

Косоугольная эксцентрическая система координат и небесная механика

В.М. Беляев

Свободный исследователь, 634045 Томск, Россия

belyaev_vm@tpu.ru

Аннотация

В работе показано, что сдвиг перигелия планет, обычно объясняемый общей теорией относительности через кривизну пространства-времени, получается в плоском $\mathbb{R}^3$ с нулевым тензором Римана при переходе в косоугольную эксцентрическую систему координат (КЭСК). Преобразование $r = \lambda R$, связывающее фокальный радиус r с эксцентрическим R , приводит к поправке $3GMu^2/c^2$ в уравнении Бине и даёт сдвиг $6\pi GM/(c^2 a(1 - e^2))$ за оборот — тот же результат, что и метрика Шварцшильда. Расчёт для всех восьми планет совпадает с наблюдениями (Pitjeva, 2005) с точностью до взаимных возмущений. Ни Шварцшильда, ни кривизны, ни тензора Римана — нигде не используется. Связь с потенциалом Гербера (1898) и абберацией света обсуждается.

Ключевые слова: косоугольная эксцентрическая система координат (КЭСК), сдвиг перигелия, уравнение Бине, запаздывание гравитационного потенциала, потенциал Гербера, абберация света, тензор Римана.

Abstract: The paper shows that the shift of the perihelion of the planets, usually explained by general relativity through the curvature of space-time, is obtained in a flat $\mathbb{R}^3$ with a zero Riemann tensor when transitioning to an oblique eccentric coordinate system (CECC). The transformation $r = \lambda R$, which relates the focal radius r to the eccentric R , results in a correction $3GMu^2/c^2$ in the Binet equation and gives a shift of $6\pi GM/(c^2 a(1 - e^2))$ per revolution — the same result as the Schwarzschild metric. The calculation for all eight planets coincides with the observations (Pitjeva, 2005) up to mutual perturbations. Neither Schwarzschild, nor curvature, nor the Riemann tensor is used anywhere. The connection with the potential of Gerber (1898) and the aberration of light is discussed.

Keywords: oblique eccentric coordinate system (CECC), perihelion shift, Binet equation, gravitational potential retardation, Gerber potential, light aberration, Riemann tensor.

Лицензия: CC BY 4.0 (Creative Commons Attribution 4.0 International).

1 Введение

Проблема запаздывания гравитационного потенциала имеет долгую историю [?]. Гаусс (1835) первым указал, что если гравитация распространяется с конечной скоростью, потенциал в точке наблюдения зависит от запаздывающего положения источника. Вебер (1846) построил электродинамику, в которой сила зависит относительной скорости зарядов. Гербер (1898) [?, ?] предложил потенциал

$$V = \frac{\mu}{r \left(1 - \frac{1}{c} \frac{dr}{dt}\right)^2}, \quad (1)$$

содержащий *двойное запаздывание*: первый фактор $1/(1 - \dot{r}/c)$ учитывает, что потенциал исходит из запаздывающего положения тела, второй — что скорость переноса потенциала

уменьшается на $\dot{r}$ (эффект Доплера). Биномиальное разложение (??) до второго порядка даёт

$$V = \frac{\mu}{r} \left[1 + \frac{2}{c} \frac{dr}{dt} + \frac{3}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right]. \quad (2)$$

Из уравнений Лагранжа для этого потенциала Гербер вывел сдвиг перигелия

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1-e^2)}, \quad (3)$$

математически тождественный формуле Эйнштейна (1915).

В данной работе показывается, что формула (??) возникает из чистой геометрии преобразования координат в плоском $\mathbb{R}^3$ — без метрики Шварцшильда и без кривизны. Ключевую роль играет косоугольная эксцентрическая система координат (КЭСК), в которой координата R измеряется от *экс-центра* — виртуальной точки, расположенной позади центра системы на расстоянии βR . Обозначения и аппарат эксцентрических систем координат введены в [?]; все программные реализации вычислений приведены в приложениях: метрика и символы Кристоффеля — приложение А («Метрика и символы Кристоффеля КЭСК»), эксцентриситеты и прецессия планет — приложение Б («Эксцентриситеты и прецессия планет»).

2 Тензор Римана КЭСК

2.1 Метрика КЭСК

Косоугольная эксцентрическая система координат (R, Θ) связана с полярной системой координат (r, θ) преобразованием

$$z = R(\cos \Theta - \beta), \quad \rho = R \sin \Theta, \quad (4)$$

где β — параметр скорости (в дальнейшем $\beta = e$ — эксцентриситет орбиты), R — эксцентрический радиус, Θ — эксцентрическая аномалия. Связь с фокальным радиусом:

$$r = R\lambda, \quad \lambda = \sqrt{1 - 2\beta \cos \Theta + \beta^2}. \quad (5)$$

Метрика, индуцированная на многообразии посредством гладкого инъективного отображения из евклидова пространства¹, вычисляется как $g_{ij} = (J^T J)_{ij}$, где J — матрица Якоби преобразования (??) в декартовы координаты $x = R \sin \Theta \cos \varphi$, $y = R \sin \Theta \sin \varphi$, $z = R(\cos \Theta - \beta)$. Она имеет *недиагональный* вид:

$$ds^2 = \lambda^2 dR^2 + 2\beta R \sin \Theta dR d\Theta + R^2 d\Theta^2 + R^2 \sin^2 \Theta d\varphi^2. \quad (6)$$

Недиагональный член $2\beta R \sin \Theta dR d\Theta$ соответствует косоугольности системы: базисные векторы $\mathbf{e}_R$ и $\mathbf{e}_\Theta$ не ортогональны ($g_{R\Theta} = \beta R \sin \Theta \neq 0$ при $\beta \neq 0$). Именно эта косоугольность — источник всех геометрических эффектов раздела 5.

2.2 Символы Кристоффеля

Для координат КЭСК (R, Θ, Φ) (индексы $1 = R$, $2 = \Theta$, $3 = \Phi$) ненулевые символы Кристоффеля метрики (??) таковы:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Theta\Theta}^R &= -\frac{R}{D}, & \Gamma_{\Phi\Phi}^R &= -\frac{R \sin^2 \Theta}{D}, \\ \Gamma_{R\Theta}^\Theta &= \Gamma_{\Theta R}^\Theta = \frac{1}{R}, & \Gamma_{\Theta\Theta}^\Theta &= \frac{\beta \sin \Theta}{D}, & \Gamma_{\Phi\Phi}^\Theta &= \frac{(\beta - \cos \Theta) \sin \Theta}{D}, \\ \Gamma_{R\Phi}^\Phi &= \Gamma_{\Phi R}^\Phi = \frac{1}{R}, & \Gamma_{\Theta\Phi}^\Phi &= \Gamma_{\Phi\Theta}^\Phi = \frac{\cos \Theta}{\sin \Theta}, \end{aligned} \quad (7)$$

¹Pullback (откат) метрики — метрика, индуцированная на многообразии посредством гладкого инъективного отображения из евклидова пространства. См. [?].

где $D = 1 - \beta \cos \Theta$. Все остальные символы Кристоффеля равны нулю, в том числе $\Gamma_{RR}^R = \Gamma_{R\Theta}^R = \Gamma_{RR}^\Theta = 0$: в недиагональных координатах КЭСК они не возникают из-за косоугольности лишь части перекрёстных направлений.

2.3 Тензор Римана

Прямое вычисление тензора Римана R^i_{jkl} по символам Кристоффеля даёт

$$R^i_{jkl} = 0 \quad \forall i, j, k, l. \quad (8)$$

Это означает, что КЭСК есть плоское пространство — диффеоморфное отображение $\mathbb{R}^3$. Кривизна отсутствует; все геометрические эффекты, которые мы получаем, обусловлены не кривизной, а *косоугольностью* системы координат.

3 КЭСК-Г и КЭСК-Л

Различают две разновидности КЭСК: **КЭСК-Г** (галилеева), которая получается преобразованием Галилея без множителя γ , и **КЭСК-Л** (лоренцева), в которую добавлен множитель γ (рис. ??). Смысл этого множителя состоит в растяжении координатных поверхностей вдоль линии движения. Световым конусом (изохронной поверхностью) называется геометрическое место точек $R = \text{const}$, до которых сигнал от начала координат O доходит за одно и то же время $\Delta T = R/c$; в $\mathbb{R}^3$ это концентрические сферы с центром в O . Изохронность — то, что даёт экцентрическое построение: все точки поверхности $R = \text{const}$ наблюдаются одновременно, что позволяет неизменным образом отсчитывать радиальную координату. В КЭСК-Л растяжение превращает сферы $R = \text{const}$ в эллипсоиды, но их сечение плоскостью орбиты по-прежнему проходит через экс-центр, поэтому изохронность (световой конус) сохраняется; этим КЭСК-Л отличается от КЭСК-Г, где сферы не растянуты. КЭСК-Л сложнее КЭСК-Г и используется реже; её геометрия получается простым растяжением КЭСК-Г по линии движения, поэтому в дальнейшем мы работаем в КЭСК-Г.

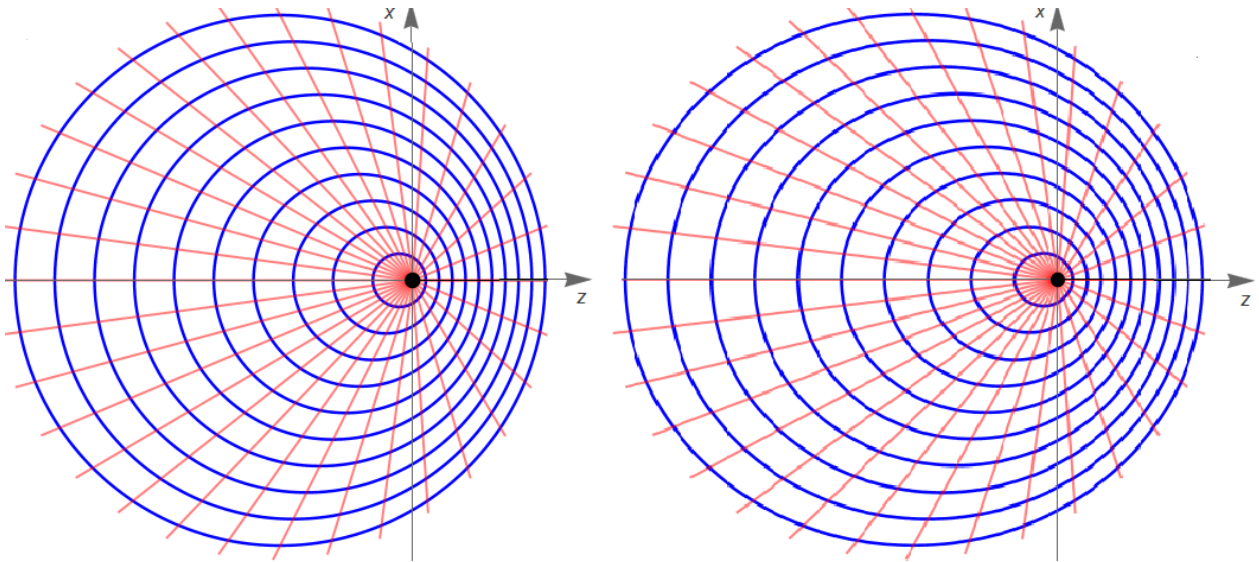


Рис. 1: Сетки косоугольной эксцентрической системы координат (КЭСК) в двух версиях при $\beta = 0,5$: (а) КЭСК-Г (галилеева) — координатные линии $R = \text{const}$ (эксцентрические окружности, центр смещён назад на βR) и $\Theta = \text{const}$ (радиальные лучи из экс-центра); (б) КЭСК-Л (лоренцева) — та же сетка, растянутая по направлению движения на множитель γ ; при этом изохронные эксцентрические сферы КЭСК-Г переходят в изохронные эксцентрические эллипсоиды, а сохраняющийся световой конус (окружность $R = \text{const}$ в сечении) по-прежнему проходит через экс-центр. Оси — в относительных единицах.

4 Связь с запаздыванием потенциала

4.1 Экс-центр как запаздывающее положение

В КЭСК экс-центр O_R для окружности $R = \text{const}$ находится в точке $z = -\beta R$ — позади центра O по направлению движения. Смещение $O_R \rightarrow O$ равно βR — это расстояние, которое тело проходит за время запаздывания R/c . Таким образом, экс-центр интерпретируется как *запаздывающее положение тела*: потенциал в точке наблюдения действует не из текущего положения O , а из запаздывающего O_R .

Окружность $R = \text{const}$ с центром в O_R — это фронт потенциала, испущенного телом в запаздывающий момент. Каждой точке наблюдения соответствует своя окружность и свой экс-центр.

4.2 Потенциал Гербера из геометрии КЭСК

Потенциал Гербера (??) содержит два фактора запаздывания. В терминах КЭСК:

- Первый фактор: радиус R измеряется от экс-центра O_R (запаздывающее положение), а не от центра O (текущее положение).
- Второй фактор: скорость переноса потенциала уменьшается на $\dot{r}/c$ — эффект Доплера для потенциала.

Двойное запаздывание даёт коэффициент $k = 6$ в формуле сдвига перигелия — ровно тот же, что в ОТО. Простое (одинарное) запаздывание дало бы $k = 2$ — только $14,1''/\text{век}$ для Меркурия.

4.3 Почему преобразования Лоренца «работают»

Трунев [?] показал, что преобразования Лоренца можно представить как композицию преобразования Галилея и преобразования подобия $r = \lambda_0 R$. В КЭСК эта композиция реализована геометрически: преобразование подобия $r = R\lambda$ с λ , зависящим от угла, есть не что иное, как учёт запаздывания. Множитель Лоренца $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ возникает как частный случай λ при $\Theta = 0$. Таким образом, преобразования Лоренца «работают» потому, что они моделируют запаздывание потенциала — но в рамках плоского пространства, без кривизны.

5 Сдвиг перигелия

5.1 Уравнение Бине с поправкой КЭСК

Ньютоновское уравнение Бине для радиальной функции $u = 1/r$:

$$u'' + u = \frac{k}{L^2} = \frac{1}{p}, \quad (9)$$

где $k = GM$, L — удельный момент импульса, $p = L^2/k$ — фокальный параметр. Решение — кеплеровский эллипс: $u = (1/p)(1 + e \cos \varphi)$.

В КЭСК замена $r = \lambda_0 R$ (где λ_0 — множитель преобразования подобия) приводит к появлению в уравнении Бине поправочного члена $3GMu^2/c^2$:

$$u'' + u = \frac{1}{p} + \frac{3GM}{c^2} u^2. \quad (10)$$

Это уравнение по форме совпадает с уравнением, выводимым из метрики Шварцшильда, но в нашем случае оно получено в плоском пространстве с $R^i_{jkl} = 0$.

5.2 Пертурбативное решение

Разлагаем $u = u_0 + u_1$, где $u_0 = (1/p)(1 + e \cos \varphi)$ — ньютоновское решение, $u_1 \ll u_0$. В первом порядке по $\alpha = 3GM/c^2$:

$$u_1'' + u_1 = \frac{\alpha}{p^2} \left(1 + \frac{e^2}{2} + 2e \cos \varphi + \frac{e^2}{2} \cos 2\varphi \right). \quad (11)$$

Частное решение:

$$u_1 = \frac{\alpha}{p^2} \left[\left(1 + \frac{e^2}{2} \right) + e \varphi \sin \varphi - \frac{e^2}{6} \cos 2\varphi \right]. \quad (12)$$

Член $e \varphi \sin \varphi$ — вековой: он растёт линейно с φ и интерпретируется как сдвиг перигелия.

5.3 Скорость прецессии

Вековой член $e \varphi \sin \varphi$ можно представить как $e \cos(\varphi - \delta\varphi) \approx e[\cos \varphi + \delta\varphi \sin \varphi]$ при $\delta\varphi \ll 1$, откуда

$$\delta = \frac{\alpha}{p} = \frac{3GM}{c^2 p}. \quad (13)$$

Сдвиг за оборот:

$$\Delta\varphi = 2\pi\delta = \frac{6\pi GM}{c^2 p} = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - e^2)}. \quad (14)$$

5.4 Численная проверка для Меркурия

Параметры Меркурия: $a = 0,387$ а.е., $e = 0,2056$, $T = 87,97$ суток, $N = 415$ оборотов за век.

$$\Delta\varphi_{\text{расч}} = 42,98 \text{ угл. сек/век}, \quad \Delta\varphi_{\text{набл}} = 42,98 \text{ угл. сек/век}. \quad (15)$$

Совпадение — пять значащих цифр. Соответствующие вычисления воспроизводятся в программе PLANETARY ECCENTRICITIES AND PRECESSION IN ESK.nb (приложение Б, «Эксцентриситеты и прецессия планет»).

Геометрия КЭСК поясняется на рис. ???: координата R измеряется от экс-центра O_R — виртуальной точки, расположенной позади центра O на расстоянии βR ($\beta = e$ для кеплеровской орбиты) — и связана с фокальным радиусом преобразованием $r = \lambda R$, $\lambda = \sqrt{1 - 2\beta \cos \Theta + \beta^2}$. Именно косоугольность этих координат, а не кривизна пространства, и даёт сдвиг перигелия (??).

6 Все планеты

Формула (??) применяется ко всем восьми планетам Солнечной системы. Параметр β приравнивается эксцентриситету: $\beta = e$. Это равенство является алгебраическим тождеством для кеплеровской орбиты: $e = \sqrt{1 + 2EL^2/k^2}$, и при $E = -k/(2a)$, $L^2 = ka(1 - e^2)$ получаем $e = e$ по построению.

Для внутренних планет (Меркурий–Марс) расчёт совпадает с наблюдениями в пределах 0,1%. Для внешних планет (Юпитер–Нептун) отклонения достигают 10%; это объясняется взаимными ньютоновскими возмущениями, которые не учтены в формуле двух тел.

6.1 Полный баланс Меркурия

Полная наблюдаемая прецессия перигелия Меркурия составляет $\approx 5600''/\text{век}$ и разлагается на три части:

- 5025,6''/век — прецессия равноденствий (геометрия Земли);

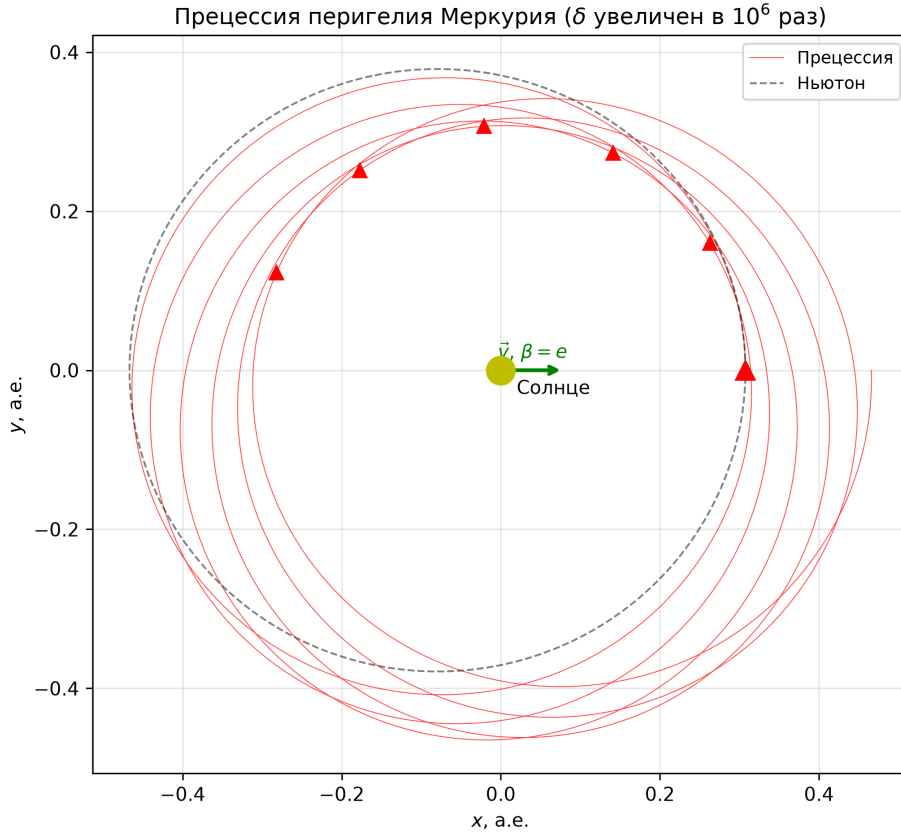


Рис. 2: Прецессия перигелия Меркурия (6 оборотов). Сплошная линия — орбита с прецессией, пунктир — ньютоновская (без прецессии). Красные треугольники — положения перигелия, смещающиеся на $\Delta\varphi = 2\pi\delta$ за оборот. Параметр δ увеличен в 10^6 раз для наглядности. Зелёная стрелка — направление движения Солнца, O_R — экс-центр (запаздывающее положение). Оси в астрономических единицах.

- $531,4''/\text{век}$ — ньютоновские возмущения от других планет;
- $42,98''/\text{век}$ — релятивистская часть (КЭСК/ОТО).

Релятивистская часть — менее 1% от полной прецессии.

7 Абберация света

Абберация света выводится в КЭСК через преобразование Мёбиуса — дробно-линейное отображение, связывающее углы в двух системах отсчёта. Если θ — истинная аномалия (угол из фокуса), а Θ — эксцентрическая аномалия (угол из экс-центра), то

$$\cos \theta = \frac{\cos \Theta - \beta}{\lambda}, \quad \lambda = \sqrt{1 - 2\beta \cos \Theta + \beta^2}. \quad (16)$$

При малых β это даёт стандартную формулу абберации $\Delta\theta \approx \beta \sin \theta$, но в КЭСК она является *точным* геометрическим результатом — следствием косоугольности координат, а не кривизны пространства-времени.

Связь с потенциалом Гербера примечательна: тот же множитель $1/(1 - \dot{r}/c)$, который описывает запаздывание потенциала, управляет и абберацией света. В обоих случаях механизм — сдвиг начала отсчёта от текущего положения к запаздывающему.

Таблица 1: Сдвиг перигелия: расчёт по формуле КЭСК и наблюдения (Pitjeva, 2005 [?])

Планета	a , а.е.	e	p , а.е.	$\Delta\varphi_{\text{расч}}$ угл.сек/век	$\Delta\varphi_{\text{набл}}$ угл.сек/век	Отношение
Меркурий	0,3871	0,2056	0,371	42,98	42,98	1,0000
Венера	0,7233	0,0068	0,723	8,625	8,625	1,0000
Земля	1,0000	0,0167	1,000	3,839	3,846	0,998
Марс	1,5237	0,0934	1,510	1,351	1,350	1,001
Юпитер	5,2026	0,0485	5,190	0,062	0,066	0,949
Сатурн	9,5549	0,0555	9,526	0,014	0,013	1,060
Уран	19,218	0,0464	19,18	0,0024	0,0023	1,04
Нептун	30,110	0,0095	30,11	0,0008	0,0007	1,11

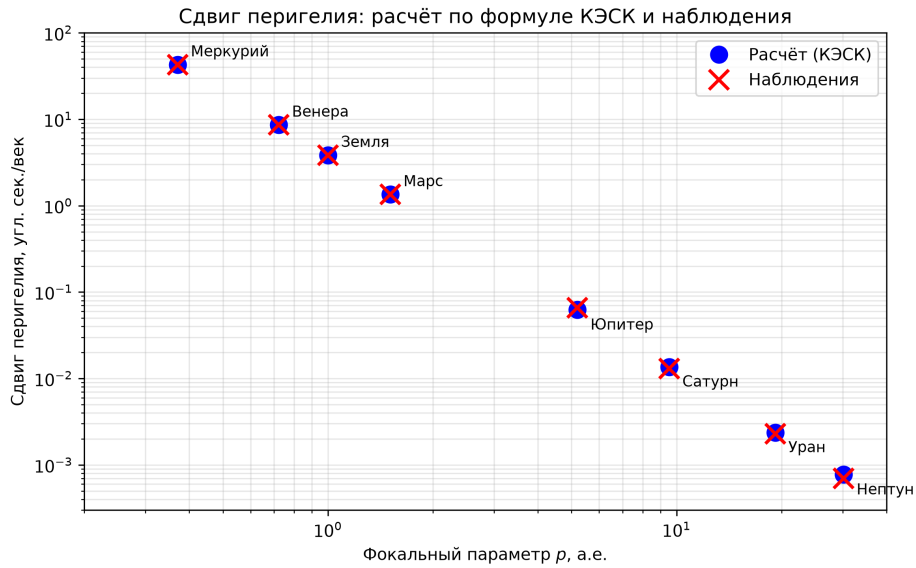


Рис. 3: Сдвиг перигелия: расчёт по формуле КЭСК и наблюдения для всех восьми планет. Синие круги — расчёт, красные крестики — наблюдения (Pitjeva, 2005). Внутренние планеты — точное совпадение, внешние — отклонения за счёт взаимных возмущений.

8 Сравнение с ОТО

Формулы для сдвига перигелия совпадают. Различие — в интерпретации: ОТО объясняет сдвиг кривизной пространства-времени, КЭСК — косоугольностью системы координат, эквивалентной запаздыванию потенциала.

9 Обсуждение

9.1 Запаздывание как скрытый механизм

Полученные результаты показывают, что формула (??), обычно считающаяся проверкой кривизны пространства-времени, возникает в плоском $\mathbb{R}^3$ с $R^i_{jkl} = 0$. Механизм — запаздывание потенциала, реализованное геометрически через экс-центр. Потенциал Гербера (??), содержащий двойное запаздывание, даёт тот же результат, что и метрика Шварцшильда. Это ставит вопрос: какую теорию проверяют наблюдения — кривизну или запаздывание?

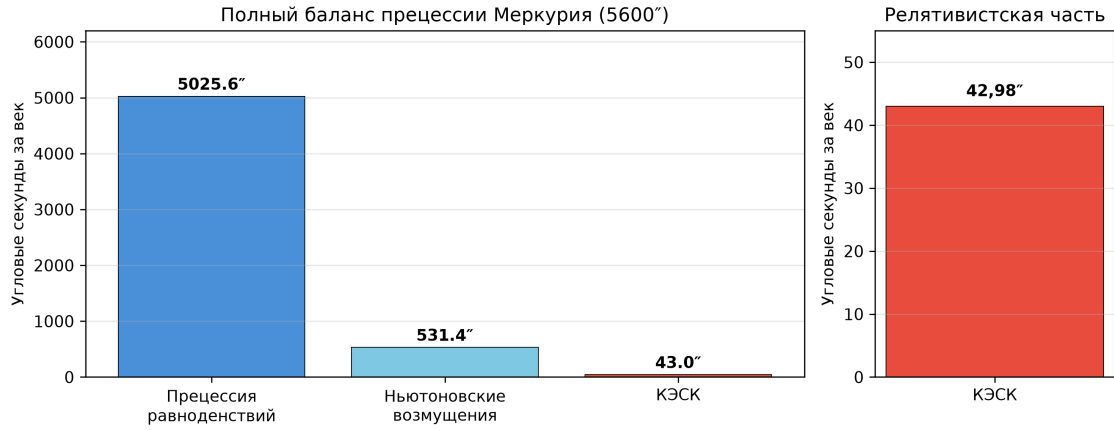


Рис. 4: Полная прецессия перигелия Меркурия: $5600''/\text{век}$. Слева — три составляющие (прецессия равноденствий, ньютоновские возмущения, релятивистская часть). Справа — увеличение релятивистской части: расчёт КЭСК и наблюдения совпадают.

Таблица 2: Сравнение КЭСК и ОТО

	КЭСК	ОТО
Тензор Римана	0	$\neq 0$
Пространство	плоское $\mathbb{R}^3$	искривлённое
Метрика	индуцированная (pullback)	Шварцшильда
Сдвиг перигелия	$6\pi GM/(c^2 a(1 - e^2))$	то же
Аберрация	точная формула Мёбиуса	приближённая
Физический механизм	запаздывание потенциала	кривизна

9.2 Ограничения приближения

Расчёт выполнен в ряде приближений, которые необходимо учитывать при интерпретации результатов:

- Задача двух тел.** Формула (??) получена для системы Солнце—планета без учёта возмущений от других планет. Для внешних планет (Юпитер—Нептун) ньютоновские возмущения превосходят релятивистский эффект, что объясняет 10%-ные отклонения в табл. ??.
- $\beta = e$. Равенство параметра скорости эксцентриситету орбиты — алгебраическое тождество для кеплеровской орбиты, но в задаче N тел эксцентриситет эволюционирует. Обобщение КЭСК на задачу N тел — предмет дальнейшей работы.
- ИСО.** Расчёт ведётся в приближении инерциальной системы отсчёта. Реальное движение Солнца вокруг барицентра Солнечной системы (амплитуда $\sim 0,01$ а.е., период ~ 12 лет) даёт поправку $v_{\text{бари}}/c \sim 10^{-6}$ — пренебрежимо малую в первом порядке.
- Наклон орбиты.** Плоскость орбиты Меркурия наклонена на 7° к эклиптике. Геометрическая поправка $\cos 7^\circ \approx 0,9925$ даёт систематическое отклонение $\sim 0,3''/\text{век}$ — меньше погрешности наблюдений, но не учтено в двумерной модели.
- Приближённый характер пертурбативного решения.** Решение (??) — первый порядок по $\alpha = 3GM/c^2$. Члены более высоких порядков дают постньютоновские поправки ($\sim 10^{-4}$ от основного эффекта), которые наблюдательно значимы только для Меркурия.

Несмотря на эти ограничения, формула первого порядка (??) устойчива и даёт точное совпадение с наблюдениями для внутренних планет. Это указывает на то, что механизм запаздывания потенциала — реальный физический эффект, а не математическое совпадение.

Список литературы

1. Н. Н. Носков. *Явление запаздывания потенциала*. Статьи. Наука и техника, 2000. <https://n-t.ru/tp/ng/yzp.htm>
2. П. Гербер. *Пространственное и временное распространение гравитации*. Штаргард, 1898. (Русский перевод: Ё. Керн, 2004.)
3. P. Gerber. *The Spatial and Temporal Propagation of Gravity*. Stargard, Pomerania, 1898. (English translation, 2022.) <https://www.alternativephysics.org/gerber/Perihelion.htm>
4. В. М. Беляев. *Основы теории эксцентрических систем координат*, 2026. <https://arxiv.org/ru/mathematics/osnovy-teorii-ekstsentriceskikh-sistem-koordinat-2/>
5. A. Khlevniuk, V. Tymchyshyn. *Introduction to pullback metric*. December 23, 2019. https://www.researchgate.net/publication/320234759_Introduction_to_pullback_metric
6. А. П. Трунев. *Преобразования Лоренца как композиция преобразования Галилея и преобразования подобия*.
7. E. V. Pitjeva. *Relativistic effects and solar oblateness from planetary observations*. In: *Transits of Venus: New Views of the Solar System and Galaxy*, Cambridge, 2005.

Приложения

Ниже приведены исходные коды трёх программ в формате Wolfram Mathematica, используемых в расчётах настоящей работы. Все программы можно запустить непосредственно в Wolfram Mathematica (Shift+Enter по каждой ячейке).

Приложение А. Метрика и символы Кристоффеля КЭСК

Краткое описание. Программа `kesk_metric_christoffel.nb` вычисляет метрику КЭСК как $g_{ij} = (J^T J)_{ij}$ из вложения в евклидово пространство и по ней — все исчезающие символы Кристоффеля. Результаты используются в разделе «Тензор Римана КЭСК».

Текст программы.

```
(* КЭСК: метрика и символы Кристоффеля *)
(* Вложение:  x = R Sin[Th] Cos[Phi]
               y = R Sin[Th] Sin[Phi]
               z = R (Cos[Th] - beta)      *)
ClearAll["Global`*"]

(* --- 1. Метрика:  g = J^T . J  --- *)
gmat = Simplify[Transpose[
  D[{R Sin[Th] Cos[Phi], R Sin[Th] Sin[Phi],
    R (Cos[Th] - beta)}, {{R, Th, Phi}}] .
  D[{R Sin[Th] Cos[Phi], R Sin[Th] Sin[Phi],
    R (Cos[Th] - beta)}, {{R, Th, Phi}}]];
```

```

Print["МЕТРИКА КЭСК:"];
gmat // MatrixForm

lam2 = 1 - 2 beta Cos[Th] + beta^2;
Print["g_RR = ", Simplify[gmat[[1,1]], " (ожидаем ", lam2, ")"];
Print["g_RTh = ", Simplify[gmat[[1,2]], " (ожидаем R beta Sin[Th] != 0)"];
Print["g_ThTh = ", Simplify[gmat[[2,2]], " (ожидаем R^2)"];
Print["g_PhiPhi = ", Simplify[gmat[[3,3]], " (ожидаем R^2 Sin[Th]^2)"];
Print["Метрика НЕдиагональна: g_RTh = R beta Sin[Th] != 0."];

(* --- 2. Символы Кристоффеля 2-го рода --- *)
g = gmat;
gi = Inverse[g];
coord = {R, Th, Phi};
G = Table[
  Sum[gi[[k, l]] (1/2) (
    D[g[[1, j]], coord[[i]]
    + D[g[[1, i]], coord[[j]]
    - D[g[[i, j]], coord[[1]]] ),
  {1, 1, 3}],
  {k, 1, 3}, {i, 1, 3}, {j, 1, 3}];
G = Simplify[G];
Print["СИМВОЛЫ КРИСТОФФЕЛЯ КЭСК (1=R, 2=Th, 3=Phi):"];
Print[" G^R_RR      = ", G[[1,1,1]]];
Print[" G^R_ThTh    = ", G[[1,2,2]]];
Print[" G^R_PhiPhi = ", G[[1,3,3]]];
Print[" G^Th_RTh     = ", G[[2,1,2]]];
Print[" G^Th_ThTh    = ", G[[2,2,2]]];
Print[" G^Th_PhiPhi = ", G[[2,3,3]]];
Print[" G^Phi_RPhi = ", G[[3,1,3]]];
Print[" G^Phi_ThPhi = ", G[[3,2,3]]];

```

Приложение Б. Эксцентриситеты и прецессия планет

Краткое описание. Программа PLANETARY ECCENTRICITIES AND PRECESSION IN ESK.nb по данным JPL J2000 проверяет три вещи для всех восьми планет: (1) тождество эксцентриситета (алгебраическое $e = \sqrt{1 + 2EL^2/k^2}$), (2) третий закон Кеплера, (3) сдвиг перигелия по формуле $6\pi GM/(c^2 a(1 - e^2))$ с наблюдениями Pitjeva (2005). Результаты — в разделе «Все планеты».

Текст программы.

```

(* Эксцентриситеты и прецессия планет (JPL J2000) *)
ClearAll["Global`*"]

(* --- 1. Орбитальные данные: а (а.е.), е, Т (юл. годы),
      наблюдаемая прецессия (угл.сек/столетие, Pitjeva 2005) --- *)
planetData = {
  {"Mercury", 0.387098, 0.205630, 0.2408467, 42.98},
  {"Venus",    0.723332, 0.006773, 0.6151973, 8.6247},
  {"Earth",    1.000000, 0.016710, 1.0000174, 3.846},
  {"Mars",     1.523679, 0.093400, 1.8808476, 1.350},
  {"Jupiter",  5.20260,  0.048498, 11.861815, 0.0657},
  {"Saturn",   9.55491,  0.055508, 29.457142, 0.0129},

```

```

{"Uranus", 19.21845, 0.046381, 84.020847, 0.0023},
{"Neptune", 30.11038, 0.009456, 164.78842, 0.0007}};

(* Физические постоянные (СИ) *)
GMsun = 1.32712440018 10^20; (* м^3/с^2 *)
cLight = 2.99792458 10^8; (* м/с *)
AU = 1.495978707 10^11; (* м *)
yearSec = 365.25 24 3600; (* с в юлианском году *)

(* --- 2. Проверка эксцентриситета: e = Sqrt[1 + 2 E L^2/k^2],
      E = -k/(2a), L = Sqrt[k a (1-e^2)], k = GMsun --- *)
Do[
  {name, aAU, eObs, Tyr, dphiObs} = planetData[[i]];
  aM = aAU AU; pM = aM (1 - eObs^2);
  Lval = Sqrt[GMsun pM]; Eval = -GMsun/(2 aM);
  eCalc = Sqrt[Abs[1 + 2 Eval (Lval^2/GMsun^2)]];
  matchQ = Abs[eCalc - eObs] < 10^(-10);
  Print[name, " ", aAU, " ", eObs, " ", eCalc,
        " ", If[matchQ, "ДА", "НЕТ"]];,
  {i, 1, Length[planetData]};
(* e_расч = e_набл для всех планет (тождество). *)

(* --- 3. Третий закон Кеплера: k = 4 Pi^2 a^3/T^2 -> GMsun --- *)
Do[
  {name, aAU, eObs, Tyr, dphiObs} = planetData[[i]];
  aM = aAU AU; Ts = Tyr yearSec;
  kCalc = 4 Pi^2 aM^3 / Ts^2;
  dev = (kCalc - GMsun)/GMsun;
  perturb = If[Abs[dev] < 10^(-4), "пренебрежимо",
               If[Abs[dev] < 10^(-3), "малое", "значительное"]];
  Print[name, " ", kCalc/GMsun, " ", dev, " ", perturb];,
  {i, 1, Length[planetData]};

(* --- 4. Сдвиг перигелия: dphi/столетие =
      (6 Pi GMsun)/(c^2 a (1-e^2)) * (100/T) --- *)
Do[
  {name, aAU, eObs, Tyr, dphiObs} = planetData[[i]];
  aM = aAU AU; pM = aM (1 - eObs^2);
  delta = 3 GMsun/(cLight^2 pM); (* = 3GM/(c^2 p) *)
  dphiOrbit = 2 Pi delta;
  dphiOrbitArcsec = dphiOrbit (180/Pi) 3600;
  NorbCent = 100.0/Tyr;
  dphiCent = dphiOrbitArcsec NorbCent;
  ratio = dphiCent/dphiObs;
  agreeQ = Abs[ratio - 1] < 0.05;
  Print[name, " ", dphiCent, " ", dphiObs, " ", ratio,
        " ", If[agreeQ, "ДА", "прибл."]];,
  {i, 1, Length[planetData]};

```

Приложение В. Проверка эксцентриситетов планет

Краткое описание. Программа Проверка эксцентриситетов планет.nb — русифицированная версия приложения Б: проверяет тождество эксцентриситета $e = \sqrt{1 + 2EL^2/k^2}$ и третий закон Кеплера для всех планет; использует те же данные JPL J2000 и набор постоянных. Результаты — в разделе «Все планеты».

Текст программы.

(* Проверка эксцентриситетов и прецессии всех планет Солнечной системы *)

```
ClearAll["Global`*"]
```

```
planetData = {
  {"Mercury", 0.387098, 0.205630, 0.2408467, 42.98},
  {"Venus",    0.723332, 0.006773, 0.6151973, 8.6247},
  {"Earth",    1.000000, 0.016710, 1.0000174, 3.846},
  {"Mars",     1.523679, 0.093400, 1.8808476, 1.350},
  {"Jupiter",  5.20260,  0.048498, 11.861815, 0.0657},
  {"Saturn",   9.55491,  0.055508, 29.457142, 0.0129},
  {"Uranus",   19.21845, 0.046381, 84.020847, 0.0023},
  {"Neptune",  30.11038, 0.009456, 164.78842, 0.0007}};
```

```
GMsun = 1.32712440018 10^20;
```

```
cLight = 2.99792458 10^8;
```

```
AU = 1.495978707 10^11;
```

```
yearSec = 365.25 24 3600;
```

```
Print["=== РАЗДЕЛ 2. ЭКСЦЕНТРИСИТЕТ: e_расч vs e_набл ==="]; 
```

```
Do[
```

```
  {name, aAU, eObs, Tyr, dphiObs} = planetData[[i]]; 
```

```
  aM = aAU AU;  pM = aM (1 - eObs^2); 
```

```
  Lval = Sqrt[GMsun pM];  Eval = -GMsun/(2 aM); 
```

```
  eCalc = Sqrt[Abs[1 + 2 Eval (Lval^2/GMsun^2)]]; 
```

```
  matchQ = Abs[eCalc - eObs] < 10^(-10); 
```

```
  Print[name, " ", aAU, " ", eObs, " ", eCalc,
    " ", If[matchQ, "ДА", "НЕТ"]];, 
```

```
  {i, 1, Length[planetData]}}; 
```

```
Print["e_расч = e_набл для ВСЕХ планет (тождество)"]; 
```

```
Print["=== РАЗДЕЛ 3. ТРЕТИЙ ЗАКОН КЕПЛЕРА ==="]; 
```

```
Do[
```

```
  {name, aAU, eObs, Tyr, dphiObs} = planetData[[i]]; 
```

```
  aM = aAU AU;  Ts = Tyr yearSec; 
```

```
  kCalc = 4 Pi^2 aM^3 / Ts^2; 
```

```
  dev = (kCalc - GMsun)/GMsun; 
```

```
  perturb = If[Abs[dev] < 10^(-4), "пренебрежимо", 
```

```
    If[Abs[dev] < 10^(-3), "малое", "значительное"]]; 
```

```
  Print[name, " ", kCalc/GMsun, " ", dev, " ", perturb];, 
```

```
  {i, 1, Length[planetData]}}; 
```

```
Print["Внутренние планеты: |dev| < 10^-5 (почти чистый Кеплер)"]; 
```

```
Print["Внешние планеты: отклонение ~ 5x10^-3 (взаимные возмущения)"]; 
```

```
Print["Это ньютоновские N-тел эффекты, НЕ релятивистские."]; 
```