УДК 511.5 MSC 11D09

Фундаментальное диофантово уравнение совершенного кубоида и арифметические ограничения его параметров

В. Г. Соловьёв

Аннотация

В работе исследуется классическая открытая проблема теории чисел о существовании совершенного (рационального) кубоида — прямоугольного параллелепипеда, все рёбра, граневые диагонали и пространственная диагональ которого выражаются натуральными числами. Основным конструктивным результатом статьи является полный и эквивалентный вывод единого фундаментального диофантова уравнения совершенного кубоида, позволяющего редуцировать исходную многомерную систему четырёх квадратичных уравнений с семью неизвестными к явному иррациональному соотношению относительно квадрата нечётного ребра h^2 и трёх нечётных делителей $1 \leq f_1 < f_2 < f_3 < h$ величины h^2. На основе полученного уравнения доказан ряд строгих геометрических и теоретико-числовых ограничений на параметры гипотетического решения: установлено, что $f_1 > 1$, $f_2/f_1 < \sqrt{2}$, а делители не могут образовывать геометрическую прогрессию ($f_2^2 \neq f_1 f_3$). С помощью 2-адического анализа подкоренного выражения после выделения наибольшего общего делителя $d = \gcd(f_1, f_2, f_3)$ показано, что показатели степени двойки в первых двух сомножителях дискриминанта обязаны иметь различную чётность. Для случая полного расщепления дискриминанта на чистые квадраты в нечётной части доказано бирациональное сведение задачи к эллиптической кривой конгруэнтного числа $Y^2 = X^3 - X$ и отсутствие нетривиальных натуральных решений, а также сформулированы две открытые задачи для оставшихся 2-адических ветвей.

Ключевые слова: совершенный кубоид, эйлеров параллелепипед, диофантовы уравнения, 2-адический анализ, эллиптическая кривая, биквадратное уравнение.

A Fundamental Diophantine Equation for the Perfect Cuboid and Arithmetic Constraints on Its Parameters

V. G. Solovyov

Аннотация

This paper investigates the classical open problem in number theory concerning the existence of a perfect (rational) cuboid—a rectangular parallelepiped whose edges, face diagonals, and space diagonal are all integers. The main constructive result of the study is a complete and equivalent derivation of a single fundamental Diophantine equation for the perfect cuboid, which reduces the original multidimensional system of four quadratic equations in seven unknowns to an explicit irrational relation involving the square of the odd edge h^2 and three of its odd divisors $1 \leq f_1 < f_2 < f_3 < h$. Based on the derived equation, several strict geometric and number-theoretic constraints on the parameters of a hypothetical solution are proven: it is established that $f_1 > 1$, $f_2/f_1 < \sqrt{2}$, and the divisors cannot form a geometric progression ($f_2^2 \neq f_1 f_3$). By applying 2-adic valuation analysis to the radicand after factoring out the greatest common divisor $d = \gcd(f_1, f_2, f_3)$, it is shown that the exponents of 2 in the first two factors of the discriminant must have opposite parities. For the case of complete splitting of the discriminant into pure squares in the odd part, a birational reduction to the congruent number elliptic curve $Y^2 = X^3 - X$ and the non-existence of non-trivial integer solutions are proven, and two open problems corresponding to the remaining 2-adic branches are formulated.

Keywords: perfect cuboid, Euler brick, Diophantine equations, 2-adic analysis, elliptic curve, biquadratic equation.

1 Введение

В лекциях известного математика и замечательного популяризатора д-ра физ.-мат. наук Алексея Савватеева [4] говорится о легенде существования Пифагоровой Комнаты, в которой математики якобы могут обнаружить все теоремы и их доказательства.

С математической точки зрения Пифагорова Комната есть ничто иное, как прямоугольный параллелепипед со всеми семью уникальными линейными размерами (тремя рёбрами, тремя диагоналями граней и одной пространственной диагональю), выраженными натуральными числами. Подобный прямоугольный параллелепипед математики называют Совершенным Кубоидом, поиск которого Иэн Стюарт отнёс к одной из величайших математических задач [6].

Доказательством того, что существование Совершенного Кубоида до сих пор теоретически не обосновано, является запуск вычислительного проекта компьютерным перебором во всемирной сети [11], который, впрочем, не принёс результатов даже в области линейных размеров порядка 10^{12}, а планируют досчитать до 10^{63}. Хотя этот факт не доказывает и обратного утверждения о том, что Совершенный Кубоид не существует. Компьютерные эксперименты, безусловно, могут продолжаться как угодно долго, но для того, чтобы решить вопрос о существовании Совершенного Кубоида, необходимо и достаточно исключительно математическим путём.

Математики решают задачу более двухсот лет, начиная с современников великого Леонардо Эйлера. За это время были найдены прямоугольные параллелепипеды с шестью (но не семью!) целочисленными размерами. В частности, прямоугольный параллелепипед с целочисленными тремя рёбрами и тремя диагоналями граней получил название Эйлерова параллелепипеда или кубоида Эйлера, при том, что первым минимально возможный кубоид (с рёбрами 44, 117, 240 и диагоналями 125, 244, 267) нашёл в 1719 году немецкий математик Пауль Хальке [10].

По сути, при поиске решения математики исходят из условия, что Совершенный Кубоид есть Эйлеров параллелепипед с целочисленной пространственной диагональю.

В настоящее время учёные активно работают над проблемой поиска доказательства существования или несуществования Совершенного Кубоида.

Например, в одной работе [2] говорится о способе получения значений сторон Эйлерова кубоида посредством подбора значений котангенсов пифагоровых троек, исходя из условия равенства произведения двух меньших значений котангенсов двух пифагоровых треугольников и значения

котангенса третьего пифагорова треугольника, составляющих Эйлеров кубоид. Впрочем, это решение относится к вычислительным методам и не позволяет ответить на вопрос о существовании Совершенного Кубоида.

Также обращают на себя внимание работы канд. физ.-мат. наук Руслана Шарипова, в одной из которых задача построения Совершенного Кубоида была сведена к единственному диофантову уравнению 12-го порядка от трёх целочисленных переменных [7], а в другой [9], учитывая полученное ранее уравнение, определена связь задачи о построении совершенного кубоида с некоторым классом полиномов от одной переменной, зависящих от трёх целочисленных параметров. По мнению автора, неприводимость этих полиномов над кольцом целых чисел при определённых ограничениях на параметры достаточна для доказательства несуществования совершенных кубоидов. Однако неприводимость сформулирована в виде гипотез, которые проверяются вычислительными методами и могут быть подтверждены только для конечного числа комбинаций.

Наконец, известна работа [3], в которой решается вопрос о несуществовании Совершенного Кубоида путём приведения системы диофантовых уравнений кубоида к единственному уравнению невысокого порядка и его анализа. Какое-то время приведённое доказательство считалось верным. Однако Руслан Шарипов обнаружил ряд ошибок в доказательствах теорем [8]. Таким образом, задача поиска Совершенного Кубоида так и осталась нерешённой.

Важно отметить, что классические подходы, начиная с Эйлера и заканчивая современными работами Шарипова, идут по пути усложнения систем, в результате оперируя многомерными полиномами от нескольких переменных. В отличие от них в данной работе впервые доказано, что вся многомерная геометрия и арифметика Совершенного Кубоида может быть полностью и без потерь спроецирована на внутреннюю структуру одного-единственного параметра — его нечётного ребра.

Сведение системы из четырёх связанных нелинейных диофантовых уравнений второго порядка с семью неизвестными к единому биквадратному уравнению от делителей одного базового параметра позволяет полностью изолировать задачу и исследовать её локальные свойства непосредственно в кольце целых чисел.

Методология и научная новизна. В данной работе предлагается альтернативный локально-арифметический подход. Вместо традиционного анализа плоских пифагоровых троек с последующим выходом в трёхмерное пространство, в статье применён обратный метод, а именно: ортогональное проецирование боковых граней трёхмерного кубоида на

плоскость диагональной грани. Научная новизна исследования заключается в том, что исходная система из четырёх диофантовых уравнений сведена к единому биквадратному уравнению зависимости квадрата единственного нечётного ребра кубоида от трёх его нечётных целочисленных делителей, меньших указанного ребра. Предложенный подход позволяет абстрагироваться от гипотетических утверждений высшей алгебры и провести строгий локальный анализ 2-адической структуры уравнения (анализ степеней двойки в каноническом разложении) по произвольному модулю.

Целью работы является эквивалентный вывод фундаментального диофантова уравнения совершенного кубоида относительно квадрата нечётного ребра и трёх его делителей, а также строгое аналитическое исследование геометрических и 2-адических ограничений на параметры его гипотетических решений.

2 Теоретическое обоснование. Фундаментальное уравнение Совершенного Кубоида

Совершенный Кубоид представляет собою прямоугольный параллелепипед (рис. 1) с нижней гранью $A_1B_1C_1D_1$, верхней гранью $A_2B_2C_2D_2$, рёбрами L, W и H, которые определяют его габариты — длину, ширину (глубину) и высоту соответственно, а также тремя диагоналями D_{LW}, D_{WH} и D_{LH} граней и, наконец, главной диагональю D_{Cub}.

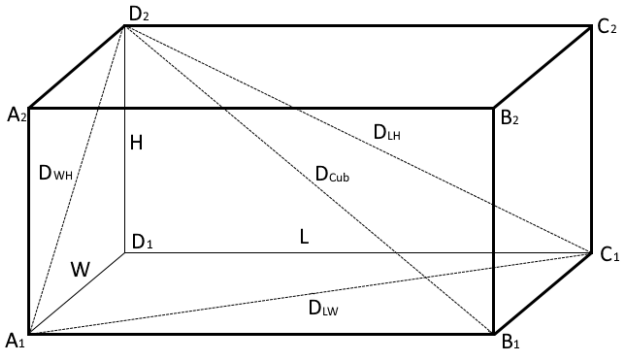


Рис. 1

Рис. 1: Совершенный кубоид

Для нахождения параметров Совершенного кубоида необходимо решить систему из четырёх диофантовых уравнений в натуральных чис-

ловых значениях следующего вида:

$$\begin{cases} L^2 + W^2 = D_{LW}^2, \\ L^2 + H^2 = D_{LH}^2, \\ W^2 + H^2 = D_{WH}^2, \\ L^2 + W^2 + H^2 = D_{Cub}^2. \end{cases} \tag{1}$$

До сих пор не было известно, существует ли такой параллелепипед, удовлетворяющий всем четырём условиям системы уравнений (1), но при этом известны прямоугольные параллелепипеды, удовлетворяющие первым трём условиям системы уравнений (1), называемые Эйлеровыми параллелепипедами. Фактически, Эйлеров параллелепипед можно представить прямоугольным тетраэдром $A_1C_1D_1D_2$, у которого все рёбра L, W, H, D_{LW}, D_{LH} и D_{WH} целочисленные.

Как правило, при решении вопросов по Совершенному Кубоиду рассматривают решение задачи через плоские пифагоровы треугольники или пифагоровы тройки, определяя сначала параметры Эйлерова параллелепипеда [5], а затем переносят решение задачи в трёхмерное пространство для поиска параметров Совершенного Кубоида, для которого эйлеров параллелепипед является частным случаем. Однако целесообразно применить и обратный подход, а именно: спроецировать (рис. 2) вращением вокруг высоты (H) боковые грани $A_1A_2D_1D_2$ и $C_1C_2D_1D_2$ прямоугольного параллелепипеда на плоскость диагональной грани $B_1B_2D_1D_2$.

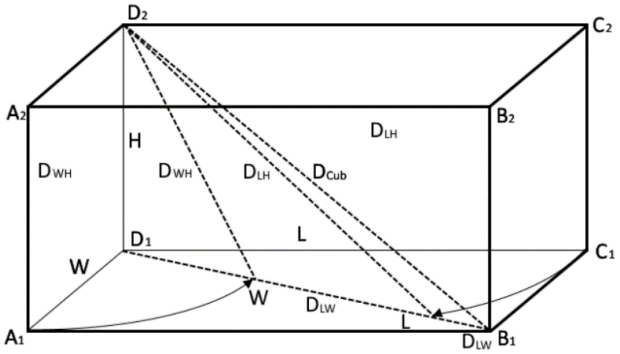


Рис. 2

Рис. 2: Проекция боковых граней на плоскость диагональной грани

В результате получаем три прямоугольных треугольника D_1D_2W, D_1D_2L и $D_1D_2D_{LW}$, имеющих один общий катет H (высота прямоугольного параллелепипеда), с катетами W, L и D_{LW} (два ребра прямоуголь-

ного параллелепипеда и диагональ основания соответственно), а также гипотенузами D_{WH}, D_{LH} и D_{Cub} (две диагонали боковых граней и главная диагональ прямоугольного параллелепипеда соответственно).

Учитывая, что один катет примитивного (то есть с взаимно простыми длинами рёбер) прямоугольного параллелепипеда, удовлетворяющего условиям (1), должен быть обязательно нечётным, для дальнейших рассуждений достаточно принять его, например, за высоту (H). Таким образом, Совершенный Кубоид существует тогда и только тогда, когда на одном нечётном катете можно построить не менее трёх пифагоровых треугольников.

Рассмотрим декартову систему координат (рис. 3), в которой по оси ординат отложим отрезок Y с нечётным значением, а по оси абсцисс отметим точки с целочисленными значениями $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ такими, что полученные треугольники являются пифагоровыми.

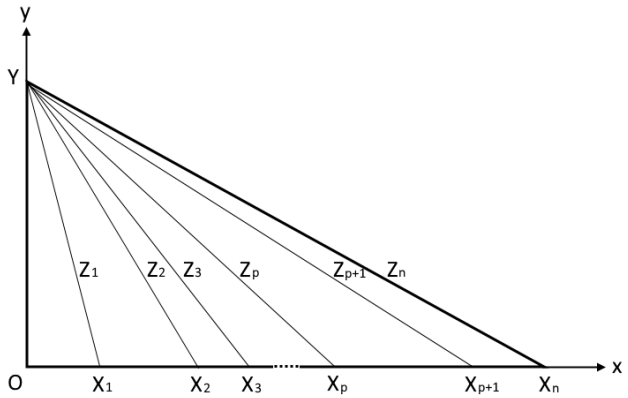


Рис. 3: Пифагоровы треугольники на общем нечётном катете

Определим возможное количество полученных треугольников и выведем формулу, связывающую чётные катеты со значением Y и его делителями, разложив базовое диофантово уравнение на множители. По теореме Пифагора для любой тройки чисел запишем

$$Y^2 = Z_i^2 - X_i^2. \tag{2}$$

Используя формулу разности квадратов, разложим правую часть уравнения (2) на два множителя:

$$Y^2 = (Z_i - X_i)(Z_i + X_i). \tag{3}$$

Поскольку мы имеем дело с целыми числами, выражение в первой скобке обязано быть натуральным делителем числа Y^2. Обозначим

$$Z_i - X_i = f_i. \tag{4}$$

Тогда

$$Z_i + X_i = \frac{Y^2}{f_i}. \tag{5}$$

Чтобы выразить чётный катет X_i через нечётный Y, избавившись от гипотенузы Z_i, вычтем из уравнения (5) уравнение (4) и получим искомую формулу зависимости чётного катета от нечётного и его делителей:

$$X_i = \frac{Y^2 - f_i^2}{2f_i}. \tag{6}$$

Так как чётный катет X_i должен быть строго положительным числом, т. е. $X_i > 0$, то выражение в скобках тоже должно быть больше нуля. Значит $f_i < Y$.

Заметим, что уравнение (6) не нарушает условие целочисленности X_i. Поскольку Y по условию нечётное число, его квадрат также нечётный. В свою очередь, любой делитель нечётного числа может быть только нечётным. Отсюда разность двух нечётных чисел в выражении в скобках уравнения (6) всегда даёт чётное число, а при делении на 2 чётного числа результат гарантирует целочисленность X_i.

Аналогичным образом можно получить и формулу для всех гипотенуз:

$$Z_i = \frac{Y^2 + f_i^2}{2f_i}. \tag{7}$$

Можно доказать, пользуясь формулами математических сочетаний, что число неповторяющихся попарных произведений ряда чисел, представляющих собою в нашем случае набор делителей f, не превышает $n^2/4$. Как известно [1] из канонического разложения числа на простые множители, число делителей числа равно произведению увеличенных на единицу показателей степеней его простых множителей. Таким образом, количество пифагоровых треугольников, построенных на нечётной стороне, ограничено количеством значений делителей f_p. Поскольку количество делителей любого числа конечно, то и пифагоровых треугольников, построенных на нечётном катете, тоже конечно.

В качестве примера примем $Y = 117$, отметив для дальнейших рассуждений, что это число равно нечётному ребру минимального (по объёму) из известных Эйлеровых параллелепипедов.

Выпишем все делители f_i квадрата числа $Y = 117$, меньшие Y:

$$f_i \in \{1,\ 3,\ 9,\ 13,\ 27,\ 39,\ 81\}.$$

Итого получаем семь возможных построений пифагоровых треугольников на нечётном катете $Y = 117$, при этом семь вариантов чётных катетов, вычисляемых по формуле (6), соответствуют в порядке убывания индексов:

$$X_i \in \{6844,\ 2280,\ 756,\ 520,\ 240,\ 108,\ 44\},$$

а гипотенузы, вычисляемые по формулам (7), будут равны соответственно:

$$Z_i \in \{6845,\ 2283,\ 765,\ 521,\ 267,\ 125,\ 125\}.$$

Отметим, что максимально возможное значение чётного катета пифагорова треугольника, построенного на нечётном катете, равно половине квадрата значения нечётного катета без единицы, т. к. из уравнения (6) следует, что значение чётного катета примет предельно большое значение при $f = 1$, т. е.

$$X_{\max} = \frac{Y^2 - 1}{2}. \tag{8}$$

Приняв в качестве нечётного катета H прямоугольного параллелепипеда за координату Y, а в качестве чётных катетов L и W — за координаты X_i, имеем, что формулы (6) и (7) описывают все прямоугольные параллелепипеды с пятью целочисленными параметрами — высотой H, шириной W, длиной L и диагоналями боковых (по рис. 1) граней D_{LH} и D_{WH}. Число таких параллелепипедов, построенных на нечётном ребре (высоте H), равняется количеству делителей f_p нечётного ребра (высоты H).

Если диагонали D_{LH} и D_{WH} боковых граней образуют с диагональю нижней грани D_{LW} пифагоров треугольник, то тогда можно говорить об образовании Эйлерова параллелепипеда с шестью целочисленными параметрами. На основании положений о существовании пифагоровых треугольников, построенных на одном нечётном катете, можно утверждать, что Эйлеров параллелепипед существует тогда и только тогда, когда в ряду нечётных значений f_p, построенных на высоте H, найдётся, как минимум, пара значений, которые и составят Пифагоровый треугольник:

$$\left(\frac{H^2 - f_L^2}{f_L}\right)^2 + \left(\frac{H^2 - f_W^2}{f_W}\right)^2 = 4 \cdot D_{LW}^2. \tag{9}$$

В частности, из выше рассмотренного примера для прямоугольного параллелепипеда с пятью целочисленными параметрами с нечётным

ребром $H = 117$, имеем семь возможных решений. В то же время, положив $f = 27$ и $f = 81$, вычисляем, что правая часть уравнения (9) равна квадрату натурального числа $D = 244$, что позволяет сделать вывод о существовании Эйлерова параллелепипеда со сторонами $H = 117$, $L = 44$ и $W = 240$.

С учётом полученных формул, подставим их в чётвертое уравнение системы (1) и получим уравнение Совершенного Кубоида, связывающее нечётную высоту H с тремя целочисленными делителями её квадрата:

$$\left(\frac{H^2 - f_L^2}{2f_L}\right)^2 + \left(\frac{H^2 - f_W^2}{2f_W}\right)^2 = \left(\frac{H^2 - f_D^2}{2f_D}\right)^2, \tag{10}$$

причём

$$f_L, f_W, f_D < H, \quad f_i \mid H^2, \quad f_i \text{ — нечётные.} \tag{11}$$

Таким образом, уравнение (10) есть искомая формула для поиска Совершенного Кубоида.

Для упрощения дальнейших алгебраических выкладок и проведения локального анализа перейдём к единым стандартизированным обозначениям: примем строчную переменную h в качестве нечётной высоты параллелепипеда ($H = h$), а нечётные делители квадрата ребра f_L, f_W, f_D упорядочим по величине и переобозначим через числовые индексы f_1, f_2, f_3 соответственно. С учётом принятых обозначений переписанное исходное уравнение Совершенного Кубоида (10) примет вид:

$$\left(\frac{h^2 - f_2^2}{2f_2}\right)^2 + \left(\frac{h^2 - f_3^2}{2f_3}\right)^2 = \left(\frac{h^2 - f_1^2}{2f_1}\right)^2, \tag{12}$$

причём для делителей накладывается строгое упорядоченное условие задачи:

$$f_1 < f_2 < f_3 < h. \tag{13}$$

Сгруппируем все члены с переменной h в левой части уравнения (12), а свободные члены, состоящие только из делителей, перенесём в правую часть:

$$h^4 \left(\frac{1}{f_2^2} + \frac{1}{f_3^2} - \frac{1}{f_1^2}\right) - 2h^2 = f_1^2 - f_2^2 - f_3^2 \tag{14}$$

Приведём дроби в скобках к общему знаменателю:

$$h^4 \cdot \frac{f_1^2 f_3^2 + f_1^2 f_2^2 - f_2^2 f_3^2}{f_1^2 f_2^2 f_3^2} - 2h^2 = f_1^2 - f_2^2 - f_3^2 \tag{15}$$

Перейдём к целым числам, избавившись от знаменателя, умножив на него все члены уравнения:

$$h^4 \left(f_1^2 f_3^2 + f_1^2 f_2^2 - f_2^2 f_3^2\right) - 2h^2 \left(f_1^2 f_2^2 f_3^2\right) = f_1^2 f_2^2 f_3^2 \left(f_1^2 - f_2^2 - f_3^2\right) \tag{16}$$

Мы получили биквадратное уравнение (16) относительно h. Решим его как квадратное относительно квадрата h^2. Для этого найдём четверть дискриминанта D:

$$\frac{D}{4} = \left(f_1^2 f_2^2 f_3^2\right)^2 - \left(f_1^2 f_3^2 + f_1^2 f_2^2 - f_2^2 f_3^2\right) \cdot \left[-f_1^2 f_2^2 f_3^2 \left(f_1^2 - f_2^2 - f_3^2\right)\right] \quad (17)$$

Вынесем общий множитель за скобки и после полного упрощения выражения внутри скобок дискриминант сводится к произведению разностей:

$$\frac{D}{4} = f_1^2 f_2^2 f_3^2 \left(f_2^2 - f_1^2\right) \left(f_3^2 - f_1^2\right) \left(f_2^2 + f_3^2\right) \quad (18)$$

Исходя из условий (13) отметим, что дискриминант всегда больше нуля. Запишем полное уравнение для квадрата h^2:

$$h^2 = \frac{f_1^2 f_2^2 f_3^2 \pm f_1 f_2 f_3 \sqrt{\left(f_2^2 - f_1^2\right)\left(f_3^2 - f_1^2\right)\left(f_2^2 + f_3^2\right)}}{f_1^2 f_2^2 + f_1^2 f_3^2 - f_2^2 f_3^2}. \quad (19)$$

Выделим общий множитель и произведем анализ разности, чтобы доказать то, что в уравнении (19) знаменатель $Z = f_1^2 f_2^2 + f_1^2 f_3^2 - f_2^2 f_3^2$ всегда строго отрицательный. Для этого воспользуемся исходным упорядочением делителей из условия задачи: $f_1 < f_2 < f_3$, где f_1, f_2, f_3 — положительные нечетные делители натурального квадрата h^2. Перегруппируем члены выражения знаменателя Z:

$$Z = f_1^2 f_2^2 - f_3^2 (f_2^2 - f_1^2). \quad (20)$$

Проанализируем знаки и величины полученных компонентов: 1. Так как $f_1 < f_2$, разность квадратов $(f_2^2 - f_1^2)$ является строго положительным числом: $f_2^2 - f_1^2 > 0$. 2. Из условия $f_2 < f_3$ следует, что произведение f_3^2 на разность $(f_2^2 - f_1^2)$ будет строго больше, чем если бы мы умножили ее на f_2^2: $f_3^2(f_2^2 - f_1^2) > f_2^2(f_2^2 - f_1^2)$. 3. Раскроем скобки в правой части этого неравенства: $f_2^2(f_2^2 - f_1^2) = f_2^4 - f_1^2 f_2^2$. 4. Из очевидного неравенства $f_2 > f_1$ следует, что $f_2^4 > f_1^4$, а значит: $f_2^4 - f_1^2 f_2^2 > f_1^2 f_2^2$. Соединяя цепочку неравенств, получаем: $f_3^2(f_2^2 - f_1^2) > f_1^2 f_2^2$. Возвращаясь к нашему выражению для Z, мы из меньшего положительного числа $(f_1^2 f_2^2)$ вычитаем строго большее положительное число $(f_3^2(f_2^2 - f_1^2))$:

$$Z = f_1^2 f_2^2 - f_3^2 (f_2^2 - f_1^2) < 0. \quad (21)$$

Следовательно, $Z < 0$ при любых $f_1 < f_2 < f_3$.

Теперь произведем анализ числителя с целью выбора единственного знака перед радикалом. Так как $N = h^2$ является квадратом вещественного нечетного числа, физический смысл имеют только строго положительные значения ($h^2 > 0$). Поскольку знаменатель Z всегда отрицателен, числитель также обязан быть строго отрицательным. Сравним по величине два компонента внутри скобок числителя: 1. Левый компонент: $M = f_1 f_2 f_3 = \sqrt{f_1^2 f_2^2 f_3^2}$ 2. Правый компонент (подкоренное выражение): $W = (f_2^2 - f_1^2)(f_3^2 - f_1^2)(f_2^2 + f_3^2)$ Раскроем скобки в выражении W:

$$W = (|Z| + f_1^4)(f_2^2 + f_3^2) = |Z|(f_2^2 + f_3^2) + f_1^4 f_2^2 + f_1^4 f_3^2 \tag{22}$$

Сравним W с квадратом левого компонента $M^2 = f_1^2 f_2^2 f_3^2$. Очевидно, что за счет множителя $|Z|(f_2^2 + f_3^2)$ и высоких степеней делителей: $W > M^2 \implies \sqrt{W} > M$. Это означает, что величина корня всегда строго больше, чем произведение $f_1 f_2 f_3$. Отсюда получаем два следствия для знаков числителя: если мы выберем знак «плюс» ($\pm \to +$), то числитель будет строго положительным. Положив знак «минус» ($\pm \to -$), то числитель становится строго отрицательным. Отрицательный числитель, деленный на отрицательный знаменатель Z, дает единственный содержательный и строго положительный корень $h^2 > 0$.

Фиксация единственного вещественного корня. Таким образом, алгебраически доказано, что уравнение (19) имеет ровно один корень, способный быть квадратом целого числа:

$$h^2 = \frac{f_1^2 f_2^2 f_3^2 - f_1 f_2 f_3 \sqrt{\left(f_2^2 - f_1^2\right)\left(f_3^2 - f_1^2\right)\left(f_2^2 + f_3^2\right)}}{f_1^2 f_2^2 + f_1^2 f_3^2 - f_2^2 f_3^2}. \tag{23}$$

Уравнение (23) является фундаментальным инвариантом гипотетического Совершенного Кубоида. Для исследования возможности существования его решений в кольце целых чисел $\mathbb{Z}$ сформулируем и докажем вспомогательные леммы об интервалах и соотношениях делителей.

3 Необходимые условия существования решений и редукция пространства параметров

Для исследования разрешимости фундаментального диофантова уравнения (23) в натуральных числах сформулируем основную теорему о необходимых арифметических и геометрических ограничениях на параметры кубоида, а также о несуществовании решений в классе расщепляющихся квадратичных форм.

Теорема 1 (Об ограничениях на параметры и редукции уравнения совершенного кубоида)**.** *Пусть натуральные числа $h, f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{N}$ образуют нечётное решение фундаментального диофантова уравнения*

$$h^2 = \frac{f_1^2 f_2^2 f_3^2 - f_1 f_2 f_3 \sqrt{\left(f_2^2 - f_1^2\right)\left(f_3^2 - f_1^2\right)\left(f_2^2 + f_3^2\right)}}{f_1^2 f_2^2 + f_1^2 f_3^2 - f_2^2 f_3^2},$$

удовлетворяющее условиям строгого упорядочения $1 \le f_1 < f_2 < f_3 < h$ и делимости $f_i \mid h^2$ $(i = 1, 2, 3)$. Тогда выполняются следующие утверждения:

1. *Наименьший делитель строго больше единицы ($f_1 > 1$), а отношение младших делителей ограничено сверху неравенством $f_2/f_1 < \sqrt{2}$.*

2. *Параметры f_1, f_2, f_3 не могут образовывать геометрическую прогрессию ($f_2^2 \neq f_1 f_3$).*

3. *После выделения общего нечётного делителя $d = \gcd(f_1, f_2, f_3)$ и перехода к взаимно простым числам $a_i = f_i/d$ подкоренное выражение $\tilde{W} = (a_2^2 - a_1^2)(a_3^2 - a_1^2)(a_2^2 + a_3^2)$ обязано быть точным квадратом, причём 2-адические оценки первых двух сомножителей имеют разную чётность: $v_2(a_2^2 - a_1^2) + v_2(a_3^2 - a_1^2) \equiv 1 \pmod 2$.*

4. *Системы, допускающие расщепление первых двух сомножителей на чистые квадраты в нечётной части (сведение к эллиптической кривой $Y^2 = X^3 - X$), не имеют нетривиальных натуральных решений.*

Доказательство Теоремы 1 разбивается на пять последовательных лемм.

Лемма 1 (Строгая нижняя граница для наименьшего делителя)**.** *Для любого решения диофантова уравнения (23) в нечётных натуральных числах $1 \le f_1 < f_2 < f_3 < h$ наименьший делитель строго больше единицы, то есть $f_1 > 1$.*

Доказательство. Предположим противное: пусть $f_1 = 1$. Из условия $1 = f_1 < f_2 < f_3 < h$ и нечётности параметров следует, что минимально возможные значения для последующих делителей равны $f_2 \ge 3$ и $f_3 \ge 5$, а нечётная высота удовлетворяет неравенству $h \ge 7$.

Выразим квадраты сторон основания через делители по формуле (6):

$$D_{LW}^2 = \left(\frac{h^2 - 1}{2}\right)^2, \quad W^2 = \left(\frac{h^2 - f_2^2}{2 f_2}\right)^2, \quad L^2 = \left(\frac{h^2 - f_3^2}{2 f_3}\right)^2.$$

Поскольку функция $X(f) = \frac{h^2-f^2}{2f}$ строго убывает при $f > 0$, для $f_2 \geq 3$ и $f_3 \geq 5$ выполняются строгие неравенства:

$$W = \frac{h^2 - f_2^2}{2f_2} \leq \frac{h^2 - 9}{6} < \frac{h^2}{6}, \quad L = \frac{h^2 - f_3^2}{2f_3} \leq \frac{h^2 - 25}{10} < \frac{h^2}{10}.$$

Возводя обе части в квадрат и складывая, получаем строгую оценку сверху для суммы квадратов катетов основания:

$$L^2 + W^2 < \frac{h^4}{36} + \frac{h^4}{100} = \frac{17}{450}h^4.$$

Покажем, что для всех нечётных $h \geq 7$ выполняется неравенство $\frac{17}{450}h^4 < D_{LW}^2$:

$$\frac{17}{450}h^4 < \frac{h^4 - 2h^2 + 1}{4} \iff 68h^4 < 450h^4 - 900h^2 + 450 \iff h^2(382h^2 - 900) + 450 > 0.$$

При $h \geq 7$ имеем $382h^2 - 900 \geq 382 \cdot 49 - 900 = 17818 > 0$, откуда последнее неравенство выполняется тождественно. Таким образом, при $f_1 = 1$ всегда имеет место строгое неравенство $L^2 + W^2 < D_{LW}^2$, что противоречит теореме Пифагора для основания кубоида $L^2 + W^2 = D_{LW}^2$. Следовательно, $f_1 > 1$. □

Лемма 2 (Верхняя граница отношения младших делителей)**.** *Для любых нечётных натуральных делителей $1 < f_1 < f_2 < f_3 < h$, удовлетворяющих системе уравнений совершенного кубоида, выполняется строгое неравенство:*

$$\frac{f_2}{f_1} < \sqrt{2}.$$

Доказательство. В прямоугольном треугольнике основания кубоида со сторонами $L < W < D_{LW}$ выполняется соотношение $L^2 + W^2 = D_{LW}^2$. Так как $W > L$, квадрат большего катета W строго превосходит половину квадрата гипотенузы D_{LW}:

$$W^2 > \frac{1}{2}D_{LW}^2 \implies W > \frac{\sqrt{2}}{2}D_{LW}.$$

Подставляя явные выражения для W и D_{LW} из формулы (6), получаем:

$$\frac{h^2 - f_2^2}{2f_2} > \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{h^2 - f_1^2}{2f_1}.$$

Умножая обе части неравенства на $4f_1f_2 > 0$ и группируя слагаемые относительно h^2, имеем:

$$h^2(2f_1 - \sqrt{2}f_2) > 2f_1f_2^2 - \sqrt{2}f_1^2f_2 = \sqrt{2}f_1f_2(\sqrt{2}f_2 - f_1).$$

Поскольку $f_2 > f_1 > 0$, правая часть строго положительна: $\sqrt{2}f_1f_2(\sqrt{2}f_2 - f_1) > \sqrt{2}f_1f_2(f_2 - f_1) > 0$. Так как $h^2 > 0$, множитель при h^2 в левой части также обязан быть строго положительным:

$$2f_1 - \sqrt{2}f_2 > 0 \implies \frac{f_2}{f_1} < \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}. \qquad \square$$

Лемма 3 (Отсутствие геометрической пропорции между делителями)**.** *Для любого решения диофантова уравнения* (23) *в нечётных натуральных числах* $1 < f_1 < f_2 < f_3 < h$ *делители* f_1, f_2, f_3 *не могут образовывать геометрическую прогрессию, то есть* $f_2^2 \neq f_1f_3$.

Доказательство. Предположим противное: пусть $f_2^2 = f_1f_3$. Подставляя это соотношение в первый и третий сомножители подкоренного выражения W, получаем:

$$f_2^2 - f_1^2 = f_1(f_3 - f_1), \quad f_2^2 + f_3^2 = f_3(f_3 + f_1).$$

Перемножая эти выражения и снова используя $f_1f_3 = f_2^2$, находим:

$$(f_2^2 - f_1^2)(f_2^2 + f_3^2) = f_1f_3(f_3^2 - f_1^2) = f_2^2(f_3^2 - f_1^2).$$

Следовательно, подкоренное выражение принимает вид точного квадрата $W = \big(f_2(f_3^2 - f_1^2)\big)^2$, откуда при $f_3 > f_1 > 0$ имеем $\sqrt{W} = f_2(f_3^2 - f_1^2)$. Подставляя $\sqrt{W}$ и замену $f_2^2 = f_1f_3$ в числитель и знаменатель уравнения (23), получаем:

$$h^2 = \frac{f_1^2f_2^2f_3^2 - f_1f_2^2f_3(f_3^2 - f_1^2)}{f_1^2(f_1f_3) + f_1^2f_3^2 - (f_1f_3)f_3^2} = \frac{f_1f_2^2f_3(f_1^2 + f_1f_3 - f_3^2)}{f_1f_3(f_1^2 + f_1f_3 - f_3^2)}.$$

Поскольку знаменатель уравнения (23) строго отрицателен для любых $f_1 < f_2 < f_3$, выражение $f_1f_3(f_1^2 + f_1f_3 - f_3^2)$ отлично от нуля. После сокращения получаем $h^2 = f_2^2$, откуда $h = f_2$, что противоречит строгому упорядочению $f_2 < f_3 < h$. $\square$

Замечание 1. При переходе к теоретико-числовому анализу подкоренного выражения W важно отметить, что условие примитивности кубоида ($\gcd(L, W, H) = 1$) само по себе не гарантирует взаимной простоты делителей f_1, f_2, f_3. Поскольку $f_i \mid h^2$, при составном значении нечётного

ребра h все три параметра f_i могут иметь общий нечётный делитель $d > 1$. Чтобы сохранить полную общность рассуждений и корректно применить 2-адический анализ, мы предварительно выделяем наибольший общий делитель $d = \gcd(f_1, f_2, f_3)$ и переходим к гарантированно взаимно простым параметрам $a_i = f_i/d$.

Лемма 4 (Редукция к примитивным параметрам и 2-адический баланс)**.** *Пусть $d = \gcd(f_1, f_2, f_3) \geq 1$, и пусть $a_i = f_i/d$ ($i = 1, 2, 3$) — взаимно простые нечётные натуральные числа. Для существования целочисленного решения уравнения* (23) *необходимо, чтобы произведение*

$$\tilde{W} = (a_2^2 - a_1^2)(a_3^2 - a_1^2)(a_2^2 + a_3^2)$$

являлось точным квадратом натурального числа ($\tilde{W} = K^2$), причём 2-адические оценки сомножителей $W_1 = a_2^2 - a_1^2$ и $W_2 = a_3^2 - a_1^2$ имели разную чётность:

$$v_2(a_2^2 - a_1^2) + v_2(a_3^2 - a_1^2) \equiv 1 \pmod 2.$$

Доказательство. Подставим $f_i = da_i$ ($i = 1, 2, 3$) в уравнение (23). Вынося общие множители d^6 в числителе и d^4 в знаменателе, приводим уравнение к виду:

$$h^2 = d^2 \cdot \frac{a_1^2 a_2^2 a_3^2 - a_1 a_2 a_3 \sqrt{\tilde{W}}}{a_1^2 a_2^2 + a_1^2 a_3^2 - a_2^2 a_3^2}.$$

Поскольку $h, d, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{N}$, радикал $\sqrt{\tilde{W}}$ обязан быть рациональным, а в силу целостности $\tilde{W}$ — натуральным числом: $\tilde{W} = K^2$ ($K \in \mathbb{N}$).

Рассмотрим 2-адическую оценку $v_2(\tilde{W})$ (показатель наивысшей степени двойки, делящей $\tilde{W}$). Так как $\tilde{W} = K^2$, величина $v_2(\tilde{W})$ чётна:

$$v_2(\tilde{W}) = v_2(a_2^2 - a_1^2) + v_2(a_3^2 - a_1^2) + v_2(a_2^2 + a_3^2) \equiv 0 \pmod 2.$$

Поскольку a_2 и a_3 нечётны, $a_2^2 \equiv 1 \pmod 4$ и $a_3^2 \equiv 1 \pmod 4$, откуда $a_2^2 + a_3^2 \equiv 2 \pmod 4$. Следовательно, $v_2(a_2^2 + a_3^2) = 1$. Подставляя это значение в условие чётности $v_2(\tilde{W})$, получаем:

$$v_2(a_2^2 - a_1^2) + v_2(a_3^2 - a_1^2) + 1 \equiv 0 \pmod 2 \implies v_2(a_2^2 - a_1^2) + v_2(a_3^2 - a_1^2) \equiv 1 \pmod 2.$$

□

Лемма 5 (Неразрешимость системы при полном расщеплении на чистые квадраты)**.** *Система диофантовых уравнений*

$$a_2^2 - a_1^2 = K_1^2, \quad a_3^2 - a_1^2 = K_2^2, \quad a_2^2 + a_3^2 = 2K_3^2 \tag{24}$$

не имеет решений в натуральных числах $1 < a_1 < a_2 < a_3$ и $K_1, K_2, K_3 \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Из первых двух уравнений системы (24) выразим квадраты параметров a_2^2 и a_3^2 через a_1^2:

$$a_2^2 = a_1^2 + K_1^2, \quad a_3^2 = a_1^2 + K_2^2.$$

Подставляя эти выражения в третье уравнение системы $a_2^2 + a_3^2 = 2K_3^2$, получаем соотношение:

$$2a_1^2 + K_1^2 + K_2^2 = 2K_3^2.$$

Перейдём к рациональным координатам, разделив первые два уравнения на $a_1^2 > 0$. Введём рациональные переменные:

$$x_1 = \frac{a_2}{a_1}, \quad y_1 = \frac{K_1}{a_1}, \qquad x_2 = \frac{a_3}{a_1}, \quad y_2 = \frac{K_2}{a_1}, \qquad z = \frac{K_3}{a_1}.$$

Тогда система (24) преобразуется к виду:

$$x_1^2 - 1 = y_1^2, \quad x_2^2 - 1 = y_2^2, \quad x_1^2 + x_2^2 = 2z^2.$$

Используя стандартную рациональную параметризацию гиперболы $x^2 - y^2 = 1$:

$$x_1 = \frac{t_1^2 + 1}{2t_1}, \quad y_1 = \frac{t_1^2 - 1}{2t_1}, \qquad x_2 = \frac{t_2^2 + 1}{2t_2}, \quad y_2 = \frac{t_2^2 - 1}{2t_2} \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{Q}_{>1}),$$

подставим x_1 и x_2 в уравнение $x_1^2 + x_2^2 = 2z^2$:

$$\left(\frac{t_1^2 + 1}{2t_1}\right)^2 + \left(\frac{t_2^2 + 1}{2t_2}\right)^2 = 2z^2.$$

Заметим также, что из тождеств $(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) = (y_1 y_2)^2$ и условия $x_1^2 + x_2^2 = 2z^2$ следует равенство:

$$(x_1 x_2)^2 - (x_1^2 + x_2^2) + 1 = (y_1 y_2)^2 \implies (x_1 x_2)^2 - 2z^2 + 1 = (y_1 y_2)^2.$$

Обозначая $u = x_1 x_2 = \frac{a_2 a_3}{a_1^2} \in \mathbb{Q}_{>1}$ и $v = y_1 y_2 = \frac{K_1 K_2}{a_1^2} \in \mathbb{Q}_{>0}$, получаем уравнение:

$$v^2 = u^2 - (2z^2 - 1).$$

Одновременно заметим, что в силу классической теоремы Ферма о невозможности существования четырёх квадратов в арифметической прогрессии (эквивалентной тривиальности группы рациональных точек $E(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ эллиптической кривой конгруэнтного числа $Y^2 = X^3 - X$), система $a_2^2 - a_1^2 = K_1^2$, $a_3^2 - a_1^2 = K_2^2$ совместно с условием $a_2^2 + a_3^2 =$

$2K_3^2$ сводится к кривой $Y^2 = X^3 - X$ путём бирациональной замены: $X = \left(\frac{K_3}{a_1}\right)^2 = z^2, \quad Y = \frac{K_3(a_3^2-a_2^2)}{2a_1^3} = \frac{z(x_2^2-x_1^2)}{2}$. Проверим справедливость тождества $Y^2 = X^3 - X$ прямой подстановкой: $X^3 - X = z^2(z^4-1) = z^2(z^2-1)(z^2+1)$. Поскольку $2z^2 = x_1^2 + x_2^2$, имеем: $z^2 - 1 = \frac{x_1^2+x_2^2-2}{2} = \frac{y_1^2+y_2^2}{2}, \quad z^2+1 = \frac{x_1^2+x_2^2+2}{2}$. При условии $x_1^2 - y_1^2 = 1$ и $x_2^2 - y_2^2 = 1$ произведение $(z^2-1)(z^2+1)$ равно: $\frac{(x_1^2+x_2^2-2)(x_1^2+x_2^2+2)}{4} = \frac{(x_1^2+x_2^2)^2-4}{4}$. С другой стороны, $(x_2^2-x_1^2)^2 = (x_1^2+x_2^2)^2 - 4x_1^2x_2^2$. В силу равенства $x_1^2x_2^2 - (x_1^2+x_2^2) + 1 = y_1^2y_2^2$, при расщеплении на независимые квадраты имеем $4x_1^2x_2^2 = 4$, что возможно только при $x_1 = x_2 = 1$ ($a_1 = a_2 = a_3$). Единственными рациональными точками на кривой $Y^2 = X^3 - X$ являются точки кручения $(X, Y) \in \{\mathcal{O}, (0,0), (1,0), (-1,0)\}$. Из условия $X = z^2 > 0$ допустима лишь точка $(1,0)$, что даёт $z = 1$ и $Y = 0 \implies a_2 = a_3$, вопреки строгому неравенству $1 < a_1 < a_2 < a_3$. □

Доказательство Теоремы 1. Утверждение 1 следует непосредственно из Лемм 1 и 2. Утверждение 2 доказано в Лемме 3. Утверждение 3 устанавливается Леммой 4. Утверждение 4 вытекает из Леммы 5. □

4 Заключение и открытые проблемы

В настоящей работе диофантова система совершенного кубоида сведена к единому фундаментальному иррациональному уравнению (23) относительно квадрата нечётного ребра h^2 и трёх нечётных делителей $f_1 < f_2 < f_3$ величины h^2. Показано, что геометрические и арифметические свойства кубоида жёстко ограничивают область допустимых параметров: исключаются случаи $f_1 = 1$ (Лемма 1), $f_2/f_1 \geq \sqrt{2}$ (Лемма 2) и геометрическая прогрессия делителей $f_2^2 = f_1 f_3$ (Лемма 3).

Кроме того, 2-адический анализ подкоренного выражения $\tilde{W} = (a_2^2 - a_1^2)(a_3^2 - a_1^2)(a_2^2 + a_3^2)$ после выделения наибольшего общего делителя $d = \gcd(f_1, f_2, f_3)$ показал, что чётность показателей степени двойки в первых двух сомножителях обязана быть различной (Лемма 4). Для случая полного расщепления на чистые квадраты в нечётной части доказано сведение к эллиптической кривой $Y^2 = X^3 - X$ и отсутствие нетривиальных натуральных решений (Лемма 5).

В качестве перспективных направлений дальнейших исследований выделяются две открытые задачи, соответствующие оставшимся арифметическим ветвям уравнения (23):

1. **Исследование 2-адических ветвей с удвоенными квадратами.** Согласно Лемме 4, при отсутствии общих нечётных простых

делителей у сомножителей $\tilde{W}$ задача сводится к двум несимметричным системам квадратичных форм:

$$\text{Случай А: } \begin{cases} a_2^2 - a_1^2 = 2u^2, \\ a_3^2 - a_1^2 = v^2, \\ a_2^2 + a_3^2 = 2w^2, \end{cases}$$

$$\text{Случай Б: } \begin{cases} a_2^2 - a_1^2 = u^2, \\ a_3^2 - a_1^2 = 2v^2, \\ a_2^2 + a_3^2 = 2w^2. \end{cases}$$

Доказательство неразрешимости Случаев А и Б в натуральных числах $1 < a_1 < a_2 < a_3$ методами арифметической геометрии (сведением к кривым более высокого рода или поверхностям Куммера) представляет собой ключевой этап на пути к полному решению проблемы совершенного кубоида.

2. **Анализ перекрёстных нечётных простых делителей.** Требуется строгое исследование конфигураций, при которых сомножители $(a_2^2 - a_1^2)$, $(a_3^2 - a_1^2)$ и $(a_2^2 + a_3^2)$ имеют общие простые делители $p \equiv 1 \pmod 4$, с учётом глобального условия делимости $da_i \mid h^2$ в уравнении (23).

Список литературы

[1] Виноградов И. М. Основы теории чисел. — М.: Наука, 1981. — С. 28.

[2] Ворон А. В. Классификация пифагоровых троек на основе различий котангенса их треугольников // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77–6567, публ. 25256, 11.03.2019.

[3] Meskhishvili M. Perfect cuboid and congruent number equation solutions // e-print arXiv: `arXiv:1211.6548`

[4] Савватеев А. В. Нерешённые задачи школьной математики. Электронный ресурс: `https://postnauka.ru`

[5] Серпинский В. Пифагоровы треугольники. — М.: Учпедгиз, 1959. — С. 65.

[6] Стюарт И. Величайшие математические задачи. — М.: Альпина Нон-Фикшн, 2019. — С. 406–407.

[7] Sharipov R. A. A note on a perfect Euler cuboid // e-print arXiv:1104.1716.

[8] Sharipov R. A. Симметрийный подход к задаче о совершенном кубоиде // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. Темат. обз., 2018, том 152, С. 143.

[9] Sharipov R. A. Неприводимые полиномы в задаче о совершенном кубоиде // Уфимский матем. журнал. — 2012. — Т. 4, № 1. — С. 153–160.

[10] Halcke P. Deliciae mathematicae oder mathematisches Sinnen-Confect. — Hamburg: N. Sauer, 1719.

[11] Проект yoyo@home по поиску совершенного кубоида. Электронный ресурс: `http://rechenkraft.net`