МЕЛЯЕВА ОРАЗГУЛЬ

U-СТАТИСТИКИ С ПЕРЕМЕННЫМ ЯДРОМ В ЗАДАЧАХ ОЦЕНКИ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель — академик АН
Украины доктор физико-математических
наук, академик Королюк В. С.

Введение

Исходным объектом статистических исследований является выборка $X_n = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ объема n из распределения P, которое полностью или частично неизвестно.

Любую измеримую функцию от выборки

$$S = S(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

называют статистикой.

Задачи статистического оценивания возникают, когда по выборке нужно оценить какую-нибудь числовую характеристику Θ распределения P (оно ведь неизвестно), т. е. для заданного функционала от распределения P

$$\Theta = \Theta(P)$$

должны указать функцию от выборки

$$\Theta^{**} = \Theta^{*}(X_n),$$

которую принимают вместо параметра Θ в качестве его приближения или за неизвестное истинное значение параметра Θ. При этом оценки могут быть параметрическими и непараметрическими.

Непараметрическое оценивание справедливо независимо от типа распределения, откуда взята выборка.

Например, это задачи оценивания функциональных характеристик закона распределения наблюдений, в частности, задачи оценивания плотности распределения вероятностей.

Непараметрическое оценивание, а также изучение асимптотических свойств таких оценок является одной из центральных задач математической статистики.

Исторически первой непараметрической оценкой плотности была, по-видимому, эмпирическая плотность распределения (э. п. р.) или гистограмма. Еще в 1662 году гистограммная оценка была известна и применялась в исследованиях по демографии [56]. Однако и сегодня э. п. р. остается важным и широко распространенным инструментом статистического анализа. Это объясняется с одной стороны, необычайной простотой ее конструкции, а с другой стороны, хорошими асимптотическими свойствами.

Неоспоримым преимуществом гистограммных оценок при расчетах на ЭВМ является то, что для их воспроизведения достаточно хранить лишь конечное число значений.

Пусть имеется независимая выборка $X_1, X_2, \dots, X_n$ объема n из генеральной совокупности с неизвестной функцией распределения (ф. р.) F(x) и плотностью f(x). Ради простоты предположим здесь, что теоретическое распределение сосредоточено на отрезке $[0,1]$ (этот отрезок выбран для определенности и без ограничения общности может быть заменен на любой конечный отрезок).

Пусть $\mathcal{F}_n(x)$ — эмпирическая ф. р. (э. ф. р.), построенная по выборке $X_1, \dots, X_n$. Для построения э. ф. р. $f_n(x)$ поступим следующим образом. Введем на $[0,1]$ равномерную сетку

$$\Delta_m: \quad 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = 1,$$

где $x_i = ih_m$, $h_m = \frac{1}{m}$, $i = \overline{0,m}$, и положим

$$f_n(x) = \frac{1}{m[\mathcal{F}_n(x_{i+1}) - \phi_n(x_i)]}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = \overline{0,m}$$

h_m — параметр гистограммы, представляющий собой длину ее ступеньки.

Добавлено примечание ([ПО1]): Исходная страница 4: в формуле сохранены напечатанные коэффициент 1/m, обозначения F_n и ф_n, а также диапазон i=0,…,m. Перед научным использованием проверьте эти элементы по оригиналу: возможны опечатки.

Отметим некоторые асимптотические свойства э. п. р. $f_n(x)$ [12, 32, 36, 46, 56, 57, 60, 61]:

1. Сильная равномерная состоятельность э. п. р.

$$\lim\nolimits_{\top}(m \to \infty) \lim\nolimits_{\top}(n \to \infty) \sup\nolimits_{\top}(x \in [0,1]\,) \,|f_n\,(x) - f(x)| = 0 \quad \text{"(п. н.)"} \qquad (1)$$

Это утверждение следует из теоремы Гливенко.

2. Уточненная теорема Гливенко.

Пусть $m = m_n$ (т. е. m — функция от n).

Тогда, если $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n}{m^2} < \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad \text{(п. н.)} \qquad (2)$$

Добавлено примечание ([ПО2]): Исходная страница 5: знаменатель в условии сходимости читается как m². Сохранено по фотографии; математическое условие требует проверки.

3. При некоторых условиях на $f(x)$ (например, если $f''(x) \in L_p[0,1]$, 1≤p≤2) и оптимальном выборе m_n выполняется следующее утверждение

$$\int_0^1 E\,[f_n(x) - f(x)]^2 dx \sim A(f) n^{-\frac{2}{3}}, \quad n \to \infty. \qquad (3)$$

где $A(f)$ — некоторая положительная константа, зависящая только от теоретической плотности f. Причем дальнейший рост гладкости теоретической плотности не приводит к увеличению скорости сходимости.

Существенным недостатком э. п. р., как при использовании на практике в качестве модели теоретической плотности, так и при аналитических расчетах является ее скачкообразная, разрывная структура.

Последующий вклад в теорию непараметрического оценивания плотности вероятностей внесли М. Розенблат [52], Е. Парзен [51] и Н. Н. Ченцов [36].

В их работах вводятся новые классы оценок, обобщающие гистограмму.

Идея построения новых непараметрических оценок плотности состоит в следующем.

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, распределенных по закону $P(\cdot)$. Эмпирическое распределение $P_n(\cdot)$, построенное по выборке $(X_1, \dots, X_n)$ — это

дискретное распределение с атомами веса $1/n$, расположенными в каждой из наблюденных точек.

С каждым наблюдением X_i свяжем дельта-меру $\delta_{X_i}(\cdot)$, сосредоточенную в точке X_i, а с последовательностью независимых наблюдений $X_1, X_2, \dots, X_n$ свяжем среднее арифметическое мер $\delta_{X_i}(\cdot)$, т. е.

$$P_n(\cdot) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}(\cdot)$$

В случае, когда неизвестный закон распределения имеет непрерывную плотность $f(x)$, желательно бы иметь также непрерывное эмпирическое распределение, заменив наблюденную меру некоторой плотностью $K_n(x, X_i)$ и использовать в качестве оценки плотности $f(x)$ производную Радона–Никодима от «размазанного» распределения $P_n(\cdot)$.

Таким образом, мы приходим к следующему классу оценок:

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_n(x, X_i) \qquad (4)$$

Выбор функции $K_n(x, y)$ очень важен и в большей степени определяет свойства $f_n(x)$.

Так, в 1956 году Розенблат М. [52] предложил класс оценок, порождаемых ядром

$$K_n(x, y) = a_n K[a_n(x - y)]$$

Его оценки имеют вид

$$f_n(x) = \frac{a_n}{n}\sum_{i=1}^{n} K[a_n(x - X_i)], \qquad (5)$$

где $\lim a_n = \infty$, а $K(x)$ — ядро, удовлетворяет некоторым условиям регулярности. Первоначально оценки вида (5) рассматривались Розенблатом для ядра вида

$$K(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{если } |x| \le 1 \\ 0, & \text{если } |x| > 1 \end{cases}$$

и здесь он исследовал асимптотику средней квадратической ошибки

$$E[f_n(x) - f(x)]^2$$

Позднее в 1962 г. Е. Парзеном [51] были введены в рассмотрение оценки с ядром более общего вида, удовлетворяющие условиям

$$\sup_{u \in R} |K(u)| < \infty$$

$$K(u) \in L_p(R), \quad p = 1{,}2, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} k\,(u)du = 1, \quad \lim_{|u| \to \infty} uh(u) = 0$$

Добавлено примечание ([ПОЗ]): Исходная страница 7: в условиях для ядра напечатаны разные обозначения K(u), k(u) и h(u). Они сохранены без математической правки.

Результаты Розенблата обобщил на многомерный случай Г. М. Мания [28]. Заметим, что в качестве ядра $K(\cdot)$ часто предлагается некоторая симметричная относительно нуля плотность распределения.

В настоящее время оценки типа (4) известны под названием ядерных оценок Розенблата–Парзена и им посвящена обширная литература (см. например, [1, 5, 6, 12–15, 18, 28, 30, 31, 33, 39–44, 47, 51, 54, 55, 57–59]).

Ядерные оценки плотности обладают рядом преимуществ перед гистограммными. Во-первых, при достаточно гладких плотностях f скорость сходимости ядерных оценок выше скорости сходимости гистограммных.

Во-вторых, подбирая то или иное ядро $K(\cdot)$, можно добиться любой степени гладкости самой ядерной оценки. Однако, оценки типа (4) имеют один недостаток, который сказывается при использовании для расчетов на ЭВМ, для воспроизведения $f_n(\cdot)$ необходимо хранить всю функцию $K(\cdot)$.

Ю. В. Боровских [6] в исследованиях асимптотических свойств среднеквадратических мер качества оценок плотности показал их связь с U-статистиками.

Важнейшим классом с. в. являются U-статистики и функционалы Мизеса.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, принимающие значения в некотором измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ и имеющие распределение P.

Иногда $X_1, X_2, \ldots, X_n$ трактуется как выборка объема n из совокупности с распределением P.

Пусть $\mathcal{P} = \{P\}$ — некоторый класс вероятностных распределений на $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$.

Обозначим $\Theta: P \to \Theta(P)$ — функционал, заданный на P и принимающий значения в R.

Функционал $\Theta(P)$ называется регулярным, если для него существует несмещенная оценка, т. е. $\Theta(P)$ может быть представлен в виде:

$$\Theta(P) = \int_{\mathcal{X}} \cdots \int_{\mathcal{X}} \Phi\,(x_1, x_2, \ldots, x_m) P(dx_1) P(dx_2) \cdots P(dx_m)$$

с некоторой функцией $\Phi: (x_1, x_2, \ldots, x_m) \to \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, которая называется ядром $\Theta(P)$, а целое число $m \geq 1$ — степенью $\Theta(P)$.

Без потери общности можно предположить, что Φ является симметрической функцией относительно своих аргументов, так как в противном случае можно ввести в рассмотрение симметрическое ядро Φ_0 по формуле

$$\Phi_0(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{m!} \sum \Phi\left(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}\right),$$

где суммирование осуществляется по всем $m!$ перестановкам $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ чисел $(1, \ldots, m)$.

Определение U-статистики. Для симметрического ядра $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ регулярного функционала $\Theta(P)$ U-статистика определяется так:

$$U_n = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n} \Phi\left(X_{i_1}, \ldots, X_{i_m}\right)$$

где $n \geq m$. U_n является несмещенной оценкой $\Theta(P)$, т. к.

$$EU_n = \Theta(P) \quad \text{для всех } P \in \mathcal{P} \text{ и } n \geq m.$$

Приведем примеры U-статистик.

Пример 1. Выборочное среднее:

$$\Theta(P) = \mu(P) = \int x P(dx),$$

где $\Phi(x) = x$, $U_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j = \overline{X}$.

Пример 2. Выборочная дисперсия.

Добавлено примечание ([ПО4]): Исходная страница 10: в промежуточной формуле дисперсии член n X̄² расположен внутри суммы. Сохранено как напечатано; вероятна опечатка в расположении скобок.

$$\Theta(P) = \int (x-\mu)^2 P(dx)$$

$$\Phi(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2) = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)^2,$$

$$U_n = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \le i < j \le n} \Phi\left(X_i, X_j\right) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} \left(X_j^2 - n\overline{X}^2\right) =$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2.$$

Пример 3. Статистика Джини:

$$\Theta(P) = E|X_1 - X_2|, \quad \Phi(X_1, X_2) = |X_1 - X_2|,$$

$$U_n = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \le i < j \le n} |X_i - X_j|.$$

Развитие теории U-статистик с самого начала определялось влиянием классической теории суммирования независимых случайных величин: были доказаны закон больших чисел, центральная предельная теорема, оценки скорости сходимости, закон повторного логарифма и т. д. Асимптотическая теория U-статистик имеет свою специфику и качественно отличается от теории сумм независимых случайных величин.

Многие асимптотические свойства U-статистик зависят от ранга r ядра Φ и моментных ограничений на ядро. Для невырожденного ядра ранга $r = 1$ асимптотика U-статистик по существу может быть сведена к асимптотике сумм случайных величин.

Если ранг $r \geq 2$ (вырожденное ядро), то U-статистик расширяется и в него входят безгранично делимые законы, распределения функционалов от конечномерных и бесконечномерных гауссовских векторов, определяемых по ядру и др. Такая природа U-статистик порождает новые идеи в области предельных теорем и требует развития имеющихся методов исследования.

В 1961 году Гефдингом были замечены важнейшие свойства — мартингальная структура U-статистик.

В [19] сформулирована лемма по существу эквивалентная представлению Гефдинга U-статистики в виде суммы мартингал-разностей.

Это представление оказалось весьма полезным в самых различных ситуациях и послужило мощным толчком для развития U-статистик.

Таким образом U-статистики, впервые предложенные В. Гефдингом в 1948 году [48], являются функционально-алгебраически обобщением суммы независимых случайных величин и относятся к классу симметрических функций. Они содержат в себе существенный элемент зависимости, проявляющийся в мартингальных свойствах [19, 22].

Представление U-статистики в виде суммы мартингал-разностей позволяет применять различные мартингальные предельные теоремы [27].

В случае $m = 2$ Холл [50] этим путем получил центральную предельную теорему для U-статистик с переменным ядром Φ (т. е. $\Phi = \Phi_n$ зависит от n, причем так, что параметр n существенно влияет на асимптотику). Королюк В. С. и Боровских Ю. В. [19] доказали мартингальную предельную теорему при любом $m \geq 1$.

Ранее Боровских Ю. В. [6] показал, что U-статистика с переменным ядром возникает в вопросах исследования асимптотических свойств среднеквадратических мер качества оценки плотности распределения.

На последовательности $\{U_n\}$, $n \geq m$, можно определить процессы $\xi_n(t) = U_{[nt]}$, $0 \leq t \leq 1$, со значениями в пространстве $D[0,1]$.

В [9] мартингальными методами доказаны различные функциональные предельные теоремы для $\xi_n(t)$, в том числе слабая сходимость к винеровскому процессу.

В последующем изложении материала используются методы, развитые для данного класса случайных величин.

Опишем структуру диссертации и сформулируем ее основные результаты.

Работа состоит из введения, трех глав (со сквозной нумерацией) и списка использованной литературы.

В первой главе получены мартингальные оценки для распределения уклонения оценки плотности.

Пусть $X_1, \dots, X_n$ — независимые действительные случайные величины с неизвестной плотностью распределения $f(x)$.

Для оценки $f(x)$ применяется ядерная оценка вида

$$f_n(x) = (na_n)^{-1} \sum_{i=1}^{n} W\left(\frac{x - X_i}{a_n}\right), \qquad (6)$$

где положительные числа

$$a_n \to 0 \text{ и } na_n \to \infty \text{ при } n \to \infty, \qquad (7)$$

ядро W — известная симметричная относительно нуля плотность распределения.

Мерой качества этой оценки служит среднеквадратическое уклонение

$$B_n^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [f_n(x) - Ef_n(x)]^2 \, h(x)dx \qquad (8)$$

с неотрицательной весовой функцией $h(x)$.

Известно [19], что при некоторых дополнительных условиях уклонение B_n^2 асимптотически нормально, что следует из центральной предельной теоремы (ЦПТ) для мартингалов [27]. Однако дополнительные условия существования зависят от метода сведения задачи к ЦПТ для мартингалов (см. [19, 30, 50]).

В настоящей работе используется метод представления B_n^2 в виде U-статистики с переменным (зависящим от n) ядром [6]. При этом удается получить вполне естественные условия выполнимости ЦПТ и, более того, оценить скорость сходимости распределения B_n^2 к предельному нормальному закону.

Теорема 1. Пусть функции $f(x)$ и $h(x)$ непрерывны, ограничены и таковы, что конечны интегралы

$$\int |h(x) - \int f(y)h(y)dy|^2 f(x)dx, \qquad \int [f(x)h(x)]^2 dx.$$

и плотность вероятностей $W(x)$ интегрируема с квадратом. Тогда при выполнении условий $a_n \to 0$, $na_n \to \infty$, $n \to \infty$ выполняется соотношение при $n \to \infty$

$$\Delta_n = \sup_x |P\{\sigma_n^{-1}(B_n^2 - EB_n^2) < x\} - \Phi(x)| \to 0$$

Здесь $\sigma_n^2 = E(B_n^2 - EB_n^2)^2$, $\Phi(x)$ — стандартное нормальное распределение.

Заметим, что во-первых: условие $a_n \to 0$, $na_n \to \infty$, $n \to \infty$ является оптимальным в том смысле, что при его выполнении оценка плотности $f_n(x)$ состоятельна в среднеквадратическом, если $f(x)$ непрерывна и ограничена; во-вторых: условия теоремы 1 на функции $f(x)$, $h(x)$ и $W(x)$ отличны от условий работ [30, 50], где предполагается дифференцируемость $f(x)$ и конечность вторых моментов $W(x)$.

Применение теоремы 5.1 работы [27] позволяет оценить скорость сходимости Δ_n к нулю.

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 и дополнительном предположении конечности функционалов

$$\int |h(x) - \int h(y)f(y)dy|^2 \big(h(x)f(x)\big)^2 dx$$

$$\int |h^2(x)f(x) - \int h^2(y)f^2(y)dy|^2 f(x)dx.$$

справедливо неравенство

$$\Delta_n \leq C a_n^{1/8}$$

Во второй главе, опираясь на методы U-статистик, разработанные В. С. Королюком и Ю. В. Боровских (см., например [18]) изучается асимптотика распределения B_n^{2p} при любом фиксированном $p \geq 2$.

Рассмотрим независимую случайную выборку $X_1, X_2, \dots, X_n$ объема n из совокупности с неизвестной плотностью распределения $f(x)$.

В качестве оценки для $f(x)$ выберем ядерную оценку вида

$$f_n(x) = (na_n)^{-1} \sum_{i=1}^{n} W\left(\frac{x - X_i}{a_n}\right),$$

где положительные числа $a_n \to 0$, когда $n \to \infty$.

$W(x)$ — известная симметричная относительно нуля плотность распределения на R.

При любом целом $p \geq 1$ определим величину

$$B_n^{2p} = \int [f_n(x) - Ef_n(x)]^{2p} h(x)dx,$$

где $h(x)$ — весовая функция, а интегрирование ведется по всему множеству R, функции W, f и h предполагаются такими, что интеграл в выражении B_n^2 существует.

Доказана следующая **теорема:**

Предположим, что функции f, W и h являются непрерывными и ограниченными на R, а последовательность $\{a_n\}$ такова, что при $n \to \infty$ $a_n \to 0$ и существует число $\alpha > 0$ такое что $n^\alpha a_n \to \infty$.

Тогда имеет место предельное соотношение

$$\sigma^{-1}\big(B_n^{2p}\big)\big(B_n^{2p} - EB_n^{2p}\big) \Rightarrow \tau.$$

где $\Rightarrow$ означает сходимость по распределению, τ — стандартная нормальная случайная величина.

В третьей главе доказаны функциональные предельные теоремы для среднеквадратических мер качества ядерных оценок.

Здесь рассматривается U-статистика с переменным ядром

$$U_n = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_m \le n} \Phi_n\left(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_m}\right), \qquad (9)$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, а ядро Φ_n есть симметрическая функция m переменных и является переменным, то есть зависит от n, кроме того,

$$E\Phi_n = 0, \quad E\Phi_n^2 < \infty$$

Для $0 \le t \le 1$ определим случайный процесс

$$\eta_n(t) = \sigma^{-1}(U_n)\binom{n}{m}^{-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_m \le [nt]} \Phi_n\left(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_m}\right),$$

траектории которого принадлежат пространству

$$D[0;1] \text{ и } \sigma^2(U_n) = EU_n^2.$$

Представление U-статистики (9) в виде суммы мартингал-разностей позволяет получить следующий результат.

Теорема 1. Пусть $E\Phi_n = 0$, $E\Phi_n^2 < \infty$. Если при $n \to \infty$ для $0 \le t \le 1$ и $0 < \varepsilon \le 1$ выполняются условия

$$a_n(\omega) = \sigma^{-2}(U_n) \sum_{k=1}^{n} E\left\{\xi_{nk}^2 I[|\xi_{nk}| > \varepsilon\sigma(U_n)] \mid \mathcal{A}_{k-1}\right\} \xrightarrow{P} 0 \qquad (10)$$

$$b_n^t(\omega) = \sigma^{-2}(U_n) \sum_{k=1}^{[nt]} E\left\{\xi_{nk}^2 \mid \mathcal{A}_{k-1}\right\} \xrightarrow{P} \varphi(t) \qquad (11)$$

с некоторой функцией $\varphi(t)$ на $[0,1]$, то имеет место слабая сходимость

$$\eta_n(t) \xrightarrow{d} \eta_\infty(t) \qquad (12)$$

в топологии пространства $D[0,1]$, где $\eta_\infty(t)$ — гауссовский процесс такой, что $E\eta_\infty(t) = 0$,

$$E\eta_\infty^2(t) = \varphi(t).$$

Утверждение теоремы есть частный случай из [30].

Если функция $\varphi(t)$ дифференцируема, то $\eta_\infty(t)$ выражается через стандартный винеровский процесс $W(t)$ в виде стохастического интеграла

$$\eta_\infty(t) = \int_0^t f\,(u)dW(u), \qquad (13)$$

где

$$f(u) = [\varphi'(u)]^{1/2}; \quad 0 \le u \le t$$

Ситуации, в которых действует теорема 1 и реализуется представление (13), возникают также при оценивании неизвестной плотности распределения $f(x)$, когда для ее оценки используются ядерные оценки вида (6), а мерой качества оценки служит величина (8).

Ранее было показано, что

$$B_n^2 - EB_n^2 = \sum_{1\le i<j\le n} \Phi_n\left(X_i, X_j\right)$$

Для данной ситуации процесс $\eta_n(t)$ имеет вид

$$\eta_n(t) = \sigma_n^{-1} \sum_{1\le i<j\le [nt]} \Phi_n\left(X_i, X_j\right) \qquad (14)$$

с ядром $\Phi_n(x, y)$, для которого доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Предположим, что функции $f(x)$, $W(x)$, $h(x)$ в (8) интегрируемы, непрерывны и ограничены на R. Тогда для процесса (14) при $n \to \infty$, $na_n \to \infty$ имеет место слабая сходимость

$$\eta_n(t) \xrightarrow{d} \eta_\infty(t) \qquad (15)$$

в топологии пространства $D[0,1]$.

Здесь

$$\eta_\infty(t) = \sqrt{2}\int_0^t \sqrt{u}\; dW(u), \qquad (16)$$

где $W(x)$ — стандартный винеровский процесс на $[0,1]$.

Интерес к исследованию этого класса случайных величин в последнее время сильно возрос.

Потребность в изучении U-статистик обусловлена их универсальностью — многие вероятностные объемы выражаются через них, они имеют обширную область применения в статистических задачах, появляются в тех или иных статистических процедурах оценивания, проверки гипотез и т. д.

U-статистики являются одним из универсальных объектов современной теории суммирования, который с одной стороны более сложен, чем суммы

независимых случайных величин и векторов, а с другой стороны — содержит в себе существенные элементы зависимости, к тому же изучение интегральных функционалов от ядерных оценок плотности вероятностей приводит к необходимости исследовать U-статистики с переменным ядром, т. е. рассматривать ситуации, когда ядро Φ зависит от объема выборки n.

Обнаружена связь U-статистик с центральной предельной теоремой в бесконечномерных пространствах.