

О втором пришествии Ферма или триумф конструктивизма(полная версия)

В.П.Воеводов

6 сентября 2026 г.

Аннотация

Если различные водоемы имеют один и тот же химический состав, то и фауна в них закономерно окажется идентичной, однако ее популяция окажется строго пропорциональной физическому объему конкретного водоема. В контексте теории чисел «химический состав» — это неизменные законы делимости числовой прямой, а «объем» — асимптотическая плотность высших степеней, которая при $n \geq 3$ становится слишком мала для возникновения целочисленных решений.

Ключевые слова: Великая теорема Ферма, пропорциональное распределение, конструктивизм, короткое доказательство.

Abstract

On the Second Coming of Fermat, or the Triumph of Constructivism If different bodies of water share the exact same chemical composition, their fauna will consistently be identical by law; however, its population will remain strictly proportional to the physical volume of each specific body of water. In the context of number theory, the "chemical composition" represents the invariant laws of divisibility governing the number line, whereas the "volume" represents the asymptotic density of higher powers, which, for $n \geq 3$, becomes too critically small to allow the emergence of any integer solutions.

Keywords: Fermat's Last Theorem, proportional distribution, constructivism, short proof.

1 Лирическое введение

Великая теорема Ферма (ВТФ), утверждающая отсутствие нетривиальных целочисленных решений уравнения $x^n + y^n = z^n$ при $n > 2$, была строго доказана Эндрю Уайлсом с использованием тяжелого аппарата теории эллиптических кривых и модулярных форм. Однако поиск элементарных или теоретико-числовых эвристик остается актуальным.

В начале 80-х я плотно занялся решением этой загадки и через два года получил короткое вероятностное решение. Расширяя теорему до предела, где левая часть состояла из $(n - 1)$ членов, я был уверен, что теорему лет сто ещё не докажут. Поэтому не торопился с публикацией своих вероятностных решений, а искал закономерности и твёрдо верил, что натуральный ряд не терпит случайных решений, так как весь пропитан закономерностями.

На поиск этих закономерностей ушло много лет. Это своего рода «днк» натурального ряда или его «химический состав». Эти законы волшебным образом трансформируют законы вероятности в естественный закон пропорционального распределения, где нет места случайностям.

Множество, которое наследует «днк» от натурального ряда, само становится носителем этого ряда, но пропорционально своей плотности в этом ряду. Но эти закономерности доказаны только для двух членов в левой части равенства. Впоследствии я узнал, что этот общий вид уже имеет своё название—«Гипотеза Эйлера» (Нет сомнения, что и Ферма и Эйлер легко пользовались методом вероятностной оценки). Когда я впервые услышал о доказательстве Эндрю Уайлса, я был сильно удивлён.

2 Краткая теория метода плотностей

Рассмотрим свойство регулярности числовой прямой $\mathbb{N}$. Каждое второе число делится на 2, каждое третье — на 3, и в общем виде плотность чисел, делящихся на прайм-фактор p , равна $1/p$. Это фундаментальное свойство натуральных чисел—своего рода их «днк» или «химический состав».

2.1 Законы регулярной делимости степеней

Случай нечётных степеней. Докажем, что для любого нечётного $n \geq 3$ выражение $x^n + y^n$ делится на $x + y$ без остатка ($x + y \neq 0$). Разложим исходную сумму степеней с помощью следующего тождества:

$$x^n + y^n = x^2(x^{n-2} + y^{n-2}) - y^{n-2}(x + y)(x - y) \quad (1)$$

Второе слагаемое $-y^{n-2}(x + y)(x - y)$ содержит множитель $(x + y)$, а значит, делится на него. Чтобы всё выражение делилось на $x + y$, необходимо и достаточно, чтобы первое слагаемое также делилось на $x + y$. Задача сводится к доказательству делимости суммы с меньшим нечётным показателем: $(x^{n-2} + y^{n-2}) : (x + y)$. Повторяя этот шаг спуска, за конечное число шагов мы дойдём до базового случая $n = 1$, где $x^1 + y^1 = x + y$, что завершает доказательство.

Случай чётных степеней. Для чётных показателей регулярность выполняется для разности степеней. Докажем, что $z^n - y^n$ кратно $z - y$ для любого чётного $n \geq 2$, используя аналогичный спуск:

$$z^n - y^n = z^2(z^{n-2} - y^{n-2}) + y^{n-2}(z + y)(z - y) \quad (2)$$

Шаг за шагом мы приходим к базовому случаю $n = 2$, где $z^2 - y^2 = (z + y)(z - y)$

Общая «химия» сумм и разностей степеней. Используя предыдущие доказательства, покажем на суммах и разностях оснований степеней, что множества сумм и разностей степеней подчиняются общей «химии» множества натуральных чисел:

1+2 1+3 1+4 1+5 1+6 1+7 1+8 1+9 1+10.....
 2+2 2+3 2+4 2+5 2+6 2+7 2+8 2+9 2+10.....
 3+3 3+4 3+5 3+6 3+7 3+8 3+9 3+10 3+11.....

.....
 Для разностей степеней, начиная с наибольших Z:

Z-1 Z-2 Z-3 Z-4 Z-5 Z-6 Z-7 Z-8 Z-9 Z-10.....
 (Z-1)-1 (Z-1)-2 (Z-1)-3 (Z-1)-4 (Z-1)-5.....
 (Z-2)-1 (Z-2)-2 (Z-2)-3 (Z-2)-4 (Z-2)-5.....

.....
 Так как суммы нечётных(или разности для чётных) степеней кратны суммам(разностям для чётных) их оснований, то множество сумм для нечётных(разностей для чётных) степеней можно упорядочить так, что закон делимости на 2, 3, 4, 5 и на любое другое натуральное число будет повторять закон делимости натурального ряда, наследуя его свойства пропорционально своей плотности в этом ряду. У нас есть благоприятная основа для того, чтобы уравнение имело решение в целых числах.

2.2 Доказательство Великой теоремы Ферма

Асимптотическая доля (плотность) n -х степеней в общем массиве натурального ряда $\mathbb{N}$ составляет величину:

$$\mu = \frac{N^{1/n}}{N} = \frac{1}{N^{\frac{n-1}{n}}} \quad (3)$$

Для частного случая кубов ($n = 3$) данная формула плотности принимает максимально простой и прозрачный вид:

$$\mu = \frac{1}{N^{2/3}} \quad (4)$$

При исследовании парных комбинаций (x, y) , чьи n -е степени в сумме ограничены пределом N , мы переходим к анализу суммарного объёма «числового водоёма» $V(N)$ в пространстве возможных сумм $x^n + y^n \leq N$. Этот объём равен примерно величине

$$V(N) \approx \frac{1}{2} \cdot N^{2/n} \quad (5)$$

Перемножая совокупный объём парных комбинаций $V(N)$ на долю кубов в натуральном ряду, мы получаем количество целочисленных решений:

$$M(N) = V(N) \cdot \mu \approx \frac{1}{2} \cdot N^{2/3} \cdot \frac{1}{N^{2/3}} = \frac{1}{2} \quad (6)$$

Если учесть что максимальные суммы степеней выходят за пределы N (чего не должно быть), то реальный результат получим ещё меньше. А это равносильно 0. С ростом степени результат ещё больше приближается к 0.

Лирическое отступление: "Доказательство на полях" можно вместить в одну строчку, если удовлетвориться только поверхностным вероятностным решением.

Заметим, что мы не пытались всеми силами доказать теорему—благоприятная база для целочисленного решения у нас имеется (множество сумм степеней, которое наследует свойства делимости натурального ряда). Просто плотность множества сумм степеней оказалась недостаточной.

Проверка теории для сомневающихся:

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3 \quad (7)$$

$$4104 = 2^3 + 16^3 = 9^3 + 15^3 \quad (8)$$

В этих примерах в правой части равенства присутствуют суммы двух кубов, а это увеличивает их долю в натуральном ряду почти в $0.5 \cdot N^{1/3}$ раз по сравнению с одичными кубами.

3 Лирическое заключение

Многие любители математики и даже профессионалы надеются и верят, что таинственное и чудесное доказательство Пьера Ферма существует и ждёт своего часа. Эта вера всегда согревала меня все эти долгие годы. Мне нетрудно представить Пьера Ферма, который гуляет по вечернему Петербургу и с грустной улыбкой всматривается в серьёзные "академические" лица "неверующих"...

Было бы приятно повторить доказательство самого Ферма, но это только мечты. Отмечу только, что Ферма стоял у истоков создания теории вероятности, поэтому мог легко оценить вероятность целочисленного решения своей теоремы. Стоит отметить и то, что он не знал, что его теорему назовут Великой и вряд-ли придавл ей такое большое значение.