Структура простых чисел k-стойких двоичных палиндромов

Георгий Гуляев

22 ноября 2026 г.

1. Введение

В работе [1] было введено понятие реверсивно-устойчивой последовательности натуральных чисел a_n, как последовательности, для которой рациональное отношение $\frac{\text{rev}(a_n)}{a_n}$ постоянно и не зависит от $n \in \mathbb{N}$.

Здесь $\text{rev}(n)$ обозначает функцию реверса, которая каждому натуральному числу n ставит в соответствие натуральное число $\text{rev}(n)$ с обратным порядком цифр в его десятичной записи по отношению к a_n. Например, $\text{rev}(2051) = 1502$ и $\text{rev}(3700) = 73$ (лидирующие нули исчезают).

Определение 1. *Числом - палиндромом называется натуральное число n, для которого выполняется условие* $\text{rev}(n) = n$.

Рассмотрим все палиндромы, десятичная запись которых содержит только две цифры 1 и 0.

```
P = {1, 11, 101, 111, 1001, 1111, 10001, 10101, 11011, 11111,
100001, 101101, 110011, 111111, 1000001, 1001001, 1010101,
1011101, 1100011, 1101011, 1110111, 1111111, 10000001, 10011001,
10100101, 10111101, 11000011, 11011011, 11100111, 11111111,
100000001, 100010001, 100101001,...}
```

Будем называть такие палиндромы **двоичными палиндромами**, хотя рассматривать их будем в десятичной системе счисления.

Определение 2. *Будем называть двоичный палиндром k-стойким, если при умножении на натуральное число k, он остается двоичным палиндромом. Множество всех k-стойких палиндромов будем обозначать через* P_k.

Важную роль при построении реверсивно-устойчивых последовательностей в работе [1] играет множество 91-стойких двоичных палиндромов

```
P91 = {11, 111, 1111, 11111, 110011, 111111, 1100011, 1111111,
11000011, 11100111, 11111111, 110000011, 111000111, 111111111,
1100000011, 1100110011, 1110000111, 1111001111, 1111111111,
11000000011, 11001110011, 11100000111, 11110001111, 11111111111,
110000000011, 110001100011,...},
```

то есть чисел-палиндромов, в десятичной записи которых используются только две цифры 0 и 1 и при умножении на 91 они остаются двоичными палиндромами.

$$P_{91} \cdot 91 = \{1001, 10101, 101101, 1011101, 10011001, 10111101, 100101001, ...\}$$

Альтернативное определение P_{91} (смотри [3] или A061851) - это множество палиндромов из нулей и единиц, не содержащие отдельных единиц или нулей. В работе [1] (теорема 1) доказана эквивалентность этих определений.

В работе [2] было доказано, что множества $A_m = \{n = m{\cdot}k : gcd\ (\mathrm{rev}(n), n) = k,\ \forall\ k \in \mathbb{N}\}$ состоят из объединения непересекающихся реверсивно-устойчивых последовательностей.

В настоящей работе мы продолжим исследование реверсивно-устойчивых последовательностей начатое в [1-2] и изучим структуру простых множителей множества P_{91} и других множеств k-стойких двоичных палиндромов.

Основные результаты работы: критерий k-стойкости через множества разностей D_k (лемма 1); классификация первых элементов P_k (теорема 1); семейства совпадений F_u (теорема 2); алгебраическая структура многочленов цифр и циклотомические разложения (теорема 4); асимптотика плотности k-стойких палиндромов (параграф 6).

2. Критерий k-стойкости

Определение 3. *Репьюнитами* $R_n = \underbrace{11\ldots1}_{n} = \dfrac{10^n-1}{9}$ *будем называть палиндромы десятичная запись которых содержит только одни единицы.*

Определение 4. *Биюнитами* $B_n = 1\underbrace{00\ldots0}_{n-1}1 = 10^n + 1$ *(при* $n \geq 1$*) будем называть палиндромы, десятичная запись которых начинается и заканчивается единицей, а все остальные разряды заполнены нулями.*

Из определения, в частности, следует, что $B_1 = R_2 = 11$.

Количество и процент k-стойких из тридцати миллионов первых двоичных палиндромов, для $k \leq 1000001$, приведено в таблице:

k	всего	%
1	30000000	100
11	231837	0.7728
91	150048	0.5002
101	220594	0.7353
111	23175	0.0773
1001	242783	0.8093
1111	5362	0.0179
9091	75330	0.2511
9191	1578	0.0053
9901	148536	0.4951
10001	235727	0.7858
10101	23091	0.0770
11011	1940	0.0065
11111	1940	0.0065
91091	519	0.0017
100001	279467	0.9316
101101	2584	0.0086
108911	1890	0.0063
110011	2867	0.0096
111111	929	0.0031
900991	16652	0.0555

```
  909091|   59230 | 0.1974
  910091|    2485 | 0.0083
  918191|    1064 | 0.0035
  919191|     407 | 0.0014
  990901|    1430 | 0.0048
  991901|     156 | 0.0005
  999001|  162879 | 0.5429
 1000001|  271916 | 0.9064
```

Для всех остальных $1 \le k \le 1000001$ не нашлось ни одного k-стойкого в списке из $3 \cdot 10^7$ первых двоичных палиндромов. Отметим, что в таблице шесть простых k (из 28): $11, 101, 9091, 9901, 909091, 991901$ и ровно половина из них (14 из 28) сами являются двоичными палиндромами.

Таким образом, среди k есть двоичные палиндромы (репьюниты и биюниты в наблюдаемых данных содержатся все), а все другие содержат в своей записи кроме нулей и единиц девятки и иногда восьмерки.

Отметим еще равенство результатов для $k = 11011$ и $k = 11111$. Для формулировок и доказательств следующих далее утверждений нам потребуется ввести ряд обозначений.

Через I_a обозначим возрастающие индексы единиц в десятичной записи двоичного палиндрома a длины l_a:

$$I_a = \{i_1 = 1, i_2 \cdots, i_{m-1}, i_m = l_a\},$$

а через D_a множества всех попарных расстояний между единицами

$$D_a = \{i_s - i_r : 1 \le r < s \le m\} \subseteq \{1, \ldots, l_a - 1\}.$$

Пример: $a = 11011,\ b = 11111,\ I_a = \{1, 2, 4, 5\},\ I_b = \{1, 2, 3, 4, 5\};\ D_a = D_b = \{1, 2, 3, 4\}$.

Лемма 1. *Пусть $a \in P,\ b \in P$ — двоичные палиндромы длины l_a и l_b, соответственно. Тогда, произведение a на b будет двоичным палиндромом тогда и только тогда, когда D_a и D_b не пересекаются, то есть*

$$a \cdot b \in P \iff D_a \cap D_b = \varnothing.$$

Доказательство. По условию теоремы

$$a = \sum_{i \in I_a} 10^{i-1} = \sum_{i \in I_a} 10^{l_a - i}, \qquad b = \sum_{j \in I_b} 10^{j-1} = \sum_{j \in I_b} 10^{l_b - j}.$$

Тогда

$$ab = \sum_{(i,j)\in I_a\times I_b} 10^{(i-1)+(j-1)} = \sum_{(i,j)\in I_a\times I_b} 10^{(l_a-i)+(l_b-j)}.$$

Докажем, что двоичность ab равносильна $D_a \cap D_b = \varnothing$.

Если $D_a \cap D_b = \varnothing$, то все показатели степеней $i-1+j-1$ будут различными. Действительно,

$$(i-1)+(j-1) = (i'-1)+(j'-1) \iff i-i' = j'-j \iff D_a \cap D_b \neq \varnothing.$$

Таким образом, десятичная запись ab состоит из нулей и единиц.

Обратно, если ab двоично, то все показатели $i-1+j-1$ должны быть различными (представление ab в виде сумм десятых степеней единственно), следовательно

$$(i-1)+(j-1) \neq (i'-1)+(j'-1) \iff i-i' \neq j'-j \iff D_a \cap D_b = \varnothing.$$

Палиндромность ab теперь автоматически следует из симметрии: отображение $(i,j) \mapsto (l_a+1-i,\ l_b+1-j)$ переводит показатель α в $\beta-\alpha$, где $\beta = l_a+l_b-2$, поэтому множество показателей симметрично, а старший коэффициент (при $i=j=1$) равен 1. Значит ab — двоичный палиндром. Лемма доказана.

Следствие 1. *Для двоичного палиндрома k*

$$P_k = \{x \in P : D_k \cap D_x = \varnothing\}.$$

Доказательство. $x \in P_k \iff kx \in P \iff D_k \cap D_x = \varnothing$.

Следствие 2. *Для любого двоичного палиндрома k все биюниты B_n, $n \geq 1$ принадлежат P_k за исключением тех, для которых n принадлежит D_k. То есть,*

$$B_n \in P_k \iff n \notin D_k.$$

Доказательство: $D_{B_n} = \{n\}$, поэтому $B_n \in P_k \iff D_{B_n} \cap D_k = \varnothing \iff n \notin D_k$.

Следствие 3. $P_{k_1} = P_{k_2} \iff D_{k_1} = D_{k_2}$.

Доказательство. Пусть $P_{k_1} = P_{k_2} = Q$. По следствию 1, $\forall x \in Q \iff D_{k_1} \cap D_x = \varnothing$ и $D_{k_2} \cap D_x = \varnothing$. В частности, для любого $d \geq 1$ палиндром

$x_d = 10^d + 1$ имеет $D_{x_d} = \{d\}$ и принадлежит $P_{k_1} \iff d \notin D_{k_1}$, и аналогично для k_2. Значит $d \in D_{k_1} \iff d \in D_{k_2}$ для всех d, то есть $D_{k_1} = D_{k_2}$.

В приведенном выше примере: $a = 11011$, $b = 11111$, $D_a = D_b = \{1, 2, 3, 4\}$. Значит $P_{11011} = P_{11111}$.

Следствие 4. $k_1 k_2 \in P \iff D_{k_1} \cap D_{k_2} = \varnothing$, *то есть произведение двоичных палиндромов есть двоичный палиндром тогда и только тогда, когда их D-множества не пересекаются.*

Программа на языке Julia для генерации любых множеств P_k:

```
function getpal(n,k)
  function ok(p)
    b = digits(k*p)
    for x in b if x > 1 return false end end
    b == reverse(b)
  end
  res = Vector{BigInt}()
  for i in 1:n
    s = string(i,base=2)
    p0 = parse(BigInt, string(s,reverse(s)))
    p1 = parse(BigInt, string(s,0,reverse(s)))
    p2 = parse(BigInt, string(s,1,reverse(s)))
    if ok(p0) push!(res,p0) end
    if ok(p1) push!(res,p1) end
    if ok(p2) push!(res,p2) end
  end
  sort!(res)
end
# Примеры:
# P = getpal(10^6,1)
# P91 = getpal(10^6,91)
```

3. Круговые многочлены и циклотомические значения

В этом разделе собраны известные [5] определения и свойства круговых или циклотомических многочленов, необходимые для формулирования утверждений о структуре простых делителей элементов множеств P_k.

Определение 5. *Корнем из единицы степени n называется комплексное число ζ такое, что $\zeta^n = 1$. Корень называется* ***первообразным*** *корнем степени n, если $\zeta^k \neq 1$ при $1 \leq k < n$.*

Множество всех корней степени n образует циклическую группу порядка n относительно умножения; первообразные корни — это её образующие. Их количество равно значению функции Эйлера $\varphi(n)$.

Определение 6. *n-м* ***круговым или циклотомическим многочленом*** *называется многочлен*

$$\Phi_n(x) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \gcd(k,n)=1}} \left(x - \zeta_n^k\right), \tag{1}$$

где произведение берётся по всем первообразным корням степени n (через ζ_n обозначен любой фиксированный первообразный корень).

Степень многочлена $\Phi_n(x)$ равна $\varphi(n)$. Многочлен $\Phi_n(x)$ имеет целые коэффициенты и неприводим над $\mathbb{Q}$ (это классическая теорема Гаусса). Первые круговые многочлены имеют вид:

$$\Phi_1(x) = x - 1, \qquad \Phi_2(x) = x + 1, \qquad \Phi_3(x) = x^2 + x + 1,$$

$$\Phi_4(x) = x^2 + 1, \qquad \Phi_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \qquad \Phi_6(x) = x^2 - x + 1.$$

Основное тождество. Имеет место разложение

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x). \tag{2}$$

Следствие 5 (формула обращения). Из (2) следует явное выражение

$$\Phi_n(x) = \prod_{d|n} \left(x^d - 1\right)^{\mu(n/d)}, \tag{3}$$

где μ — функция Мёбиуса: $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = 0$, если n делится на квадрат простого, и $\mu(n) = (-1)^k$, если n — произведение k различных простых.

Определение 7. ***Циклотомическим значением*** *порядка d будем называть натуральное число*

$$\Phi_d(10) = \prod_{e|d} \left(10^e - 1\right)^{\mu(d/e)}, \tag{4}$$

то есть значение циклотомического многочлена $\Phi_d(x)$ *в точке* $x = 10$.

Первые циклотомические значения:

$\Phi_2(10) = 11,$	$\Phi_3(10) = 111 = 3 \cdot 37,$	$\Phi_4(10) = 101,$
$\Phi_6(10) = 91 = 7 \cdot 13,$	$\Phi_8(10) = 10001 = 73 \cdot 137,$	$\Phi_{10}(10) = 9091,$
$\Phi_{12}(10) = 9901,$	$\Phi_{14}(10) = 909091,$	$\Phi_{16}(10) = 17 \cdot 5882353,$
$\Phi_{18}(10) = 999001 = 19 \cdot 52579,$	$\Phi_{20}(10) = 3541 \cdot 27961,$	$\Phi_{22}(10) = 9090909091.$

Среди чисел $\Phi_d(10)$ есть двоичные палиндромы (репьюниты, биюниты и некоторые другие), а также много чисел не являющихся палиндромами, которые содержат в своей десятичной записи кроме нулей и единиц девятки и иногда восьмерки.

Лемма 2 (репьюнит-циклотомическое разложение). Для любого $n \geq 1$ репьюнит $R_n = (10^n - 1)/9$ разлагается в произведение циклотомических значений:

$$R_n = \prod_{\substack{d|n \\ d\geq 2}} \Phi_d(10). \tag{5}$$

Доказательство. Непосредственно следует из тождества (2) после деления обеих частей на $9 = \Phi_1(10)$.

Формула (5) объясняет, почему в разложениях репьюнитов из P_{91} на простые множители (см. параграф 5) систематически появляются одни и те же числа: это простые делители $\Phi_d(10)$.

Для вычисления коэффициентов круговых многочленов можно использовать алгоритм, основанный на делении многочленов и схеме Горнера, реализованный в программе на языке Julia:

```
using Polynomials

function listp(n)
  cashe = Dict{Int64, Vector{Int64}}()
  function fill(d)
    haskey(cashe, d) && return cashe[d]
    c = zeros(Int, d + 1); c[1] = -1
    c[end] = 1 # коэфф в обратном порядке -1,...,1
    p = Polynomial(c)
    for e in 1:(d-1)
```

```
      if d % e == 0
        prev = Polynomial(reverse(fill(e))) # Рекурсия
        p, _ = divrem(p, prev) # деление с остатком
       end
    end
    cashe[d] = reverse(Int.(coeffs(p)))
  end
  for d in 1:n fill(d) end
  map(x -> x[2], sort!(collect(cashe)))
end

# Пример вычисления коэффициентов 1000 первых многочленов
# list = listp(1000)

# Вычисление циклотомических значений по коэффициентам list

function phi10(d)
  coeffs = list[d]
  res = BigInt(0)
  for c in coeffs
    res = res * 10 + c
  end
  return res
end

# phi10(2) = 11
# phi10(22) = 9090909091
```

4. Классификация первых элементов P_k

Теорема 1. *Для любого двоичного палиндрома $k > 1$:*

$$P_k[1] = B_{n_{\min}}, \qquad n_{\min} = \min\{n \geq 1 : \ n \notin D_k\}. \tag{6}$$

Доказательство. По следствию 2, $B_n \in P_k \iff n \notin D_k$. Минимальный биюнит в P_k соответствует минимальному $n \notin D_k$. Так как $B_n = 10^n + 1$ монотонно возрастает по n, то $B_{n_{\min}}$ — минимальный элемент множества P_k.

Следствие 6 (класс A). *Если* $1 \notin D_k$ *(в* k *нет подслова «11»), то* $n_{\min} = 1$ *и*

$$P_k[1] = B_1 = 11. \tag{7}$$

Следствие 7 (репьюниты). *Для* $k = R_n$ *имеем* $D_{R_n} = \{1, \ldots, n-1\}$, *поэтому* $n_{\min} = n$ *и*

$$P_{R_n}[1] = B_n = 10^n + 1. \tag{8}$$

Следствие 8 (бинарные k с «11»). *Для двоичного* k, *содержащего «11», но не являющегося репьюнитом,*

$$P_k[1] = B_{d_{\min}}, \qquad d_{\min} = \min\{d \geq 2 : \ d \notin D_k\}. \tag{9}$$

Замечание. Теорема 1 покрывает все двоичные k. Для небинарных k, содержащих дополнительно другие цифры кроме нулей и единиц, определение D_k требует обобщения через механизм переносов.

Совпадения $P_{k_1} = P_{k_2}$.

Определение 8. *Обозначим через* F_u *семейство*

$$F_u = \{k \in P : \ D_k = \{1, 2, \ldots, u\}\}$$

Теорема 2. *Все* $k \in F_u$ *имеют одно и то же множество* P_k, *а именно:*

$$P_k = \{x \in P : \text{ число нулей между единицами в } x \geq u + 1\}. \tag{10}$$

Доказательство. $D_k = \{1, \ldots, u\}$, значит $D_k \cap D_x = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $D_x \cap \{1, \ldots, u\} = \varnothing$, то есть все разности D_x больше u. Последнее равносильно тому, что все промежутки между единицами в x не меньше $u + 1$.

Наименьшие семейства.

$$F_4 = \{11011,\ 11111\}, \qquad F_6 = \{1110111,\ 1101011,\ 1111111\},$$

$$F_7 = \{11100111,\ 11011011,\ 11111111\}.$$

Следствие 9. $P_{11011} = P_{11111}$ — *единственное совпадение среди* $k \leq 10^6$. *Следующие совпадения появляются при* $k \sim 10^u$: $u = 6$ *даёт тройку,* $u = 7$ — *тоже тройку.*

5. Структура простых множителей

Рассмотрим разложения на простые множители первых элементов P_{91}:

```
1: 11 = 11
2: 111 = 3 * 37
3: 1111 = 11 * 101
4: 11111 = 41 * 271
5: 110011 = 11 * 73 * 137
6: 111111 = 3 * 7 * 11 * 13 * 37
7: 1100011 = 11^2 * 9091
8: 1111111 = 239 * 4649
9: 11000011 = 11 * 101 * 9901
10: 11100111 = 3 * 11 * 37 * 9091
11: 11111111 = 11 * 73 * 101 * 137
12: 110000011 = 11^2 * 909091
13: 111000111 = 3 * 37 * 101 * 9901
14: 111111111 = 3^2 * 37 * 333667
15: 1100000011 = 11 * 17 * 5882353
16: 1100110011 = 3 * 7 * 11 * 13 * 37 * 9901
17: 1110000111 = 3 * 11 * 37 * 909091
18: 1111001111 = 11 * 101^2 * 9901
19: 1111111111 = 11 * 41 * 271 * 9091
20: 11000000011 = 7 * 11^2 * 13 * 19 * 52579
```

Уже с первых строк видно систематическое повторение циклотомических значений $9091 = \Phi_{10}(10)$, $9901 = \Phi_{12}(10)$, $909091 = \Phi_{14}(10)$. Это — следствие циклотомической природы делителей, которую мы сформулируем ниже.

Таким образом, можно предположить, что существует набор делителей, которые будут постоянно повторяться в дальнейших разложениях. Возникает идея предвычислить по начальным элементам P_{91} список делителей и использовать его для разложения остальных элементов, постоянно пополняя этот список.

Список палиндромов, естественным образом, разбивается на фрагменты, разделяемые репьюнитами. Например, диапазоны чисел с индексами с 11 по 13 или с 14 по 18. С ростом индексов размеры фрагментов растут достаточно быстро.

Теорема 3. *Позиции репьюнитов R_n, $n \geq 4$ в последовательности P_{91} вычисляются при помощи чисел Фиббоначчи F_m по формуле*:

$$\mathrm{pos}(R_n) = \begin{cases} 3F_m + 2F_{m-1} - 2, & \text{если } n = 2m, \\ 4F_m + 2F_{m-1} - 2, & \text{если } n = 2m+1. \end{cases}$$

При этом, $R_1 \notin P_{91},\ \mathrm{pos}(R_2) = 1,\ \mathrm{pos}(R_3) = 2.$

Доказательство. Через $N(L)$ обозначим число элементов P_{91} длины L. Через $A(L)$ — число двоичных палиндромов длины L с длинами всех серий ≥ 2, начинающихся и заканчивающихся единицей (то есть $N(L) = A(L)$). Через $B(L)$ — число таких же палиндромов длины L, начинающихся и заканчивающихся нулём. Положим $A(0) = B(0) = 1$ (пустая середина).

Лемма 3. *Для $L \geq 2$*

$$A(L) = 1 + \sum_{\substack{a \geq 2 \\ L-2a \geq 2}} B(L-2a), \qquad B(L) = 1 + \sum_{\substack{b \geq 2 \\ L-2b \geq 2}} A(L-2b). \tag{11}$$

Доказательство. Всякий палиндром из P_{91} длины L либо состоит из одной серии единиц (ровно один такой: $R_L = 11\ldots1$), либо имеет вид

$$1^a\, Y\, 1^a,$$

где $a \geq 2$ — длина первой (и последней) серии единиц, а Y — палиндром длины $L-2a$, начинающийся и заканчивающийся нулём, с длинами всех серий ≥ 2. Такое представление единственно, поскольку a однозначно определяется по палиндрому. Отсюда первое равенство. Второе доказывается аналогично с заменой ролей 0 и 1.

Лемма 4. *Для всех $L \geq 2$*

$$N(L) = A(L) = F_{\lfloor L/2 \rfloor}. \tag{12}$$

Доказательство. Индукция по L. Непосредственно из (11) получаем:

$$A(2) = B(2) = 1, \quad A(3) = B(3) = 1, \quad A(4) = B(4) = 1, \quad A(5) = B(5) = 1.$$

Это совпадает с $F_1 = F_2 = 1$. Предположим, что $A(k) = B(k) = F_{\lfloor k/2 \rfloor}$ для всех $k < L$. Покажем, что $A(L) = F_{\lfloor L/2 \rfloor}$.

Пусть $L = 2m$. Тогда из (11):

$$A(2m) = 1 + \sum_{a=2}^{m-1} B(2m-2a) = 1 + \sum_{j=0}^{m-3} B(2j+2)$$

(мы положили $j = m-a-1$, тогда $2m-2a = 2j+2$, и a от 2 до $m-1$ соответствует j от 0 до $m-3$). По индукционному предположению $B(2j+2) = F_{j+1}$. Значит

$$A(2m) = 1 + \sum_{j=0}^{m-3} F_{j+1} = 1 + \sum_{i=1}^{m-2} F_i.$$

Используя тождество $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$, получаем

$$A(2m) = 1 + \big(F_m - 1\big) = F_m,$$

так как $F_{m+1} = F_m + F_{m-1}$ и $F_{m-1} = F_{m+1} - F_m$. Но $F_m = F_{\lfloor 2m/2 \rfloor}$. Аналогично для нечётного $L = 2m+1$:

$$A(2m+1) = 1 + \sum_{a=2}^{m} B(2m+1-2a) = 1 + \sum_{j=1}^{m-1} B(2j+1).$$

По индукции $B(2j+1) = F_j$. Значит

$$A(2m+1) = 1 + \sum_{j=1}^{m-2} F_j = 1 + (F_m - 1) = F_m = F_{\lfloor (2m+1)/2 \rfloor}.$$

Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Поскольку R_n — наибольший элемент P_{91} длины n (все цифры равны 1), его позиция в P_{91} равна общему числу элементов длины $\le n$:

$$\mathrm{pos}(R_n) = \sum_{L=2}^{n} N(L) = \sum_{L=2}^{n} F_{\lfloor L/2 \rfloor}.$$

Вычислим сумму. Пусть $n = 2m$. Тогда

$$\sum_{L=2}^{2m} F_{\lfloor L/2 \rfloor} = \sum_{j=1}^{m-1} \big(F_j + F_j\big) + F_m = 2\sum_{j=1}^{m-1} F_j + F_m = 2(F_{m+1} - 1) + F_m.$$

Так как $F_1 = 1,\ F_{m+1} = F_m + F_{m-1}$, получаем

$$\mathrm{pos}(R_{2m}) = 2(F_m + F_{m-1} - 1) + F_m = 3F_m + 2F_{m-1} - 2.$$

Пусть $n = 2m + 1$. Тогда

$$\mathrm{pos}(R_{2m+1}) = \mathrm{pos}(R_{2m}) + N(2m+1) = (3F_m + 2F_{m-1} - 2) + F_m = 4F_m + 2F_{m-1} - 2.$$

Это в точности формулы теоремы. Базовые случаи: $R_1 \notin P_{91}$ (длина 1 невозможна, так как серия единиц должна иметь длину ≥ 2); $R_2 = 11$ — первый элемент $P_{91},\ \mathrm{pos}(R_2) = 1;\ R_3 = 111$ — второй элемент, $\mathrm{pos}(R_3) = 2$. Теорема полностью доказана.

Определение 9. Для натурального числа $n \geq 2$ через $\mathrm{Spec}(n)$ обозначается **спектр** n — множество всех его простых делителей:

$$\mathrm{Spec}(n) = \{q \text{ простое} :\ q \mid n\}.$$

Пример. $\mathrm{Spec}(111111) = \mathrm{Spec}(3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37) = \{3, 7, 11, 13, 37\}$.

Определение 10. Для натурального числа a и простого $q \nmid a$ через $\mathrm{ord}_q(a)$ обозначается **мультипликативный порядок** a по модулю q — наименьшее натуральное $d \geq 1$, для которого

$$a^d \equiv 1 \pmod{q}.$$

По малой теореме Ферма $a^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$, поэтому $\mathrm{ord}_q(a)$ всегда делит $q - 1$. Иными словами, $\mathrm{ord}_q(a) \mid q - 1$.

Определение 11. *Для каждого двоичного палиндрома $p \in P$ поставим в стоответствие многочлен с коэффициентами из его цифр*:

$$f_p(x) = \sum_{i \in I_p} x^{i-1} \in \mathbb{Z}[x].$$

При этом, $p = f_p(10)$, $\deg f_p = L - 1$, где L — длина палиндрома p.

Многочлен f_p имеет коэффициенты $0, 1,\ f_p(1) = m$ (число единиц) и $f_p(-1) = 0$ при чётном L.

Лемма 5. *Пусть q простое, $q \nmid 10$, $d = \mathrm{ord}_q(10)$. Тогда $d \mid q - 1$, $q \mid \Phi_d(10)$ и $q \mid \Phi_e(10) \iff e = dq^j$, $j \geq 0$. В частности, при $q \nmid 10e$: $q \mid \Phi_e(10) \iff \mathrm{ord}_q(10) = e$.*

Теорема 4 (алгебраическая структура делителей). *Пусть $p \in P_k$, $L = \mathrm{len}(p)$ - длина палиндрома p. Тогда,*

(a) *Для любого простого* $q \mid p$, $q \nmid 10$, *имеем* $q \mid \Phi_d(10)$ *при* $d = \mathrm{ord}_q(10) \mid q-1$.

(b) *Если* $f_p = \prod_{i=1}^{s} g_i$ *— разложение на неприводимые над* $\mathbb{Q}$ *многочлены, то*

$$p = \prod_{i=1}^{s} g_i(10),$$

дает нетривиальное разложение p *при* $s \geq 2$ *и* $|g_i(10)| > 1$.

(c) *Если* $f_p = \prod_{d \in S} \Phi_d^{e_d}$, *где* $S = \{d \geq 2 : \Phi_d \mid f_p\}$ *— множество циклотомических индексов с ненулевой кратностью, то*

$$p = \prod_{d \in S} \Phi_d(10)^{e_d},\ p \mid 10^M - 1$$

при $M = \mathrm{lcm}(S)$, *и*

$$\mathrm{Spec}(p) \subseteq \bigcup_{d \mid M} \mathrm{Spec}\, \Phi_d(10),\ \mathrm{ord}_q(10) \mid M$$

для всех простых $q \mid p$, $q \nmid 10$. *При этом* $\varphi(d) \leq L-1$, *откуда* $d \leq \max\{n : \varphi(n) \leq L-1\}$.

Доказательство. (a) — лемма 5. (b) — подстановка $x = 10$ есть гомоморфизм $\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$. (c) — $\Phi_d(10) \mid 10^d - 1 \mid 10^M - 1$, следовательно $p \mid 10^M - 1$, что для простого $q \mid p$ равносильно $\mathrm{ord}_q(10) \mid M$; далее $\varphi(d) = \deg \Phi_d \leq \deg f_p = L - 1$.

Следствие 10. *Если* $p \in P$ *и* $L = \mathrm{len}(p)$ *чётно, то* $\Phi_2(x) = x + 1$ *делит* $f_p(x)$, *и, следовательно,* $11 \mid p$. *В частности,* f_p *может быть неприводим над* $\mathbb{Q}$ *только при нечётном* L.

Доказательство. При чётном L индексы i и $L+1-i$ имеют разную чётность, поэтому в $f_p(-1) = \sum_{i \in I_p} (-1)^{i-1}$ слагаемые попарно уничтожаются: $f_p(-1) = 0$.

Примеры:

$P_{91}[5] = 110011 = 11 \cdot 73 \cdot 137$, $L = 6$, $\mathrm{ord}_{73}(10) = 8 > 6$, $8 \nmid 12$,

$P_{91}[7] = 1100011 = 11^2 \cdot 9091$, $\mathrm{ord}_{9091}(10) = 10 > 7$,

$P_{91}[55] = 110000111000011 = 359 \cdot 373 \cdot 821466473$, $L = 15$, порядки 179, 186, 821466472, соответственно (10 — первообразный корень по модулю 821466473). Многочлен f_p неприводим над $\mathbb{Q}$.

Для $p = 111111110000000011111110000000011111111 \in P_{91}$ ($L = 39$) имеет место тождество многочленов $f_p(x) = \Phi_{23}(x)\ \Phi_{48}(x)$, откуда $p = \Phi_{23}(10) \cdot \Phi_{48}(10) = 111111111111111111111 \cdot 9999999900000001$, оба множителя простые. Здесь $M = \mathrm{lcm}(23, 48) = 1104$, $p \mid 10^{1104} - 1$, но $p \nmid 10^{78} - 1$. То есть в этом примере, если искать делитель в виде $\Phi_d(10)$, то корректный пул поиска — $\{d : \varphi(d) \le 38\}$ (71 значение, максимум 126).

Среди 2582 элементов P_{91} длин $2 \le L \le 30$: f_p — произведение циклотомических у 610 (23,6%), приводимы но не циклотомичны — 1619 (62,7%), неприводимы 353 (13,7%).

Из неприводимых 27 элементов простые, а 326 составные. Например, $P_{91}[55] = 110000111000011 = 359 \cdot 373 \cdot 821466473$ — составное при неприводимом f_p.

Следовательно, неприводимость f_p не влечёт простоты p, а алгебраическое разложение f_p оказалось применимо к 86,3% элементам на этих данных.

Пример программы для факторизации двоичных палиндромов:

```
list = listp(1000)
lphi = map(x -> phi10(x), 1:1000)
function pfactor(n)
  m = big(n); res = Dict{BigInt,Int}()
  for d in 2:length(lphi)
    v = lphi[d]
    v <= m || continue
    m % v == 0 || continue
    fd = Dict(BigInt(p) => Int(e) for (p,e) in factor(v))
    while m % v == 0
      m = div(m, v)
      for (p,e) in fd
        res[p] = get(res, p, 0) + e
      end
```

```
    end
  end
  if m > 1 # остаток - общий алгоритм
    for (p,e) in factor(m)
      res[BigInt(p)] = get(res, BigInt(p), 0) + Int(e)
    end
  end
  sort!(collect(res))
end

function fact(n) # вывод в строку
  res = string(n, " = ")
  for (p,k) in pfactor(n)
    if k>1
      res = string(res, p,"^",k," * ")
    else
      res = string(res, p," * ")
    end
  end
  res[1:end-3]
end
```

Сравнение времени разложения при помощи нашей программы и обычного factor языка Julia:

```
julia> @time fact(11111000001111100000111000001111110000011111)
  0.010975 seconds (262.42 k allocations: 6.688 MiB)
11111000001111100000111000001111110000011111 =
251 * 5051 * 78875943472201 * 1111111111111111111111

julia> @time factor(11111000001111100000111000001111110000011111)
 20.257880 seconds (579.61 M allocations: 14.611 GiB, 28.46% gc time)
251 * 5051 * 78875943472201 * 1111111111111111111111
```

6. Плотность k-стойких палиндромов

Эмпирическое наблюдение. Количество и процент k-стойких из тридцати миллионов первых двоичных палиндромов для $k \leq 1000001$ были

приведены в таблице в параграфе 2.

Если сравнить эту таблицу с таблицей из работы [1] для первых 20397 палиндромов, то мы увидим, что с ростом количества палиндромов от 20 тысяч до 30 миллионов проценты уменьшились в 7-10 раз для всех k кроме репьюнитов, а для репьюнитов уменьшение процентов в разы больше (в 20,40,70,... раз).

Из таблицы видны три режима поведения плотности.

Наблюдение. *При переходе от* $N = 2 \cdot 10^4$ *к* $N = 3 \cdot 10^7$*:*

- *для* $k = 10^m + 1$ $(|D_k| = 1)$ *плотность* ***стабилизируется*** *около* 0.8%*;*
- *для репьюнитов* R_n, $n \geq 3$ $(|D_k| \geq 2)$ *плотность* ***падает экспоненциальнo****;*
- *для небинарных* k $(91, 9091, 9901)$ *плотность занимает промежуточное положение (*$0.2 - 0.5\%$*).*

Количественная закономерность (наблюдаемая).

$$\rho_k \sim \frac{c}{|D_k|^\alpha}, \qquad \alpha \approx 1, \quad c \approx 0.8\%. \tag{13}$$

Следствие 11. P_{R_n} *содержит убывающую долю всех двоичных палиндромов, тогда как* P_{B_m} *— постоянную. Это объясняет доминирование* $k = 100001, 1000001, 101$ *в таблице.*

7. Открытые задачи

1. **Небинарные** k**.** Полная классификация небинарных k, для которых $P_k \neq \varnothing$. Эмпирически известно 14 таких $k \leq 10^6$ и все они содержат только цифры $\{0, 1, 8, 9\}$. Среди них есть простое $k = 991901$, не разложимое в произведение циклотомических значений; механизм его работы требует отдельного исследования через переносы в Φ_d.
2. **Обобщение леммы 1.** Определить D_k^{gen} для небинарных k так, чтобы $kx \in P \iff D_k^{\text{gen}} \cap D_x = \varnothing$.

3. **Плотность.** Доказать асимптотику (13) для $k = B_m$ (стабилизация) и $k = R_n$ (обнуление).

4. **Бесконечные семейства** F_u. Описать $|F_u|$ как функцию u; эмпирически $|F_4| = 2, |F_5| = 1, |F_6| = 3, |F_7| = 3, |F_8| = 5, |F_9| = 4$.

5. **Структура** $\Phi_d(10)$. Найти полную классификацию составных $\Phi_d(10)$.

Литература

[1] Гуляев Г.М., Двоичные палиндромы и реверсивно-устойчивые последовательности // ArxivOrg.Ru. — 2026. — URL: `https://arxivorg.ru/a/AX-134223`.

[2] Гуляев Г.М., Объединение реверсивно-устойчивых последовательностей // ArxivOrg.Ru. — 2026. — URL: `https://arxivorg.ru/a/AX-134971`.

[3] Webster R., Williams G. On the Trail of Reverse Divisors: 1089 and All that Follow. *Mathematical Spectrum*, 45 (2012/2013), 96–102.

[4] Sloane N.J.A. 2178 and all that. *Fibonacci Quarterly*, 52 (2014), no. 2, 99–105.

[5] Круговой многочлен [Электронный ресурс] // Wikipedia : Свободная энциклопедия. — URL: `https://en.wikipedia.org/wiki/Cyclotomic_polynomial`.

[6] OEIS A061851 — Palindromes in base 10 with only digits 0 and 1, containing no isolated 0 or 1.

[7] OEIS A072234 — Numbers n such that sum of proper divisors equals reverse of n.