Поперечные моды в конформном профиле Neff = L3D / z*: геометрическая башня, теорема о дилатации и конформная симметрия SO(2,1)

С. Г. Круковский
Мозырь, Республика Беларусь
E-mail: nc.sergeynat@gmail.com

АННОТАЦИЯ
Исследован спектр поперечных мод планарного волновода с конформным профилем эффективного показателя преломления Neff(z*) = L3D / z* (z* ∈ [90,0; 163,5] мкм, L3D = 240,7 мкм), индуцирующим эффективную оптическую метрику гиперболической плоскости H^2 (пространственного среза AdS3). Показано, что поперечное волновое уравнение сводится к задаче на собственные значения для модифицированной функции Бесселя мнимого порядка $\tilde{\mu} = \sqrt{[(k0 \cdot L3D)^2 - 1/4]} = 975{,}718$ с осцилляциями в переменной ln(z*). Квантование фазового интеграла $I(N_m) = \pi(m + \varphi_b)$ формирует башню из 114 направляемых уровней (при $\varphi_b = 3/4$) или 115 уровней (при $\varphi_b = 0$) с универсальной асимптотой $\Delta N / N \to \lambda / (2 \cdot L3D) = 0{,}322\%$ в глубине башни, не зависящей от граничной фазы. Из граничного условия Дирихле $K_\{i\tilde{\mu}\}(\beta_m \cdot z^*_min) = 0$ получены точные нули (u0 = 957,4158, u1 = 943,8549, u2 = 932,8395) и доказана точная теорема о дилатации: при сдвиге ультрафиолетовой стенки $z^*_min \to z^*_min + \delta z$ собственные значения масштабируются автомодельно как $N_m(\delta z) = u_m / [k0 \cdot (z^*_min + \delta z)]$. Установлено, что в одномерном конформном пределе антикроссинги мод строго запрещены, а единственной аналитической особенностью спектра является двойной полюс при выходе стенки на конформную границу $\delta z \to -z^*min$ *(z* = 0). Показано, что волноводный оператор реализует конформную квантовую механику де Альфаро–Фубини–Фурлана с группой симметрии SO(2,1), тогда как гипотеза многомерного голографического счёта состояний опровергнута прямым расчётом (одномерный показатель Вейля $\gamma_N = 1{,}00017$). Получены замкнутые аналитические выражения для ковариационной матрицы Фишера перекрывающихся лоренцевых спектральных пиков, включая доказательство сильной корреляции между интенсивностью и шириной линии (*$|\rho\{I,\Gamma\}| = 1/\sqrt{2} \approx 0{,}7071$) и анализ полной 3M × 3M информационной матрицы.

Ключевые слова: конформный профиль, гиперболическая плоскость H^2, мнимый порядок Бесселя, геометрическая башня, теорема о дилатации, конформная симметрия SO(2,1), матрица Фишера.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Конформная оптическая метрика и поперечные моды

Градиентные диэлектрические среды с гиперболическим профилем эффективного показателя преломления Neff(z*) = L3D / z* привлекают значительное внимание как интегрально-оптическая платформа для управления лучевыми траекториями и спектром поперечных мод. В двумерной планарной геометрии (x, z*) такой профиль индуцирует эффективную оптическую метрику Пуанкаре на верхней полуплоскости H^2 (пространственном срезе трёхмерного пространства анти-де Ситтера AdS3), где световые

лучи распространяются вдоль дуг окружностей [3–5]. В отличие от прямоугольного волновода с эквидистантным спектром, конформный профиль порождает башню уровней, управляемую фазовым интегралом по осцилляторной области.

1.2. Постановка задачи

Известно, что поперечное уравнение в профиле $1/z^*$ сводится к модифицированному уравнению Бесселя с мнимым порядком $\tilde{\mu} = \sqrt{[(k0 \cdot L3D)^2 - 1/4]}$, а его решения осциллируют в логарифмической координате $\ln(z^*)$ — это является прямой конформной сигнатурой задачи. Однако при переходе к практически реализуемым структурам с конечной ультрафиолетовой (УФ) отсечкой z^*_{min} возникает фундаментальный вопрос об устойчивости спектра к сдвигу границы $z^*_{min} \to z^*_{min} + \delta z$ и о реальном физическом содержании аналогии с геометрией AdS.

В настоящей работе мы решаем эту задачу аналитически и численно, определяя точный спектр через нули функции Макдональда $K_{i\tilde{\mu}}(u_m) = 0$ и устанавливая количественные границы применимости конформной симметрии и голографического масштабирования.

1.3. Основные результаты работы

1. Точный спектр и мост между лучевой и модальной картинами. Показано, что квантование фазового интеграла $I(N_m) = \pi(m + 3/4)$ формирует башню из 114 направляемых уровней (или 115 при граничной фазе $\varphi_b = 0$) с геометрической асимптотой $\Delta N / N \to \lambda / (2 \cdot L3D) = 0{,}322\%$ в глубине башни и воспроизводит точные собственные значения из нулей $K_{i\tilde{\mu}}(u_m) = 0$ ($u0 = 957{,}4158$, $N0 = 2{,}62428$). Установлено тождество $\alpha_m = \sin(\theta_{0,m})$, связывающее параметр отсечки волноводной моды с углом запуска геодезического луча.

2. Теорема о дилатации и полюс на УФ-границе. Доказано, что при смещении стенки $z^*_{min} \to z^*_{min} + \delta z$ уровни масштабируются строго автомодельно: $N_m(\delta z) = u_m / [k0 \cdot (z^*_{min} + \delta z)]$. Отсюда следует, что в одномерной конформной задаче антикроссинги мод строго отсутствуют, а единственной аналитической особенностью спектра является двойной полюс при достижении конформной границы $\delta z \to -z^*_{min}$ ($z^* = 0$).

3. Конформная симметрия SO(2,1) и фальсификация объёмного голографического счёта. Показано, что радиальный оператор реализует конформную квантовую механику де Альфаро–Фубини–Фурлана с группой симметрии SO(2,1), чем строго объясняются лог-периодичность мод и башня уровней. В то же время прямой тест масштабирования числа состояний $N_{lev} \propto j^{\gamma_N}$ дал одномерный показатель Вейля $\gamma_N = 1{,}00017$, опровергнув многомерную голографическую дуальность AdS3/CFT2.

4. Метрология спектральных интервалов и полная матрица Фишера. Получены замкнутые аналитические выражения для ковариационной матрицы Фишера перекрывающихся лоренцевых пиков, позволяющие учитывать сокращение общей систематической погрешности в разностях уровней. Для полной $3M \times 3M$ матрицы Фишера $\{f_m, I_m, \Gamma_m\}$ доказана сильная внутренняя корреляция между

интенсивностью и шириной линии (|ρ_{I,Γ}| = 1/√2 ≈ 0,7071 в изолированном пределе) и найдена точка расцепления амплитуды и ширины (a = 1,2493).

5. МОДЕЛЬ, ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ МЕТРИКА И ТОЧНЫЙ СПЕКТР

2.1. Гиперболическая оптическая метрика и конформная граница

Рассмотрим распространение монохроматического излучения с длиной волны λ = 1,550 мкм (k0 = 2π/λ = 4,0537 мкм⁻¹) в планарной градиентной структуре (x, z*) с профилем эффективного показателя преломления

Neff(z*) = L3D / z*, z* ∈ [z*_min; z*_max], (1)

где L3D = 240,7 мкм — характерный масштаб кривизны профиля, z*_min = 90,0 мкм — координата ультрафиолетовой (УФ) отсечки (N_max = L3D / z*_min = 2,674), z*_max = 163,5 мкм — внешняя граница градиентной области (N_min = L3D / z*_max = 1,472). Единый параметрический базис модели согласован с лучевым расчётом усечённой геодезической и сведён в табл. 1.

В рамках оптико-механической аналогии профиль (1) задаёт на плоскости (x, z* > 0) эффективную оптическую метрику Пуанкаре верхней полуплоскости H² (пространственного среза AdS3):

ds_opt² = Neff²(z*) · (dx² + dz²) = (L3D² / z²) · (dx² + dz²), (2)

обладающую постоянной отрицательной гауссовой кривизной $K = -1 / L3D^2$. В полной (2+1)-мерной записи $ds^2 = (L3D^2 / z^2)(-c^2 \cdot dt^2 + dx^2 + dz^2)$ радиальный нулевой луч (dx = 0, $ds^2 = 0$) удовлетворяет уравнению dz/dt = ±c. Следовательно, световой импульс достигает конформной границы z* = 0 за конечное координатное время t = z0 / c при бесконечном собственном оптическом расстоянии ∫₀^{z0} (L3D / z*) dz* = ∞ (собственное время вдоль нулевой геодезической тождественно равно нулю). Именно конечность координатного времени выхода сигнала на границу z* = 0 делает её времениподобной (timelike) и физически требует постановки граничного условия на УФ-отсечке z* = z*_min.

Таблица 1. Единый параметрический базис конформного волновода (согласован с).

Параметр	Обозначение	Значение	Источник / формула
Рабочая длина волны	λ	1,550 мкм	телекоммуникационный диапазон
Масштаб кривизны профиля	L3D	240,7 мкм	мастер-лист
УФ-граница (отсечка)	z*_min	90,0 мкм	N_max = L3D / z*_min = 2,674
Внешняя граница области	z*_max	163,5 мкм	N_min = L3D / z*max = 1,472
Индекс функции Макдональда	μ = k0·L3D	975,718	$\tilde{\mu} = \sqrt{(\mu^2 - 1/4)} = 975{,}718$
Нули функции $K_{i\tilde{\mu}}(u_m) = 0$	u0, u1, u2	957,416; 943,855; 932,840	точный расчёт (mpmath, 30 знаков)
Число уровней башни	N_lev	114 (φ_b = 3/4) / 115 (φ_b = 0)	N ∈ [1,472; 2,674]
Усечённая геодезическая	L_opt	486,54 мкм	θ0 = 40°, ΔΦ = 1972,28 рад
Отношение задержек	τ_gr / τ_phase	1,34	τ_phase = 1,623 пс [5, § 3.2, табл. 2]

2.2. Поперечное уравнение и мнимый порядок Бесселя

Для моды с продольным волновым числом β = k0·N (где N — модовый эффективный показатель преломления, E ≡ β² = k0²·N²) поперечное распределение поля ψ(z*) подчиняется уравнению Гельмгольца

d²ψ / dz² + [(k0² · L3D²) / z² − β²] · ψ = 0. (3)

Подстановка безразмерной переменной u = β·z* приводит (3) к модифицированному

уравнению Бесселя с мнимым порядком $\nu = i\cdot\tilde{\mu}$:
$u^2 \cdot d^2w / du^2 + u \cdot dw / du - (u^2 - \tilde{\mu}^2) \cdot w = 0$, $\psi(z^*) = \sqrt{u} \cdot w(u)$, (4)
где
$\mu \equiv k0\cdot L3D = (2\pi \cdot L3D) / \lambda = 975{,}71805$, $\tilde{\mu} = \sqrt{(\mu^2 - 1/4)} = 975{,}71792$. (5)
В квазиклассическом (WKB) анализе радиального уравнения (3) с особенностью $1/z^{*2}$ применяется стандартная поправка Лангера, заменяющая индекс μ на $\tilde{\mu} = \sqrt{(\mu^2 - 1/4)}$. Относительная разница между μ и $\tilde{\mu}$ составляет $1/(8\mu^2) \approx 1{,}3\cdot10^{-7}$, однако асимптотические поправки к нулям функции Макдональда имеют порядок $O(1/\mu) \sim 0{,}1\%$, что и определяет реальное расхождение в 0,016% между точным значением N0 = 2,62428 и WKB-оценкой 2,62470 в табл. 2.

Убывающее при $u \to \infty$ физическое решение даётся функцией Макдональда $\psi(z^*) = \sqrt{(\beta\cdot z^*)} \cdot K_{i\tilde{\mu}}(\beta\cdot z^*)$. В осцилляторной области $u < \tilde{\mu}$ (то есть $z^* < L3D / N$) оно имеет вид
$K_{i\tilde{\mu}}(u) \sim \sqrt{(2\pi / \sqrt{(\tilde{\mu}^2 - u^2)})} \cdot \exp(-\pi\cdot\tilde{\mu} / 2) \cdot \sin[\, \Phi(u) + \pi/4 \,]$, (6)
демонстрируя логарифмическую периодичность в переменной $\ln(z^*)$ при $u \ll \tilde{\mu}$ — характерную конформную сигнатуру обратно-квадратного потенциала. Модифицированная функция первого рода $I_{i\tilde{\mu}}(u)$ не имеет вещественных нулей при $u > 0$ и экспоненциально растёт в глубине волновода.

2.3. Фазовый интеграл, мост с законом Снеллиуса и квантование башни
В квазиклассическом приближении фазовый интеграл по классически разрешённой области $z^* \in [z^*_{min}; z^*_{turn}]$, где точка поворота определяется условием $N_{eff}(z^*_{turn}) = N$ (то есть $z^*_{turn} = L3D / N$), *вычисляется аналитически:*
$I(N) = \int_{z^*_{min}}^{L3D/N} \sqrt{(k0^2\cdot L3D^2 / z^2 - \beta^2)}\, dz = k0\cdot L3D \cdot [\, \ln((1 + s) / \alpha) - s \,]$, (7)
где безразмерный параметр отсечки α и нормированный поперечный импульс s на УФ-границе определены как
$\alpha = (N \cdot z^*_{min}) / L3D = N / N_{max}$, $s = \sqrt{(1 - \alpha^2)}$, $s^2 + \alpha^2 = 1$. (8)
Здесь N — дискретное собственное значение моды, а не бегущий профиль $N_{eff}(z^*)$ (подстановка $N_{eff}(z^*)$ дала бы $\alpha \equiv 1$ тождественно). Прямая сверка аналитической формулы (7) с численной квадратурой высокой точности даёт расхождение $5{,}7\cdot10^{-14}$.

Смысл параметра α прозрачно раскрывается через закон Снеллиуса в градиентной среде. Вдоль лучевой траектории сохраняется продольный инвариант $N_{eff}(z^*)\cdot\sin(\theta(z^*)) = N_{eff}(z^*_{min})\cdot\sin(\theta0) = \text{const}$, где $\theta(z^*)$ — угол между лучом и нормалью к границе, а $\theta0$ — угол запуска на УФ-границе $z^* = z^*_{min}$. Для моды с эффективным показателем $N_m = N_{eff}(z^*_{min})\cdot\sin(\theta_{0,m})$ параметр отсечки (8) тождественно равен синусу угла запуска луча:
$\alpha_m = (N_m \cdot z^*_{min}) / L3D = \sin(\theta_{0,m})$, (9)
что устанавливает прямой мост между лучевой геодезической картиной ($L_{opt} = 2\cdot L3D\cdot\ln(\cot(\theta0/2)) = 486{,}54$ мкм, $\Delta\Phi = 1972{,}28$ рад, $\tau_{phase} = 1{,}623$ пс; вывод приведён в приложении А) и волновым спектром поперечных мод.

Рабочий диапазон показателей преломления $N \in [1{,}472; 2{,}674]$ соответствует интервалу
$\alpha \in [z^*_{min} / z^*_{max}; 1] = [0{,}5505; 1{,}000]$. (10)
Конвенция квантования $I(N_m) = \pi(m + 3/4)$ строго вытекает из условия Бора–Зоммерфельда для области с одной жёсткой дирихлевой границей при $z^* = z^*_{min}$ (сдвиг фазы π) и одной мягкой точкой поворота при $z^* = z^*_{turn}$ (фаза Маслова $\pi/2$): $2\cdot I(N_m) =$

$2\pi m + \pi + \pi/2$. Данное условие выделяет строго 114 направляемых уровней башни (m = 0…113) с точкой поворота внутри градиентной области (или 115 уровней при граничной фазе $\varphi_b = 0$).

У вершины башни ($\alpha \to 1$) интеграл (7) имеет кубическое поведение $I(N) \sim (2\sqrt{2}/3)\cdot\mu\cdot(1-\alpha)^{(3/2)}$, что даёт степенной закон $N_{max} - N_m \propto (m + 3/4)^{(2/3)}$ с относительным шагом 1,43% → 1,17%. В глубине башни ($\alpha \ll 1$), где положение точки поворота задаётся условием $N \cdot z^*_{turn} = L3D$, а локальный резонансный шаг составляет $\Delta z^*_{turn} = \lambda / (2N)$, дифференцирование даёт универсальную геометрическую асимптоту

$$\Delta N / N = \Delta z^*_{turn} / z^*_{turn} \to \lambda / (2\cdot L3D) = 0{,}322\%, \quad (11)$$

не зависящую от граничной фазы. Точное решение краевой задачи $K_{i\tilde{\mu}}(\beta_m \cdot z^*_{min}) = 0$ с произвольной точностью (mpmath, 30 значащих цифр) даёт нули

$$u_0 = 957{,}4157814632807,\ u_1 = 943{,}85494431,\ u_2 = 932{,}83951109, \quad (12)$$

что соответствует $N_m = u_m / (k_0 \cdot z^*_{min})$ и согласуется с WKB-расчётом с отклонением 0,016% на основном уровне (табл. 2 и рис. 1).

Таблица 2. Верхние уровни башни: точные нули функции Макдональда $K_{i\tilde{\mu}}(u_m) = 0$ против WKB-квантования $I(N_m) = \pi(m + 3/4)$.

m	Точный нуль u_m	Точное $N_m = u_m/(k_0 \cdot z^*_{min})$	WKB N_m	Отклонение
0	957,4158	2,62428	2,62470	0,016%
1	943,8549	2,58711	2,58720	0,004%
2	932,8395	2,55691	2,55700	0,003%
3	923,1678	2,53040	2,53050	0,004%
4	914,3862	2,50633	2,50640	0,003%

Рис. 1 — файл fig1_tower.eps

Рис. 1. Спектр направляемых поперечных мод конформного волновода (114 уровней, m = 0…113): (а) сравнение квазиклассического квантования $I(N_m) = \pi(m + 3/4)$ (сплошная линия) с точными нулями функции Макдональда $K_{i\tilde{\mu}}(u_m) = 0$ (маркеры); (б) относительный межмодовый шаг $\Delta N_m / N_m$: переход от кубического режима у вершины башни (1,43% → 1,17%) к универсальной геометрической асимптоте $\lambda / (2\cdot L3D) = 0{,}322\%$ в глубине.

3. ТЕОРЕМА О ДИЛАТАЦИИ И ПОЛЮС НА УЛЬТРАФИОЛЕТОВОЙ ГРАНИЦЕ

3.1. Точное масштабирование спектра при сдвиге границы

Рассмотрим возмущение положения ультрафиолетовой отсечки $z^*_{min} \to z^*_{min} + \delta z$ *при фиксированном параметре кривизны L3D и частоте k0. Поскольку уравнение Бесселя (4) зависит только от безразмерной комбинации* $u = \beta \cdot z^*$*, граничное условие Дирихле на смещённой стенке сохраняет свой вид:*

$$K_{i\tilde{\mu}}(\beta_m(\delta z) \cdot (z^*_{min} + \delta z)) = 0. \quad (13)$$

Так как порядок функции Макдональда $\tilde{\mu} = \sqrt{[(k_0 \cdot L3D)^2 - 1/4]}$ не зависит от положения стенки, корни уравнения (13) совпадают с теми же самыми числами u_m из (12):

$$\beta_m(\delta z) \cdot (z^*_{min} + \delta z) = u_m = \text{const}. \quad (14)$$

Отсюда непосредственно следует точная теорема о дилатации для модовых показателей преломления $N_m(\delta z) = \beta_m(\delta z) / k0$ и спектрального параметра $E_m(\delta z) \equiv \beta_m^2(\delta z)$:
$N_m(\delta z) = u_m / [\, k0 \cdot (z^*_{min} + \delta z)\,]$, $E_m(\delta z) = u_m^2 / (z^*_{min} + \delta z)^2$. (15)
Прямая численная проверка соотношения (14) во всём диапазоне мод $m \in [0; 113]$ и сдвигов $\delta z \in [-300; +600]$ мкм (включая комплексные значения δz) подтверждает тождество $|\beta_m(\delta z)\cdot(z^*_{min} + \delta z) - u_m| \le 5{,}3\cdot 10^{-24}$.

3.2. Следствия: отсутствие антикроссингов, двойной полюс и устойчивость MDM
Из точной формулы (15) вытекают три фундаментальных физических вывода (рис. 2):

1. Строгое отсутствие антикроссингов в 1D-пределе. Для любых двух уровней башни отношение их собственных значений не зависит от величины сдвига границы:
   $N_m(\delta z) / N_n(\delta z) = u_m / u_n = \text{const}$. (16)
   Все уровни масштабируются синхронно с общим множителем $(z^*_{min} + \delta z)^{-1}$. В одномерной конформной задаче уровни не могут ни пересекаться, ни сближаться с образованием антикроссингов. Это даёт строгое аналитическое объяснение гладкого поведения спектра в контрольном 1D-расчёте.

2. Двойной полюс на конформной границе. Точное разложение относительного сдвига уровней в степенной ряд по возмущению границы имеет вид
   $\delta E_m / E_m = [\, E_m(\delta z) - E_m(0)\,] / E_m(0) = (1 + \delta z / z^*_{min})^{-2} - 1 = \Sigma\{n=1..\infty\}$
   $(-1)^n \cdot (n + 1) \cdot (\delta z / z^*_{min})^n$. (17)
   Радиус сходимости этого ряда определяется достижением самой конформной границы: $\delta z = -z^*_{min}$ (то есть $z^*_{min} + \delta z = 0$). В этой точке $N_m(\delta z)$ имеет простой полюс, а $E_m(\delta z)$ — полюс второго порядка, что физически отвечает расходимости профиля $N_{eff}(z^*) = L3D / z^*$ при $z^* \to 0$. В единой нормировке по фундаментальной волновой постоянной $\beta_0 = u_0 / z^*_{min} = 10{,}638$ мкм$^{-1}$ ($x = \beta_0\cdot\delta z$) полюс расположен при $x = -u_0 = -957{,}416$.

3. Прикладная устойчивость для модового мультиплексирования (MDM). Поскольку технологическая погрешность литографии δz на УФ-границе сдвигает все собственные значения (15) пропорционально единому масштабному фактору, относительный межмодовый интервал $\Delta N_m / N_m = (u_m - u_{m+1}) / u_m$ абсолютно инвариантен к погрешности положения стенки. Это обеспечивает высокую стабильность частотной сетки конформного волновода в системах модового мультиплексирования и интегрированных оптических сенсорах, дополняя его дисперсионные характеристики ($\tau_{gr} / \tau_{phase} = 1{,}34$, см. [5, § 3.2, табл. 2]).

Рис. 2 — файл fig2_dilatation.eps
Рис. 2. Иллюстрация теоремы о дилатации при смещении УФ-границы $z^*_{min} \to z^*_{min} + \delta z$: (а) автомодельное масштабирование модовых показателей преломления $N_m(\delta z) = u_m / [k0\cdot(z^*_{min} + \delta z)]$ без пересечений и антикроссингов ($m = 0\ldots4$); (б) расходимость нормированного спектрального параметра $E_m(\delta z) / E_m(0) = (1 + \delta z / z^*_{min})^{-2}$ в виде двойного полюса при выходе стенки на конформную границу $\delta z \to -z^*_{min}$ ($z^* = 0$).

4. **ПОГРЕШНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЯ ИНТЕРВАЛОВ И МАТРИЦА ФИШЕРА**

4.1. Дисперсия интервала с учётом SVD-ковариации

При экспериментальном или численном извлечении уровней N_m и N_{m+1} из единого сингулярного разложения (SVD) их оценки коррелированы: σ_m² = Var(N_m), σ_{m+1}² = Var(N_{m+1}), C_{m,m+1} = Cov(N_m, N_{m+1}). Для разности ΔE_m = E_{m+1} − E_m (где E_m = k0²·N_m²) линейный перенос погрешностей даёт

σ²(ΔE_m) = (2·k0²)² · [N_{m+1}² · σ_{m+1}² + N_m² · σ_m² − 2 · N_{m+1} · N_m · C_{m,m+1}]. (18)

Поскольку при совместном извлечении мод ковариация положительна (C_{m,m+1} > 0), перекрёстный член уменьшает дисперсию разности: общая систематическая погрешность профиля сокращается при вычислении межмодовых интервалов. Относительная погрешность интервала равна

ε_m² ≡ σ²(ΔE_m) / (ΔE_m)² = 4 · [N_{m+1}² · σ_{m+1}² + N_m² · σ_m² − 2 · N_{m+1} · N_m · C_{m,m+1}] / (N_{m+1}² − N_m²)². (19)

4.2. Перекрытие спектральных пиков: замкнутые аналитические формы

Для трёх соседних лоренцевых пиков полной шириной на полувысоте γ (FWHM) с расстоянием Δf и безразмерным параметром разрешения a = Δf / γ (не путать с параметром отсечки α из (8)) нормированный недиагональный элемент информационной матрицы Фишера F12 / F11 (определяющий связь оценок соседних пиков и не совпадающий с систематической SVD-ковариацией C_{m,m+1} > 0 из разд. 4.1) имеет точную замкнутую форму:

ρ(a) ≡ F12 / F11 = (1 − 3a²) / (1 + a²)³, a = Δf / γ. (20)

Функция (20) удовлетворяет предельным соотношениям ρ(0) = +1 (вырождение матрицы Фишера), ρ(0,5) = 0,128, ρ(1) = −0,250 (минимум функции, ρ′(1) = 0), меняет знак при a = 1 / √3 ≈ 0,5774 и убывает на хвосте как ρ(a) ≈ −3 / a⁴ (рис. 3а).

Погрешность определения положения одиночного пика при отношении сигнал/шум A / (σ√γ) выражается через константу одиночной точности K = 2 / √π = 1,128 как σ(f) = K · σ · √γ / A. Вводя безразмерную одиночную точность σ1 ≡ σ(f) / Δf, получаем замкнутые аналитические выражения для погрешностей межмодового интервала Δf2 и отношения соседних интервалов r = Δf2 / Δf1 (подтверждённые прямым обращением матрицы Фишера при a = 0,5; 1,0; 2,5; 25):

σ(Δf2) / Δf = σ1 · √(B / D), σ(r) / r = σ1 · √(S / D), (21)

где коэффициенты перекрытия выражаются через элементы связи соседних (ρ1) и через-одного (ρ2) пиков:

B = 2 − ρ1² − ρ2² + 2ρ1 − 2ρ1·ρ2, (22)

S = 2·(3 + 4ρ1 − ρ2 − 2ρ2² − 4ρ1·ρ2), (23)

D = 1 + 2ρ1²·ρ2 − 2ρ1² − ρ2². (24)

В пределе хорошо разрешённых пиков (a ≳ 74, где |ρ(a)| < 10⁻⁷; при a = 75 имеем ρ = −9,48·10⁻⁸) множители √(B/D) и √(S/D) переходят в независимые пределы √2 = 1,4142 и √6 = 2,4495 соответственно (рис. 3б). При сильном перекрытии (a = 0,5) ошибка отношения возрастает на +18,31% (ошибка интервала — на +11,80%), тогда как в точке минимума связи (a = 1,0, ρ = −0,250) ошибка отношения снижается на −12,10% (ошибка интервала — на −10,04%). В рабочей области кремниевого чипа (Δf = 0,75–4,4 ТГц, γ = 1–10 ГГц, a ≈ 75–4400) перекрытие пиков пренебрежимо мало, и точность лимитируется исключительно SVD-ковариацией и систематикой профиля.

Рис. 3 — файл fig3_fisher.eps
Рис. 3. Анализ перекрытия соседних спектральных пиков в информационной матрице Фишера (конвенция a = Δf / γ_FWHM): (а) нормированный недиагональный элемент связи ρ(a) = F12 / F11; (б) относительные множители погрешностей определения отношения интервалов r = Δf2 / Δf1 и межмодового интервала Δf2 по отношению к независимым пределам (√6 и √2).

4.3. Полная матрица Фишера и статус оценок
Для вектора параметров θ = (N0, ΔE1, ΔE2, ΔE3)^T ковариационная матрица оценок определяется преобразованием
$C_\theta = (J^T \cdot C_N^{-1} \cdot J)^{-1}$, (25)
где J — якобиан перехода от модовых показателей N_m к параметрам θ, C_N — ковариационная матрица измерений. Конкретные численные значения погрешностей σ_N определяются уровнем шума конкретного измерительного или FDTD-тракта; приведённые выше аналитические соотношения (18)–(25) являются строгими и не зависят от выбора модели шума.

4.4. Корреляции интенсивности и ширины в полной 3M × 3M матрице Фишера
При полной параметризации спектра M лоренцевых линий {f_m, I_m, Γ_m} (Γ_m — ширина FWHM) на частотной сетке с шагом $\delta f \ll \Gamma_m$ и дисперсией белого гауссова шума σ^2 точные элементы информационной матрицы Фишера одиночного пика в единицах $(\sigma^2 \cdot \delta f)^{-1}$ равны:
• в амплитудной параметризации (I ≡ A, пиковая высота, $L(f) = A / [1 + 4(f - f0)^2/\Gamma^2]$):
$F_{AA} = \pi\Gamma / 4$, $F_{A\Gamma} = \pi A / 8$, $F_{\Gamma\Gamma} = \pi A^2 / (8\Gamma) \Rightarrow \rho_{A,\Gamma} = -1 / \sqrt{2} \approx -0{,}7071$; (26)
• в площадной параметризации (I ≡ S = (π/2)·A·Γ, интегральная площадь, $L(f) = [2S/(\pi\Gamma)] / [1 + 4(f - f0)^2/\Gamma^2]$):
$F_{SS} = 1 / (\pi\Gamma)$, $F_{S\Gamma} = -S / (2\pi\Gamma^2)$, $F_{\Gamma\Gamma} = S^2 / (2\pi\Gamma^3) \Rightarrow \rho_{S,\Gamma} = +1 / \sqrt{2} \approx +0{,}7071$. (27)
Таким образом, в обеих параметризациях модуль коэффициента корреляции оценок интенсивности и ширины в изолированном пределе ($a \to \infty$) тождественно равен $1/\sqrt{2}$, а знак определяется тем, фиксируется ли высота или интегральная площадь контура (при этом $F_{f0,I} = F_{f0,\Gamma} = 0$).

Численное обращение полной 9 × 9 матрицы Фишера для триплета перекрывающихся линий (M = 3) показывает, что при сближении пиков (a = 1,0) корреляция площади и ширины центрального пика возрастает до ρ(S2, Γ2) = +0,968, а потеря ортогональности с частотами увеличивает погрешность межмодового интервала σ(Δf) на +52% (рис. 4). В амплитудной параметризации корреляция ρ(A2, Γ2) меняет знак и обращается в нуль при a = 1,2493, образуя точку полного расцепления пиковой амплитуды и ширины даже при сильном перекрытии. При a ≥ 3,5 штраф на точность частотных интервалов за совместную оценку (I_m, Γ_m) падает ниже 0,2%, и частотный блок полностью отвязывается от амплитудно-ширинного.

Рис. 4 — файл fig_fisher_I_gamma.eps
Рис. 4. Анализ полной 3M × 3M (M = 3) матрицы Фишера для параметров {f_m, I_m, Γ_m}: (а) зависимость корреляций ρ(S2, Γ2) и |ρ(A2, Γ2)| центрального пика от параметра разрешения a = Δf / γ_FWHM с точкой расцепления амплитуды и ширины при a = 1,2493;

(б) фактор уширения погрешности частотного интервала σ(Δf) при совместной подгонке (S_m, Γ_m) по сравнению с моделью фиксированных ширин и амплитуд.

5. ПРОТОКОЛ ЧИСЛЕННОЙ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ВЕРИФИКАЦИИ

5.1. Схема проверки теоремы о дилатации и 2D-эффектов

Для независимой проверки аналитических предсказаний в полноволновом электродинамическом моделировании (FDTD) [18–20] формулируется двухэтапный протокол с предрегистрацией критериев приёмки (PASS/FAIL):

Этап 1 (1D-контроль и проверка теоремы о дилатации). Поскольку моды башни с $N \in [1{,}472; 2{,}674]$ охватывают диапазон продольных волновых чисел $\beta = k0 \cdot N \in [5{,}97; 10{,}84]$ мкм$^{-1}$, проводится серия расчётов в рабочем окне $\beta \in [6{,}0; 10{,}9]$ мкм$^{-1}$ при сдвиге УФ-границы $\delta z \in [-20; +40]$ мкм (в единой нормировке $\beta 0 = 10{,}638$ мкм$^{-1}$, $x = \beta 0 \cdot \delta z \in [-213; +426]$).

• Критерий PASS: все уровни башни масштабируются по закону $N_m(\delta z) = u_m / [k0 \cdot (z^*_{min} + \delta z)]$ с отклонением отношений $N_m(\delta z) / N_n(\delta z)$ не более 1% (в пределах дискретизации сетки FDTD), без антикроссингов.

• Критерий FAIL: спонтанное нарушение автомодельности или появление пересечений уровней в 1D-геометрии при отсутствии поперечного ограничения.

Этап 2 (Полноволновой 2D-расчёт с конечной шириной волновода). В реальной планарной структуре с субволновой метасредой конформная симметрия нарушается конечной поперечной шириной волновода и взаимодействием с модами оболочки. Измерение отклонений $\Delta N_m(\delta z)$ от закона дилатации (15) позволяет количественно выделить вклад двумерной гибридизации мод.

5.2. Спектральный маркер: «растянутая вершина» башни

Из табл. 2 следует характерная неэквидистантность верхних уровней: зазор между отсечкой профиля $N_{max} = 2{,}674$ и основной модой $N0 = 2{,}6243$ составляет $\Delta N_{top} = 0{,}0497$, что в 4,7 раза превышает асимптотический шаг башни (0,01054). Это «растяжение вершины» обусловлено кубическим поведением фазового интеграла $I(N) \sim (2\sqrt{2} / 3) \cdot \mu \cdot (1 - \alpha)^{(3/2)}$ вблизи $\alpha \to 1$. Экспериментальная или FDTD-фиксация изолированной основной моды с зазором $\approx 4{,}7$ асимптотических шагов служит прямым подтверждением конвенции $I(N_m) = \pi(m + 3/4)$ и полного счёта 114 уровней.

6. ОБСУЖДЕНИЕ: КИНЕМАТИЧЕСКАЯ H^2-ГЕОМЕТРИЯ, КОНФОРМНАЯ СИММЕТРИЯ SO(2,1) И ГРАНИЦЫ ГОЛОГРАФИИ

6.1. Две точные структурные связи: H^2-геодезическая и потенциал $1/z^{*2}$

Сопоставление исследуемого волновода с геометрией анти-де Ситтера опирается на две строгие математические связи, не требующие спекулятивных предположений:

1. Кинематическое соответствие H^2-геодезической. Как показано в приложении А, эффективная оптическая метрика $ds_{opt}^2 = (L3D^2 / z^2)(dx^2 + dz^2)$ совпадает с метрикой гиперболической плоскости Пуанкаре H^2 (пространственного среза евклидова пространства AdS2). Лучевые траектории в волноводе являются точными гиперболическими геодезическими, а формула оптической длины $L_{opt} =$

$2 \cdot L3D \cdot \ln(\cot(\theta 0/2))$ воспроизводит стандартную ренормированную длину геодезической в AdS с ультрафиолетовой обрезкой z^*_{min}. Это соответствие носит кинематический характер и не воспроизводит динамику гравитации AdS/CFT.

2. Конформная симметрия SO(2,1), самосопряжённое расширение и эффект Ефимова. Поперечное уравнение (3) математически тождественно стационарному уравнению Шрёдингера со сверхкритическим притягивающим обратно-квадратным потенциалом:
$H \cdot \psi = [\, -d^2/dz^2 - \mu^2 / z^2 \,] \cdot \psi = -\beta^2 \cdot \psi$, $\mu^2 = (k0 \cdot L3D)^2 > 1/4$. (28)
Физика таких систем классически изучена в работах Кейса, Ландау и Лифшица (§ 35, режим «падения на центр»), Ефимова (трёхчастичный резонанс и геометрический спектр), де Альфаро–Фубини–Фурлана (конформная квантовая механика DFF), а также в контексте конформной аномалии и ренормгруппового предельного цикла в работах Кэмблонга и соавт. и Браатена–Хаммера. Оператор (28) обладает динамической группой симметрии SO(2,1) (изоморфной изометриям ближней зоны AdS2) с алгеброй генераторов $[D, H] = i \cdot H$, $[D, K] = -i \cdot K$, $[H, K] = 2i \cdot D$. При $\mu > 1/2$ оператор не является существенно самосопряжённым на полуоси и требует задания граничного условия при $z^* = z^*_{min}$, *которое выступает параметром самосопряжённого расширения и фиксирует фазу башни. Это условие нарушает непрерывную масштабную инвариантность* R_+ до дискретной подгруппы Z (конформная аномалия), порождая лог-периодические решения, башню из 114 уровней и полюс дилатации на конформной границе $z^* = 0$.

Таблица 3. Разграничение доказанной конформной симметрии SO(2,1) и голографической дуальности AdS/CFT.

Свойство / величина В задаче о волноводе	Теоретическая природа	Статус
Лучевая метрика $ds_{opt}^2 = (L3D/z^*)^2 \cdot (dx^2 + dz^2)$	*Кинематическая геометрия H^2 / AdS2*	*доказано*
Симметрия оператора $1/z^2$-потенциал ($\mu > 1/2$)	Конформная группа SO(2,1) / DFF	доказано
Башня из 114 уровней $\Delta N / N \to 0{,}322\%$	Нарушение дилатаций	УФ-обрезкой доказано
Полюс при $\delta z \to -z^*_{min}$ $N_m \propto (z^*_{min} + \delta z)^{-1}$	Теорема о дилатации на границе $z^* = 0$	доказано
Счёт состояний $N_{lev} \propto j^{\gamma_N}$ $\gamma_N = 1{,}00017$	Одномерное правило Вейля (не AdS3)	опровергнуто

6.2. Количественная фальсификация голографического счёта состояний

Для прямой проверки применимости голографического словаря AdS/CFT [21–23] выполнен количественный тест масштабирования числа уровней башни $N_{lev}(j) = \lfloor j \cdot I(N_{min})/(\pi \cdot j) - 3/4 \rfloor + 1 \approx 0{,}11750 \cdot j$ при варьировании масштаба $j = k0 \cdot L3D$. Голографический подсчёт степеней свободы по площади/объёму в размерности AdS3/CFT2 требует экспоненциального роста плотности состояний по формуле Карди $\rho(\Delta) \sim \exp(2\pi\sqrt{(c\Delta/6)})$ (при энтропии Бекенштейна–Хокинга $S_{BH} \propto L3D / G_N$). Прямой расчёт в нашей модели даёт линейную зависимость $N_{lev} \propto j^{\gamma_N}$ с показателем
$\gamma_N = 1{,}00017 \pm 0{,}00012$ ($R^2 > 0{,}9999$), (29)
что воспроизводит классическое одномерное правило Вейля для поперечного резонатора и строго опровергает многомерную голографическую дуальность (табл. 3).

Таким образом, оптический волновод с профилем Neff(z*) = L3D / z* является точной физической реализацией кинематики гиперболической плоскости H^2 и конформной симметрии SO(2,1) обратно-квадратного потенциала, но не воспроизводит динамическую голографическую дуальность AdS/CFT.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построена аналитическая теория поперечных мод планарного волновода с конформным профилем Neff(z*) = L3D / z* и установлено её точное место в рамках конформной симметрии. Основные результаты сводятся к следующему:

1. Точный спектр и мост с лучевой оптикой. Поперечное уравнение сводится к задаче для модифицированной функции Бесселя мнимого порядка $\tilde{\mu} = 975{,}718$. Квантование фазового интеграла $I(N_m) = \pi(m + 3/4)$ даёт 114 направляемых уровней (115 при $\varphi_b = 0$) с универсальной асимптотой $\Delta N / N \to \lambda / (2 \cdot L3D) = 0{,}322\%$ в глубине башни и согласуется с точными нулями $K_{i\tilde{\mu}}(u_m) = 0$ ($u0 = 957{,}4158$) с точностью до 0,016%. Показано тождество $\alpha_m = \sin(\theta_{0,m})$, связывающее волновую башню с лучевой геодезической.

2. Теорема о дилатации и полюс на УФ-границе. Доказано точное масштабирование уровней при сдвиге границы: $N_m(\delta z) = u_m / [k0 \cdot (z^*_{min} + \delta z)]$. Установлено, что в 1D-пределе антикроссинги мод строго отсутствуют, а единственной особенностью спектра является двойной полюс при достижении конформной границы $\delta z \to -z^*_{min}$ ($z^* = 0$). Показано, что относительные межмодовые интервалы инвариантны к технологической погрешности положения стенки δz.

3. Конформная симметрия SO(2,1) и опровержение объёмной голографии. Показано, что поперечный оператор реализует конформную квантовую механику де Альфаро–Фубини–Фурлана с группой симметрии SO(2,1), тогда как прямой тест счёта состояний ($\gamma_N = 1{,}00017$) строго исключает голографическую дуальность AdS3/CFT2.

4. Аналитическая и полная 3M × 3M матрица Фишера. Получены замкнутые выражения (20)–(24) для погрешностей интервалов и отношений перекрывающихся спектральных пиков, а также доказана сильная корреляция между интенсивностью I и шириной линии Γ в лоренцевых контурах ($|\rho_{I,\Gamma}| = 1/\sqrt{2}$ в пределе разрешённых линий и до +0,968 при перекрытии $a = 1$). Показано, что при $a \geq 3{,}5$ блок (I_m, Γ_m) полностью расцепляется от частотных измерений, а в амплитудной параметризации существует точка точного расцепления при $a = 1{,}2493$.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. Аналитический вывод оптической длины усечённой геодезической

Рассмотрим распространение светового луча в планарной градиентной среде (x, z*) с эффективным показателем преломления Neff(z*) = L3D / z* при $z^* \geq z^*_{min}$ (L3D = 240,7 мкм, $z^*_{min} = 90{,}0$ мкм). Из закона Снеллиуса следует сохранение инварианта луча:
$\text{Neff}(z^*) \cdot \sin(\theta(z^*)) = \text{Neff}(z^*_{min}) \cdot \sin(\theta 0) \equiv L3D / R$, $R = z^*_{min} / \sin(\theta 0)$, (A.1)
где $\theta 0$ — угол запуска на УФ-границе $z^* = z^*_{min}$, а $z^*_{turn} = R$ *— глубина точки поворота ($\theta = \pi/2$). В полярной параметризации $x(\varphi) = xc + R \cdot \cos(\varphi)$, $z^*(\varphi) = R \cdot \sin(\varphi)$, $ds = R \cdot d\varphi$ ($\varphi \in$*

[θ0; π − θ0]) оптическая длина пути вдоль усечённой геодезической вычисляется аналитически:
L_opt = ∫γ Neff(z) ds = ∫{θ0}^{π−θ0} (L3D / (R·sin(φ))) · R dφ = L3D · ∫{θ0}^{π−θ0} dφ /* sin(φ) = 2·L3D · ln(cot(θ0 / 2)). (A.2)

Выбор опорного угла запуска θ0 = 40° (sin 40° = 0,6428) мотивирован тем, что ему соответствует средняя направляемая мода башни с эффективным показателем преломления N = Neff(z*_min)·sin 40° = 2,674 × 0,6428 = 1,719 и глубиной точки поворота R = z*_min / sin 40° = 140,0 мкм < z*_max = 163,5 мкм (луч разворачивается строго внутри градиентного слоя, не касаясь внешней стенки). При номинальных параметрах L3D = 240,7 мкм и θ0 = 40° (cot 20° = 2,747477) получаем L_opt = 486,54 мкм. На рабочей длине волны λ = 1,550 мкм это даёт полный набег фазы ΔΦ = 2π·L_opt / λ = 1972,3 ± 13 рад (где допуск ±13 рад, или 0,66%, отвечает угловому допуску ввода Δθ0 ≈ ±0,3°) и фазовую задержку τ_phase = L_opt / c = 1,623 пс. В физической реализации на базе диспергирующей субволновой кремниевой метасреды (SWG) измеряемая групповая задержка волнового пакета определяется групповым показателем преломления N_g (τ_gr = L_opt · N_g / c = 2,18 пс, отношение τ_gr / τ_phase = 1,34, см.).

ПРИЛОЖЕНИЕ B. Краевой бокс-предел

В настоящей работе учитываются только 114 направляемых уровней (m = 0…113, нумерация от вершины башни), точка поворота которых z*_turn = L3D / N лежит строго внутри градиентной области z* ∈ [90,0; 163,5] мкм (α ∈ [0,5505; 1,000]). Продолжение формулы квантования ниже N_min = 1,472 выводит точку поворота за внешнюю стенку z*_max = 163,5 мкм, где потенциал обрезается и квантование переходит в режим прямоугольного ящика с линейным шагом ΔN_box = λ / (2·z*_max) = 0,00474 (тогда как локальный шаг башни у нижней границы составляет [λ / (2·z*_max)] · (L3D / z*_max) — в 1,19 раза больше из-за градиента профиля).

ПРИЛОЖЕНИЕ C. Вычислительная верификация и воспроизводимость

Численная верификация результатов выполнена на Python с использованием библиотеки произвольной точности mpmath (30 значащих цифр), символьного пакета SymPy и стандартного стека numpy/scipy:
• Нули функции Макдональда K_{iμ̃}(u_m) = 0 при μ̃ = 975,71792 вычислительно зафиксированы до 16 значащих цифр (табл. 2) и сверены с WKB-квантованием I(N_m) = π(m + 3/4).
• Тождество дилатации |β_m(δz)·(z**min + δz) − u_m| проверено на сетке m ∈ [0; 113] и δz ∈ [−300; +600] мкм с максимальной невязкой 5,3·10⁻²⁴.
• Замкнутые формы матрицы Фишера (20)–(24) сверены с прямым численным интегрированием и обращением информационной матрицы при a ∈ {0,5; 1,0; 2,5; 25} до пятого значащего знака.
• Символьный вывод (SymPy) и численное обращение полной 3M × 3M матрицы Фишера (M = 3, 9 параметров {f_m, I_m, Γ_m}) подтвердили точные пределы ρ{S,Γ} = +1/√2 и ρ_{A,Γ} = −1/√2, точку расцепления a = 1,2493 и кривые сцепления параметров в диапазоне разрешений a ∈ [0,65; 5,0] (рис. 4).
• Масштабирование числа уровней N_lev(j) проверено методом наименьших квадратов в

логарифмических координатах ($\gamma_N = 1{,}00017 \pm 0{,}00012$).
Все скрипты, машиночитаемые схемы (JSON Schema, draft 2020-12) и regression-тесты зафиксированы в релизе v0.1.0 и размещены в открытом репозитории с постоянным идентификатором DOI (Zenodo / GitHub) под лицензией MIT для полной воспроизводимости результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Leonhardt U. Optical Conformal Mapping // Science. — 2006. — Vol. 312, No. 5781. — P. 1777–1780.
2. Pendry J. B., Schurig D., Smith D. R. Controlling Electromagnetic Fields // Science. — 2006. — Vol. 312, No. 5781. — P. 1780–1782.
3. Born M., Wolf E. Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light. — 7th ed. — Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
4. Luneburg R. K. Mathematical Theory of Optics. — Berkeley, CA: University of California Press, 1964.
5. Круковский С. Г. Симулятор геодезической геометрии анти-де-ситтеровского пространства на планарной кремниевой платформе: градиентная субволновая метасреда с профилем Neff(z*) = L3D / z* // Препринт. — 2026.
6. Abramowitz M., Stegun I. A. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. — Washington, D.C.: National Bureau of Standards, 1964.
7. Watson G. N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. — Cambridge: Cambridge University Press, 1922.
8. Langer R. E. On the Connection Formulas and the Solutions of the Wave Equation // Physical Review. — 1937. — Vol. 51, No. 8. — P. 669–676.
9. Case K. M. Singular Potentials // Physical Review. — 1950. — Vol. 80, No. 5. — P. 797–806.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика (нерелятивистская теория). — М.: Наука, 1989. — § 35.
11. Ефимов В. Н. Слабосвязанные состояния трёх резонансно взаимодействующих частиц // Ядерная физика. — 1970. — Т. 12, № 5. — С. 1080–1091.
12. de Alfaro V., Fubini S., Furlan G. Conformal Invariance in Quantum Mechanics // Il Nuovo Cimento A. — 1976. — Vol. 34, No. 4. — P. 569–612.
13. Camblong H. E., Epele L. N., Fanchiotti H., García Canal C. A. Renormalization of the Inverse Square Potential // Physical Review Letters. — 2000. — Vol. 85, No. 8. — P. 1590–1593.

14. Braaten E., Hammer H.-W. Universality in Few-Body Systems with Large Scattering Length // Physics Reports. — 2006. — Vol. 428, No. 5–6. — P. 259–390.

15. Kay S. M. Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume I: Estimation Theory. — Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1993.

16. Fisher R. A. Theory of Statistical Estimation // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 1925. — Vol. 22, No. 5. — P. 700–725.

17. Golub G. H., Van Loan C. F. Matrix Computations. — 4th ed. — Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press, 2013.

18. Yee K. S. Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. — 1966. — Vol. 14, No. 3. — P. 302–307.

19. Taflove A., Hagness S. C. Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method. — 3rd ed. — Norwood, MA: Artech House, 2005.

20. Bérenger J.-P. A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves // Journal of Computational Physics. — 1994. — Vol. 114, No. 2. — P. 185–200.

21. Maldacena J. M. The Large-N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity // International Journal of Theoretical Physics. — 1999. — Vol. 38, No. 4. — P. 1113–1133.

22. Witten E. Anti-de Sitter Space and Holography // Advances in Theoretical and Mathematical Physics. — 1998. — Vol. 2, No. 2. — P. 253–291.

23. Ryu S., Takayanagi T. Holographic Derivation of Entanglement Entropy from AdS/CFT // Physical Review Letters. — 2006. — Vol. 96, No. 18. — Art. 181602.

АНГЛИЙСКИЙ БЛОК МЕТАДАННЫХ (ДЛЯ ПЕРЕВОДНОЙ ВЕРСИИ JETP)

Title:
Transverse Modes in the Conformal Profile Neff = L3D / z*: Geometric Tower, Dilatation Theorem, and SO(2,1) Conformal Symmetry

Author:
S. G. Krukovsky
Mozyr, Republic of Belarus
E-mail: nc.sergeynat@gmail.com

Abstract:
We investigate the transverse mode spectrum of a planar waveguide with a conformal effective refractive index profile Neff(z*) = L3D / z* (z* ∈ [90.0; 163.5] μm, L3D = 240.7 μm), which induces an effective Poincaré optical metric of the hyperbolic plane H^2 (a spatial slice of AdS3). The transverse wave equation reduces to an eigenvalue problem for the modified Bessel function

of imaginary order $\tilde{\mu} = \sqrt{[(k0 \cdot L3D)^2 - 1/4]} = 975.718$ exhibiting logarithmic oscillations in ln(z*). Quantization of the phase integral $I(N_m) = \pi(m + \varphi_b)$ yields a tower of 114 guided levels (for $\varphi_b = 3/4$) or 115 levels (for $\varphi_b = 0$) approaching the universal geometric asymptote $\Delta N / N \to \lambda / (2 \cdot L3D) = 0.322\%$, independent of the boundary phase. From the Dirichlet boundary condition $K_{i\tilde{\mu}}(\beta_m \cdot z^*_{min}) = 0$, we obtain the exact zeros (u0 = 957.4158, u1 = 943.8549, u2 = 932.8395) and prove an exact dilatation theorem: under a shift of the ultraviolet cutoff $z^*_{min} \to z^*_{min} + \delta z$, the eigenvalues scale self-similarly as $N_m(\delta z) = u_m / [k0 \cdot (z^*_{min} + \delta z)]$. Consequently, mode anticrossings are strictly forbidden in the one-dimensional conformal limit, and the sole analytical singularity of the spectrum is a double pole as the boundary approaches the conformal infinity $\delta z \to -z^*_{min}$ ($z^* = 0$). *We show that the waveguide operator realizes the de Alfaro–Fubini–Furlan conformal quantum mechanics with SO(2,1) symmetry, whereas a multidimensional holographic state-counting hypothesis is ruled out by direct calculation (Weyl scaling exponent $\gamma_N = 1.00017$). Closed-form analytical expressions for the Fisher information covariance matrix of overlapping Lorentzian spectral peaks are derived, including proof of strong intensity-linewidth correlation ($|\rho\{I,\Gamma\}| = 1/\sqrt{2} \approx 0.7071$) and analysis of the full 3M × 3M Fisher matrix.*

Keywords: conformal profile, hyperbolic plane H^2, imaginary Bessel order, geometric tower, dilatation theorem, SO(2,1) conformal symmetry, Fisher information matrix.