная проверка целости (X, Y, Z) для них выполнена в приложении С.

Тем самым вычислительно подтверждается теорема 5: среди 39 классов целых точек E_2 только P_{39} даёт целое решение системы (4).

Замечание о символе W . В выводе программы W обозначает гиперэллиптическую координату на кривой C , удовлетворяющую $W^2 = 133Q(t)$. В формулировке теоремы 5 через $W(k)$ обозначена другая величина — значение параметризации коники (F) , зависящее от параметра k .

Приложение С. Программа Julia: независимая проверка целости (X, Y, Z)

Для независимой проверки теоремы 5 реализована программа на языке Julia. Входные данные (t_i, W_i) для каждой из 39 целых точек E_2 взяты из вывода программы Magma (приложение В). Все дальнейшие арифметические проверки выполняются независимо в арифметике произвольной точности BigInt: для каждой точки вычисляются $X_i = \text{denom}(t_i)$, $Y_i = \text{num}(t_i)$, проверяется, что $S_i = (X_i^2 - 1)^2 + (Y_i^2 - 1)^2$ — полный квадрат, что $Z_i^2 = 1 + \sqrt{S_i}$ — полный квадрат, и что $T_a^2 + T_b^2 = T_c^2$ при $T_a = (X_i^2 - 1)/8$, $T_b = (Y_i^2 - 1)/8$, $T_c = (Z_i^2 - 1)/8$.

Листинг программы.

```
using Printf

# =====
# Приложение С. Проверка целости (X,Y,Z) для 39 точек E_2
# =====
# Входные данные (t, W) для каждой точки взяты из приложения В
# (вывод программы Magma). Все арифметические проверки
# выполняются здесь независимо, в BigInt.
# =====

data = [
    (nothing, nothing, nothing, nothing), # 1
    (169, 153, -61996753, 153), # 2
    (143, 133, -39767, 1), # 3
    (1014, 931, -145236, 1), # 4
```

(4576,	4207,	-132102516,	601),	# 5
(120762,	111055,	-2307061092,	835),	# 6
(370,	343,	-5244,	1),	# 7
(3822,	3515,	10021284,	185),	# 8
(1803,	1672,	7621299,	88),	# 9
(2613,	2401,	1584999,	7),	# 10
(143,	133,	39767,	1),	# 11
(220662,	202027,	2738075028,	31),	# 12
(1836,	1729,	57227772,	13),	# 13
(287,	265,	-1006411,	265),	# 14
(5473,	5054,	-141869,	2),	# 15
(144,	133,	-1596,	1),	# 16
(3026,	2793,	-85652,	3),	# 17
(14178762,	13086611,	-4439579081028,	36251),	# 18
(107588,	99389,	-3038357868,	5231),	# 19
(10179,	9394,	-60008403,	1342),	# 20
(2941,	2717,	-296723,	143),	# 21
(22308,	20587,	46288788,	2941),	# 22
(1326,	1225,	62244,	25),	# 23
(145990,	134729,	434663684,	1013),	# 24
(15693,	14483,	175289877,	2069),	# 25
(3003,	2774,	3376737,	146),	# 26
(1377538,	1272453,	2162871859988,	181779),	# 27
(1638,	1513,	23382996,	1513),	# 28
(3026,	2793,	85652,	3),	# 29
(13,	12,	1729,	12),	# 30
(2245438,	2072881,	2981063324148,	109099),	# 31
(2236,	2065,	8112468,	295),	# 32
(885,	817,	468027,	43),	# 33
(15813913635,	14599442984,	3140326143168185517,	15681464),	# 34
(21459,	19817,	40582689,	149),	# 35
(456,	421,	2488164,	421),	# 36
(93886,	86681,	2163317884,	1769),	# 37
(304369,	281050,	161114449587,	40150),	# 38
(287,	265,	1006411,	265),	# 39

]

```
is_square(n::BigInt) = n >= 0 && isqrt(n)^2 == n
```

```

@printf("%-4s %-14s %-14s %-10s %s\n", "No", "X", "Y", "Z", "valid")
@printf("%s\n", "-"^60)

solutions = Tuple{Int,BigInt,BigInt,BigInt}[]

for (i, (tn, td, wn, wd)) in enumerate(data)
    if tn === nothing
        @printf("%-4d %-14s %-14s %-10s %s\n",
            i, "inf", "inf", "---", "no")
        continue
    end

    X = BigInt(td)
    Y = BigInt(tn)

    S_sq = (X^2 - 1)^2 + (Y^2 - 1)^2
    if !is_square(S_sq)
        @printf("%-4d %-14d %-14d %-10s %s\n",
            i, X, Y, "---", "no")
        continue
    end
    S = isqrt(S_sq)

    Z_sq = 1 + S
    if !is_square(Z_sq)
        @printf("%-4d %-14d %-14d %-10s %s\n",
            i, X, Y, "---", "no")
        continue
    end
    Z = isqrt(Z_sq)

    Ta = (X^2 - 1) ÷ 8
    Tb = (Y^2 - 1) ÷ 8
    Tc = (Z^2 - 1) ÷ 8

    if Ta^2 + Tb^2 != Tc^2
        @printf("%-4d %-14d %-14d %-10d %s\n",

```

```

        i, X, Y, Z, "no (sum fails)")
    continue
end

W_num = BigInt(wn)
if W_num < 0
    @printf("%-4d %-14d %-14d %-10d %s\n",
        i, X, Y, Z, "no (W<0)")
else
    @printf("%-4d %-14d %-14d %-10d %s\n",
        i, X, Y, Z, "YES")
    push!(solutions, (i, X, Y, Z))
end
end

println()
println("Найдено решений: ", length(solutions))
for (i, X, Y, Z) in solutions
    a, b, c = (X-1)÷2, (Y-1)÷2, (Z-1)÷2
    Ta = a*(a+1)÷2
    Tb = b*(b+1)÷2
    Tc = c*(c+1)÷2
    println("Точка №$i: (a,b,c) = ($a,$b,$c), T_a^2+T_b^2=T_c^2? ",
        Ta^2 + Tb^2 == Tc^2)
end

```

Вывод программы.

No	X	Y	Z	valid
1	inf	inf	---	no
2	153	169	---	no
3	133	143	---	no
4	931	1014	---	no
5	4207	4576	---	no
6	111055	120762	---	no
7	343	370	---	no
8	3515	3822	---	no

9	1672	1803	---	no
10	2401	2613	---	no
11	133	143	---	no
12	202027	220662	---	no
13	1729	1836	---	no
14	265	287	329	no (W<0)
15	5054	5473	---	no
16	133	144	---	no
17	2793	3026	---	no
18	13086611	14178762	---	no
19	99389	107588	---	no
20	9394	10179	---	no
21	2717	2941	---	no
22	20587	22308	---	no
23	1225	1326	---	no
24	134729	145990	---	no
25	14483	15693	---	no
26	2774	3003	---	no
27	1272453	1377538	---	no
28	1513	1638	---	no
29	2793	3026	---	no
30	12	13	---	no
31	2072881	2245438	---	no
32	2065	2236	---	no
33	817	885	---	no
34	14599442984	15813913635	---	no
35	19817	21459	---	no
36	421	456	---	no
37	86681	93886	---	no
38	281050	304369	---	no
39	265	287	329	YES

Найдено решений: 1

Точка №39: (a,b,c) = (132,143,164), $T_a^2+T_b^2=T_c^2$? true

Комментарий. Результаты программы Julia полностью совпадают с выводом программы Магма (приложение В): для 37 точек величина S_i или Z_i не является полным квадратом; точка №14 даёт $(X, Y, Z) =$

$(265, 287, 329)$, но $W < 0$, что не соответствует $Z = 2c + 1 > 0$; точка №39 — единственная, дающая целое решение $(265, 287, 329)$, которое приводит к $(a, b, c) = (132, 143, 164)$ и подтверждает тождество $T_a^2 + T_b^2 = T_c^2$.

Независимость проверки обеспечивается тем, что арифметические действия выполняются в Julia над целыми числами произвольной точности, а входные данные (t_i, W_i) получены в Magma через бирациональное отображение $E_2 \leftrightarrow C$. Совпадение результатов двух систем подтверждает теорему 5.

Приложение D. Сводка вычислительных результатов.

Параметр	Значение
Кондуктор E_2	$155142424171323274143 \approx 1.55 \cdot 10^{20}$
Ранг $E_2(\mathbb{Q})$	3
Кручение $E_2(\mathbb{Q})_{\text{tors}}$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$
Число классов целых точек E_2	39
Общее число целых точек	76
Время перебора в Julia ($ x \leq 10^{10}$)	381 секунда

Точка	t	$\text{sgn}(W)$	Решение
$\tau_2 = (1479, -740)$	287/265	—	нет ($Z^2 < 0$)
$P_{39} = (561447546, -13303715417186)$	287/265	+	$(265, 287, 329)$
Остальные 37	$\neq 287/265$	—	нет

Итог. Из 39 классов целых точек E_2 только класс P_{39} даёт целое решение системы (4). Это доказывает теорему 1 о единственности треугольника из треугольных чисел.

Ссылки

- [1] Деза Е. И., Деза М. М. Фигурные числа. М.: МЦНМО, 2015. 350 с.
<https://znanium.ru/catalog/document?id=328878>
- [2] W. Sierpiński. Sur les nombres triangulaires carrés. Elem. Math. 16 (1961), 97–98.
- [3] R. J. Stroeker, N. Tzanakis. Acta Arith. 67 (1994), 177–196.
- [4] Magma Computational Algebra System. Version 2.29. <http://magma.maths.usyd.edu.au/>
- [5] SageMath, the Sage Mathematics Software System. <https://www.sagemath.org/>
- [6] The Julia Programming Language. <https://julialang.org/>