

Хаотическая динамика электрона

Баяк И. В.

June 2021

Аннотация

Вначале мы конструируем образ тора на двухслойной оболочке сферы и замечаем, что изометрии образа тора на сфере порождают унитарную группу $U(2)$, а затем устанавливаем, что в результате действия модулярной группы на сфере она факторизуется так, что минимальные (одноэлементные) классы эквивалентности задаются множеством простых чисел. Далее, изучая колебания метафизического маятника, мы формируем представление обмотки сферы для тета-функции Якоби и дзета-функции Римана, а затем, рассматривая хаотическую динамику на сфере, замечаем, что в задаче о случайном блуждании по ломаным линиям обмотки сферы вполне естественным образом возникает понятие комплексной амплитуды вероятности, причем динамика амплитуды вероятности блуждающей частицы подчиняется дифференциальному уравнению, обобщающему уравнение Шредингера.

1 Введение

В физике известны два основных направления моделирования электрона. С одной стороны, это множество тороидально кольцевых моделей, начало которым было положено Парсоном [1], а с другой стороны, это стандартная модель электрослабых взаимодействий, которая берёт начало с работы Янга, Миллса [2], затем была продолжена Глэшоу [3] и закончена Вайнбергом [4] и Саламом [5]. Однако, несмотря на успешное описание физических свойств электрона в рамках квантовой механики и квантовой теории поля, такие загадочные свойства как происхождение группы калибровочных симметрий электрослабых взаимодействий и происхождение волновой функции электрона остаются непонятыми до сих пор. А поскольку эти загадки относятся к вопросам основания физики, то решаться они должны посредством математического моделирова-

ния, но с обязательной последующей проверкой на соответствие физическим закономерностям. В данной работе представлена тороидально сферическая модель, из геометрии которой извлекается группа $U(1) \times SU(2)$, а из динамики случайного блуждания по тороидальной обмотке сферы – одномерное уравнение Шредингера. При этом надо чётко понимать, что 'динамика на сфере' это не физика (и даже не альтернатива электрослабой модели), а всего лишь математика, точнее, математический пример одной динамической модели. Пока ещё трудно сказать, какое отношение наша тороидально сферическая модель имеет к реальной Вселенной, но автор уверен [6], что динамические потоки на семимерной сфере это и есть реальная Вселенная.

Во втором и третьем разделе статьи мы готовим математический инструмент, который затем применяем в четвёртом разделе для изучения динамической модели случайного блуждания по виткам тороидальной обмотки сферы. Заметим при этом, что, поскольку даже иррациональные обмотки тора бесконечны, то компактность тороидально сферической модели не противоречит бесконечности пространственно-временных координат. Кроме того, мы полагаем, что в ненаблюдаемых дополнительных измерениях электрон имеет тороидально сферическую форму, и это не противоречит точечноподобной природе электрона в наблюдаемом евклидовом пространстве.

2 Действие модулярной группы на сфере

За разъяснениями базовых алгебро-геометрических понятий можно обратиться к [7]. Здесь же мы возьмем декартову плоскость (x, y) с перпендикулярными (в евклидовом смысле) осями координат и построим из неё комплексную плоскость $z = x + iy$. Если совместить оси координат декартовой плоскости (соответственно действительную и мнимую оси комплексной плоскости) с изотропными координатами псевдоевклидовой плоскости, имеющей ортонормальные координаты $(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$, то квадрат псевдоевклидовой длины вектора $\xi = (x, y)$ будет равен произведению xy , а гиперболический угол наклона этого вектора к соответствующей оси координат псевдоевклидовой плоскости будет равен $-\frac{1}{2} \log \left| \frac{x}{y} \right|$. При этом обычный (евклидов) угол наклона вектора $\xi = (x, y)$ к изотропной прямой x равен $\arctan \left(\frac{y}{x} \right)$.

Факторизация координат декартовой плоскости $z = x + iy$ по модулю единицы

$$x' \equiv x \pmod{1} \quad y' \equiv y \pmod{1} \quad (2.1)$$

превращает ее в тор $S^1 \times S^1 \cong (e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy})$, и если потребовать сохранения отношения эквивалентности 2.1 (что равнозначно сохранению на торе образа узлов целочисленной решетки), то группа допустимых линейных преобразований декартовой плоскости сужается до $SL(2, \mathbb{Z})$. Кроме того, если пренебречь ориентацией прямых (и их обмоток на торе), проходящих через точку отсчета декартовой плоскости, то группа допустимых преобразований сузится до модулярной группы $SL(2, \mathbb{Z}) / \{\pm I\}$. Следует также напомнить, что отображение комплексной плоскости на комплексную плоскость с выколотой точкой

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} : x + iy \rightarrow e^{2\pi i(x+iy)} \quad (2.2)$$

сворачивает комплексную плоскость в трубочку (бесконечный цилиндр) и выворачивает эту трубочку на плоскость с выколотой точкой, а отображение

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} : t \rightarrow e^{2\pi it(a+ib)} \quad (2.3)$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, рисует на комплексной плоскости спираль Sp .

Рассмотрим также факторизацию по модулю 2 произведения координат векторов декартовой плоскости, лежащих на прямой линии $y = \tau x$, где $\tau > 0$,

$$(x, y = \tau x) : x'y' \equiv xy = \tau x^2 \pmod{2} \quad (2.4)$$

Иначе говоря, с помощью псевдоевклидовой метрики комплексной плоскости мы строим отображение намотки комплексной прямой, эквивалентной времениподобной прямой линии псевдоевклидовой плоскости, на единичную комплексную окружность двойного аргумента

$$(x + i\tau x) \rightarrow 2S^1 : (x + i\tau x) \rightarrow e^{2\pi i\sqrt{x\tau x}} = e^{\pi i\tau x^2} \quad (2.5)$$

Зададим, наконец, согласованное с намоткой прямой на окружность, отображение намотки комплексной прямой на комплексную спираль двойного аргумента

$$(rx + i\tau x) \rightarrow 2Sp : (rx + i\tau x) \rightarrow e^{\pi(r-1)x^2} e^{\pi i\tau x^2} \quad (2.6)$$

Приступим теперь к описанию отображения тора $S^1 \times S^1$ на двухслойную оболочку сферы без полярных шапок $S^2 \setminus \{S, N\}$. Для этого на северном полярном круге, который имеет широту ϑ , отметим точку O_N , имеющую долготу λ , а на южном полярном круге, имеющем широту $-\vartheta$, отметим точку O_S на долготе $\lambda + \pi$. Далее мы построим на сфере образ $(1,1)$ -торического узла, то есть проведем через точки O_N, O_S большую окружность сферы так, чтобы она в каждой из этих точек прикасалась

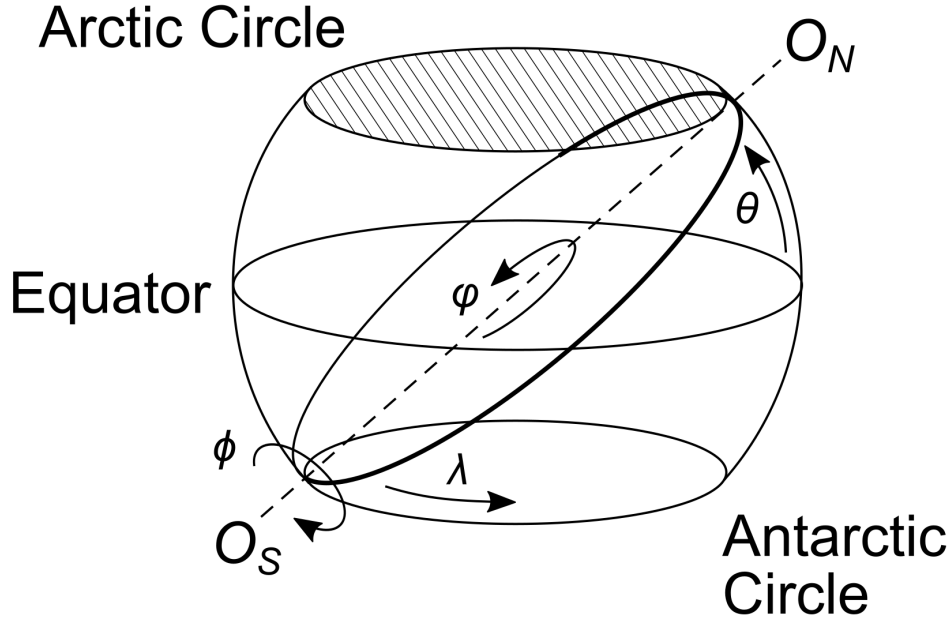


Рис. 1: Образ тора на двухслойной оболочке сферы

(но не пересекала) к соответствующей полярной окружности. Тогда полуокружность $]O_S, O_N[$ с координатами $\varphi(]O_S, O_N[) =]0, \pi[$ лежит в одном (например, внешнем) слое, а полуокружность $]O_N, O_S[$ с координатами $\varphi(]O_N, O_S[) =]\pi, 2\pi[$ лежит в другом (внутреннем) слое оболочки сферы $S^2 \setminus \{S, N\}$, в то время как точки (O_S, O_N) принадлежат двум слоям одновременно. Итак, в результате мы получили искомый образ тора на сфере

$$\left(\vartheta = \frac{\pi}{4}, \quad \lambda = |\pi x| \bmod 2\pi, \quad \varphi = |\pi \sqrt{xy}| \bmod \pi \right) \quad (2.7)$$

Заметим при этом, что собственные изометрии тора и вращение образа тора на сфере вокруг оси (O_S, O_N) на угол ϕ порождают унитарную группу $U(2)$, а движение тора по обмотке $(1,1)$ -торического узла и вращение вокруг оси (O_S, O_N) порождают специальную унитарную группу $SU(2)$. Действительно, если $O, O' \in SO(2)$, а $T \in \text{diag}[e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}]$, то $OTO' \in U(2)$, и если $T \in \text{diag}[e^{i\varphi}, e^{i(2\pi-\varphi)}]$, то $OTO' \in SU(2)$, и кроме того, сумма размерностей группы диагональных матриц и двух ортогональных групп равна размерности соответствующей унитарной группы.

Посмотрим сейчас как при гиперболическом повороте псевдоевклидовой плоскости преобразуются угловые значения ϑ, φ из отображения намотки 2.7. Пусть на комплексной плоскости задан гиперболический по-

ворот $z' = x' + iy' = e^{\pm\psi}(x + iy) = e^\psi x + ie^{-\psi}y$. Тогда, для вектора ξ , образ которого лежит на обмотке (1,1)-торического узла (и в силу чего $\xi_x = \xi_y$), выполняются тождества $\xi'_x \xi'_y = e^\psi \xi_x e^{-\psi} \xi_y = \xi_x \xi_y$, $\frac{\xi'_x}{\xi'_y} = e^{2\psi} \frac{\xi_x}{\xi_y} = e^{2\psi}$, мы получим преобразования

$$(x + iy) \rightarrow e^{\pm\psi}(x + iy) = (x' + iy') \rightarrow \left(\vartheta' = \arctan(e^{-2\psi}), \varphi' = \left| \pi \sqrt{\xi_x \xi_y} \right| \bmod \pi \right) \quad (2.8)$$

В свою очередь, при евклидовом повороте изотропных прямых псевдо-евклидовой плоскости $z' = x' + iy' = e^{i\phi}(x + iy)$ координаты вектора ξ сохраняются, то есть $\xi'_x = \xi_x$, $\xi'_y = \xi_y$, поэтому в отображение намотки 2.7 следует просто добавить евклидов поворот оболочки вокруг оси (O_S, O_N) . В этом случае мы получим цепочку преобразований

$$(x + iy) \rightarrow e^{i\phi}(x + iy) = (x' + iy') \rightarrow \left(\vartheta' = \frac{\pi}{4}, \phi' = |\phi| \bmod \pi, \varphi' = \left| \pi \sqrt{\xi_x \xi_y} \right| \bmod \pi \right) \quad (2.9)$$

Заметим при этом, что тройка произведений всевозможных операторов $e^{\pm\psi_1} e^{i\phi} e^{\pm\psi_2}$ принадлежит группе $SL(2, \mathbb{R})$, а именно

$$\begin{pmatrix} e^{\psi_1} & 0 \\ 0 & e^{-\psi_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\psi_2} & 0 \\ 0 & e^{-\psi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\psi_1 + \psi_2} \cos \phi & e^{\psi_1 - \psi_2} \sin \phi \\ -e^{\psi_2 - \psi_1} \sin \phi & e^{-\psi_1 - \psi_2} \cos \phi \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) \quad (2.10)$$

где $\phi, \psi_1, \psi_2 \in \mathbb{R}$. Более того, группа $SL(2, \mathbb{R})$ порождается группами специальных диагональных и ортогональных матриц $SD(2, \mathbb{R}), SO(2, \mathbb{R})$, поскольку любое одновременно центраффинное и эквиаффинное преобразование декартовой плоскости может быть получено как последовательность евклидовых поворотов и эквиаффинных сжатий (растяжений) координат декартовой плоскости. Тем самым, если мы возьмем произвольный элемент $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ группы $SL(2, \mathbb{R})$, то, приравнивая его к матрице, представляющей произведение $e^{\pm\psi_1} e^{i\phi} e^{\pm\psi_2}$, получим тождественные равенства

$$\tan^2 \phi = \left| \frac{bc}{ad} \right|, \quad \psi_1 + \psi_2 = \frac{1}{2} \log \left| \frac{a}{d} \right|, \quad \psi_1 - \psi_2 = \frac{1}{2} \log \left| \frac{b}{c} \right| \quad (2.11)$$

а поскольку $ad - bc = 1$, то первое тождество упрощается

$$\tan^2 \phi = \left| \frac{bc}{bc + 1} \right| \quad (2.12)$$

Таким образом, если потребовать сохранения прообраза точки отсчета тора, намотанного на сферу с выколотыми полюсами (т. е. сохранения узлов целочисленной решетки декартовой плоскости) и пренебречь ориентацией обмотки тора, то мы получим модулярную группу $PSL(2, \mathbb{Z})$, а разбивая группу $PSL(2, \mathbb{Z})$ на классы эквивалентности по отношению равенства значений углового параметра $\vartheta = \arctan e^{\psi_1 \pm \psi_2}$, мы получим такое разбиение $PSL(2, \mathbb{Z})$ на фактормножество $PSL(2, \mathbb{Z})/\vartheta$, что классы эквивалентности задаются матрицами, образованными исключительно взаимно простыми парами целых чисел (a, d) и (b, c) . В свою очередь, если нас интересует фактормножество $PSL(2, \mathbb{Z})/\vartheta/a$, то его классы эквивалентности можно задать матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ c & bc + 1 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

где $b > 0$, а $c < 0$, причем, если b простое число, то класс эквивалентности состоит из единственной матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & p \\ -1 & 1 - p \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

где $p \in \mathbb{P}$.

3 Колебания метафизического маятника

Пусть динамика маятника описывается принципом наименьшего действия, выраженным в полярных координатах псевдоевклидовой плоскости ρ, φ в виде вариационного уравнения

$$\delta \int_0^\tau \left(\frac{\sigma}{2} e^{-2\varphi} + \frac{t}{2} e^{-2\rho} \right) - \frac{1}{2} (\rho'^2 + \varphi'^2) d\tau = 0 \quad (3.1)$$

где $t, \sigma \in \mathbb{R}$. Тогда, уравнения Эйлера-Лагранжа, соответствующие этому интегральному уравнению, имеют вид системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \varphi'' = -\sigma e^{-2\varphi} \\ \rho'' = -t e^{-2\rho} \end{cases} \quad (3.2)$$

откуда вытекает, что параметрическая кривая

$$\begin{cases} \rho = t \log \tau \\ \varphi = \sigma \log \tau \end{cases} \quad (3.3)$$

служит решением этой системы. Однако, надо понимать, что мы ищем траекторию движения маятника на торе, натянутом на сферу без полюсов, поэтому полярные координаты положения маятника на псевдоевклидовой плоскости ρ, φ следует отображать на круг с комплексными координатами $\{e^{\varphi}\} e^{i\rho}$, где фигурные скобки возвращают дробную часть числа. В таком случае, ожидается, что центр тяжести всех, отмеченных в дискретные моменты эволюции $\tau = n \in \mathbb{N}$, точек траектории движения маятника является некоторым комплексным числом, совпадающим со значением дзета-функции Римана. Заметим при этом, что центр тяжести точек $\{e^{\varphi_n}\} e^{i\rho_n}$ с весом $\{e^{\varphi_n}\}$ не обязан лежать в обозначенном круге.

Далее пусть на декартовой плоскости задан график линейной функции $y = \tau x$, где $\tau = \tan \alpha > 0$, а на соответствующей ей комплексной плоскости он представлен линейной функцией $z = (1 + i\tau)x$. Тогда выражение

$$e^{\pi i y x} = e^{\pi i \tau x^2} = e^{\pi i \tan \alpha x^2} \quad (3.4)$$

следует рассматривать как комплексную функцию намотки линии графика на обмотку (1,1)-торического узла тороидальной оболочки сферы единичного радиуса. Заметим при этом, что $\alpha = \vartheta$, где ϑ – широта северного полярного круга, соответствующего обмотке (1,1)-торического узла, на которую наматывается ось псевдоевклидовой плоскости при гиперболическом повороте на угол $\psi = \frac{1}{2} \log \left| \frac{y}{x} \right|$. Кроме того, поскольку широта тора $\phi = |y| \bmod 2\pi$ и широта сферы ϑ связаны формулой

$$\phi = 2\vartheta - \frac{\pi}{2} \quad (3.5)$$

то

$$\begin{aligned} \tan \vartheta &= \left| \frac{y}{x} \right| = \tan \left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \\ \phi &= 2 \arctan (e^{2\psi}) - \frac{\pi}{2} = \text{gd } 2\psi \end{aligned} \quad (3.6)$$

Рассмотрим теперь отображение линейной функции $z = (r + i\tau)x + a + ib$, где $\tau > 0$, а $r \in \mathbb{R}$, на экспоненту

$$e^{\pi(r-1+i\tau)x^2+2\pi c} = e^{\pi(r-1)x^2+2\pi a} e^{\pi i \tau x^2+2\pi i b} \quad (3.7)$$

где $c = a + ib$, которое следует рассматривать как комплексную функцию намотки линии графика на логарифмическую спираль

$$e^{2\pi c} e^{\pi \left(\frac{r-1}{\tau} + i \right) t} \quad (3.8)$$

где $t = \tau x$. Данное отображение можно оживить, если переменной x придать значение времени, параметру τ - значение угловой скорости разворачивания спирали, а параметру $\frac{r-1}{\tau}$ - значение тангенса угла развертки логарифмической спирали.

Далее мы возьмём величину радиуса точки логарифмической спирали R и с помощью отображения

$$R \rightarrow \theta - \frac{\pi}{4} : \quad \pi \left(\left| R + \frac{1}{2} \right| \bmod 1 - \frac{1}{2} \right) \quad (3.9)$$

намотаем нашу спираль на двойную оболочку сферы, диаметр которой в процессе эволюции непрерывно увеличивается. Кроме того, пусть далее действительная величина $\tau > 0$ выполняет роль эволюционного параметра, $\log \tau$ служит параметром линейного времени. Тогда образ эволюционирующей логарифмической спирали на обмотке раздувающейся двойной оболочки сферы описывается следующим пилообразным выражением

$$\left/ e^{\pi i \tau^\alpha x^2} \right/ = \left\{ e^{\pi \tau x^2} \left(\left| e^{\pi(\gamma-1)\tau x^2} + \frac{1}{2} \right| \bmod 1 - \frac{1}{2} \right) \right\} e^{\pi i \beta \tau x^2} \quad (3.10)$$

где комплексной параметр $\alpha = \beta + i\gamma$ выполняет роль комплексной угловой скорости точки на сфере, а фигурные скобки возвращают дробную часть числа. Дополнив описание движения обмотки линией наблюдателя, мы получим выражение

$$\left/ e^{\pi i \tau^\alpha x^2 + 2\pi i c x} \right/ = \left\{ e^{\pi \tau x^2} \left(\left| e^{\pi(\gamma-1)\tau x^2 - 2\pi b x} + \frac{1}{2} \right| \bmod 1 - \frac{1}{2} \right) \right\} e^{\pi i \beta \tau x^2 + 2\pi i a x} \quad (3.11)$$

где $c = a + ib \in \mathbb{C}$ - комплексный параметр угловой скорости наблюдателя. Однако, если зафиксировать местоположение точек измерения (наблюдения) координат на сфере, полагая $x = m \in \mathbb{Z}$, то можно будет наблюдать точки обмотки логарифмической спирали с координатами $(\theta - \frac{\pi}{4}, \varphi)$, которые содержатся в выражении

$$\left/ e^{\pi i \alpha \tau m^2 + 2\pi i m c} \right/ \quad (3.12)$$

а сумма

$$\theta(c, \tau^\alpha) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left/ e^{\pi i \alpha \tau m^2 + 2\pi i m c} \right/ \quad (3.13)$$

представляет собой тэта-функцию Якоби. В то же время, если зафиксировать точку измерения и местоположение наблюдателя, полагая $x = 1$, $c = 0$, то в дискретные моменты времени $\tau = \frac{1}{\pi} \log n$, где $n \in \mathbb{N}$, можно наблюдать дискретные координаты обмотки

$$/e^{i\alpha \log n} / = /n^{i\alpha} / = \left\{ n \left(\left| n^{\gamma-1} + \frac{1}{2} \right| \bmod 1 - \frac{1}{2} \right) \right\} n^{i\beta} \quad (3.14)$$

а сумма

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^{n-1} /n^{-\frac{s}{2}} /^2 \quad (3.15)$$

где $s = \sigma - it = -2i\alpha$, представляет собой дзета-функцию Римана. В таком случае, тривиальные нули дзета-функции Римана суть решения уравнения

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^{n-1} \left\{ n \left(\left\{ n^{-1-\sigma/2} + \frac{1}{2} \right\} - \frac{1}{2} \right) \right\}^2 = 0 \quad (3.16)$$

Физический смысл данного решения заключается в том, что при чётных $\sigma \leq -2$ в каждый момент эволюции n образ эволюционирующей спирали на обмотке сферы всегда имеет нулевую координату $\theta - \frac{\pi}{4}$, то есть совпадает с обмоткой (1,1)-торического узла.

Вместе с тем, если образ логарифмической спирали на псевдоевклидовой плоскости (а следовательно и на соответствующем торе) в дискретные моменты эволюции задать отображением

$$n^{-\sigma} = e^{\psi_n}, \quad n^{it} = e^{i\rho_n} \quad (3.17)$$

где $\rho_n = t \log n$ – измеренное в момент эволюции n псевдоевклидово расстояние до n -ой точки спирали, $\psi_n = -\sigma \log n$ – гиперболический угол вектора n -ой точки спирали, то при условии $\frac{y_n}{x_n} = n$ выполняется равенство $\sigma = \frac{1}{2}$, вытекающее из цепочки равенств $\left| \frac{y_n}{x_n} \right| = e^{-2\psi_n} = e^{2\sigma \log n} = n^{2\sigma}$.

Тем самым, при условии $\sigma = \frac{1}{2}$, в n -ые моменты эволюции окружность маятника совпадает с замкнутой обмоткой (1, n)-торического узла, а координата положения маятника на этой окружности в n -ые моменты эволюции равна $\varphi_n = \pi \{t \log(n)\}$. Кроме того, ожидается (и легко проверяется), что требование равномерного распределения множества точек $\{t \log(n)\}$ на отрезке $[0, 1]$ выделяет из множества всех возможных вещественных параметров t счётное множество параметров t_m , каждый из которых формирует мнимую часть соответствующего нетривиального корня дзета-функции Римана. Иначе говоря, равномерное "вращение" окружности маятника на сфере вместе с равномерным распределением положений маятника на окружности доставляют все нетривиальные нули дзета-функции Римана. С другой стороны, поскольку образ

спирали на двойной оболочке сферы в каждый n -ый момент эволюции принадлежит одной из двух (в зависимости от чётности n) поверхностей двойной оболочки сферы, то мы наблюдаем полупериодические колебания квадрата широты метафизического маятника с периодом $T = 2$ и полупериодом $\frac{T}{2} = 1$ и амплитудой затухания $\{n^{-\sigma}\}$. Тем самым, нетривиальные нули дзета-функции Римана суть решения уравнения

$$\sum_{\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} n^{it} = 0 \quad (3.18)$$

физический смысл которого в обеспечении равномерного распределения точечных зарядов $\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ на окружности маятника. С другой стороны, поскольку

$$\int_0^{\infty} \tau^{-s-1} \frac{\cos(\pi\tau)}{|\cos(\pi\tau)|} d\tau = -2s \sum_{\mathbb{N}} n^{-s} (-1)^{n-1} \quad (3.19)$$

где $\operatorname{Re}(s) = \sigma \geq 0$, $\sigma \neq 1$, что следует из разбиения предела интегрирования $[0, \infty]$ на отрезки $[n-1, n]$ и непосредственного интегрирования в пределах каждого отрезка, то дзета-функцию Римана можно представить в виде интегрального преобразования Меллина периодической знакопеременной ступенчатой функции, а интегральную сумму интерпретировать как среднее за всё время эволюции значение координаты $\pm\tau^{it}$ положения маятника на сфере, при условии что плотность вероятности обнаружения этой случайной величины наблюдателем, находящимся на обмотке (1,1)-торического узла, равна $\tau^{-\sigma}$. Заметим при этом, что для продления интегрального представления дзета-функции на всю область определения s необходимо использовать модифицированное интегральное преобразование Меллина

$$\int_0^{\infty} \frac{|\tau^{-\frac{s}{2}}|^2}{\tau} \frac{\cos(\pi\tau)}{|\cos(\pi\tau)|} d\tau \quad (3.20)$$

4 О случайном блуждании по ломаным линиям обмотки сферы

Пусть задано конечное множество натуральных чисел $\{1, \dots, N\}$, причем выборка из этого множества осуществляется случайным образом. Обозначим X случайную величину, принимающую значение выбранного числа. Выбор осуществляется так, что вероятность выбора n равна

$P(X = n) = \frac{1}{N}$, то есть предполагается равная вероятность выбора n . Кроме того, пусть с этой случайной величиной связана комплексная случайная величина $Y_{\eta,N} = X^{i\eta}$, где i — мнимая единица, η — вещественный параметр, которую следует понимать как случайную точку $e^{i\alpha}$, где $\alpha = 2\pi \{\eta \ln X\}$, на комплексной единичной окружности. При этом вероятность выбора $n^{i\eta}$ также равна $P(Y_{\eta,N} = n^{i\eta}) = \frac{1}{N}$, а комплексную величину $\bar{P}(Y_{\eta,N} = n^{i\eta}) = \frac{n^{i\eta}}{N}$ мы трактуем как *амплитуду вероятности* выбора случайной величины $n^{i\eta}$. Тогда математическое ожидание случайной величины $Y_{\eta,N}$ вычисляется по формуле

$$M(Y_{\eta,N}) = \sum_1^N \frac{n^{i\eta}}{N} = \sum_1^N \bar{P}(n^{i\eta}) \quad (4.1)$$

и поскольку $Y_{\eta,N} = e^{i\alpha}$, где $\alpha = 2\pi \{\eta \ln X\}$ — угловой параметр единичной окружности комплексной плоскости, то математическое ожидание $M(Y_{\eta,N})$ можно интерпретировать как среднее значение множества чисел $\{1^{i\eta}, \dots, N^{i\eta}\}$, лежащих на единичной окружности комплексной плоскости. В этой связи возникает вопрос существования предела, для которого (в случае его существования) выполняется уравнение

$$\Psi_\eta(\beta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\{n \mid \alpha < \beta\}} \frac{n^{i\eta}}{N} = \int_0^\beta \rho_\eta(x) dx \quad (4.2)$$

где $\alpha = 2\pi \{\eta \ln X\}$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$, а $\rho_\eta(x)$ — непрерывная комплекснозначная функция. При этом функцию $\Psi_\eta(\beta)$ следует интерпретировать как функцию непрерывного распределения амплитуды вероятности случайной величины Y_η , которая получается из дискретной случайной величины $Y_{\eta,N}$ при устремлении N к бесконечности. В самом деле, поскольку

$$\Psi'_\eta(\beta) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \sum_{\{n \mid \beta < \alpha < \beta + \varepsilon\}} \frac{n^{i\eta}}{\varepsilon N} = \rho_\eta(\beta) \quad (4.3)$$

откуда в силу $n^{i\eta} = e^{i\beta}$ имеет место

$$|\rho_\eta(\beta)| = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \sum_{\{n \mid \beta < \alpha < \beta + \varepsilon\}} \frac{1}{\varepsilon N} \quad (4.4)$$

то функция $|\rho_\eta(x)|$ есть плотность вероятности случайной величины Y_η , а функция $\rho_\eta(x) = e^{ix} |\rho_\eta(x)|$ — соответственно плотность амплитуды вероятности случайной величины Y_η . Наконец, заметим, что

$$M(Y_\eta) = \Psi_\eta(2\pi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_1^N \frac{n^{i\eta}}{N} = \int_0^{2\pi} \rho_\eta(x) dx \quad (4.5)$$

До сих пор мы исходили из равной вероятности выбора случайной величины Y_η , однако если, например, $P(Y_\eta) = \frac{n^{-\sigma}}{\zeta(\sigma)}$, где $\sigma > 1$, то

$$M(Y_\eta) = \frac{1}{\zeta(\sigma)} \sum_1^\infty n^{i\eta-\sigma} = \frac{\zeta(\sigma + i\eta)}{\zeta(\sigma)} \quad (4.6)$$

поэтому разумно предположить, что

$$M(Y_\eta) = \frac{\zeta(\sigma + i\eta)}{\zeta(\sigma)} \quad (4.7)$$

и при $\sigma < 1$. При этом следует иметь в виду, что относительная вероятность выбора случайной величины Y_η (вероятность, взятая без учёта нормировочного множителя) равна $n^{-\sigma}$.

Далее, опираясь на динамику броуновского движения [8], рассмотрим процесс случайного блуждания частицы по обмотке сферы. Пусть вероятность свободного пробега без учета нормировочного множителя за интервал времени τ из точки $x = 0$, в точку $x = m$ по обмотке, которая вращается с комплексной скоростью $\alpha = \beta + i\gamma$, где $\gamma > 0$, равна $e^{-\pi\gamma\tau m^2}$. Тогда, объединив эту вероятность с достоверной информацией о координатах частицы на обмотке сферы в одном комплексном числе

$$e^{\pi i\tau^\alpha m^2} = e^{-\pi\gamma\tau m^2} e^{\pi i\beta\tau m^2} \quad (4.8)$$

мы получим амплитуду вероятности свободного пробега за интервал времени τ из точки $x = 0$, в точку $x = m$ по обмотке, вращающейся с комплексной скоростью $\alpha = \beta + i\gamma$. Пусть теперь время измерения дискретно $\tau = n$, а в сумме амплитуд вероятностей

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^\alpha m^2} \quad (4.9)$$

содержится информация о среднем во времени значении координаты частицы на обмотке сферы (аргумент суммы) и об интенсивности этого среднего значения (модуль суммы). Строго говоря, в данном случае сумма амплитуд вероятностей это математическое ожидание такой случайной величины как комплексное представление угловой координаты обмотки сферы. В свою очередь, амплитуда вероятности марковского процесса случайного блуждания, состоящего из счетного числа произвольных свободных пробегов по еще не занятым обмоткам сферы, есть произведение сумм

$$\prod_{n \in \mathbb{P}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^\alpha m^2} \quad (4.10)$$

то есть бесконечное произведение дискретных значений тета-функции. Не берясь непосредственно за подсчет функции, к которой сходится это бесконечное произведение бесконечных сумм, мы все же присмотримся к нему с другой (более физической) стороны. Предположим для простоты, что $n^\alpha = n^\beta$, а следовательно все случайные события (произвольные свободные пробеги частицы по произвольной обмотке сферы) имеют равную вероятность. Кроме того, пусть задан конечный интервал измерения времени и координаты частицы $\Delta\tau = \Delta x$, причём $\tau_n = n\Delta\tau$, где $n \in \mathbb{N}$, $x_j = j\Delta x$, где $j \in \mathbb{Z}$, а $f(\tau_1, x_j(\tau_1))$ – первоначальное значение комплексной амплитуды вероятности появления частицы с координатой x_j . Тогда произведение сумм

$$f(\tau_n, x_m(\tau_n)) = \prod_{i < n} \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} f(\tau_1, x_j(\tau_1)) e^{\pi i \tau_i^\beta \left(\frac{x_k(\tau_{i+1}) - x_j(\tau_i)}{\Delta\tau} \right)^2} \quad (4.11)$$

при предельно малых интервалах измерения времени и координаты частицы $\Delta\tau = \Delta x \rightarrow 0$ можно обозначить обобщающим его функциональным интегралом

$$f(\tau \rightarrow \infty, x) = \int D_x f(\tau, x) e^{\pi i d\tau^\beta \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2} \quad (4.12)$$

из которого следует интегральное уравнение

$$f(\tau + \Delta\tau, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau, y) e^{\pi i \Delta\tau^\beta \left(\frac{x-y}{\Delta\tau} \right)^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau, y) e^{\pi i \tau^{\beta-1} \frac{(x-y)^2}{\Delta\tau}} dy \quad (4.13)$$

и соответствующее ему дифференциальное уравнение

$$i \frac{\partial f(\tau, x)}{\partial \tau} = -\frac{\tau^{1-\beta}}{4\pi} \frac{\partial^2 f(\tau, x)}{\partial x^2} \quad (4.14)$$

а затем сравнить его с одномерным уравнением Шредингера свободной частицы. Заметим при этом, что при замене $t = \log \tau$, соответствующей переходу к линейному времени, уравнение приобретает вид

$$i \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} = -\frac{e^{-t\beta}}{4\pi} \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} \quad (4.15)$$

Это уравнение, конечно же, отличается от уравнения Шредингера, но в частном случае $\beta = 0$ отличие исчезает. Вместе с тем, понятно, что возможно еще большее обобщение уравнения Шредингера

$$i \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} = -\frac{e^{-t\alpha}}{4\pi} \frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial x^2} \quad (4.16)$$

где $\alpha = \beta + i\gamma$.

В заключение возьмем статистическую сумму

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^\alpha m^2} \quad (4.17)$$

которая по сути есть среднее значение угловых координат обмоток сферы, полученное суммированием не только по множеству всех целых значений координат линии наблюдателя, но и по натуральному множеству всех возможных графиков обмотки сферы, и установим ее связь с тета-функцией Якоби $\vartheta(0, \tau)$. Прежде всего, заметим, что в сумме 4.17 содержатся две суммы, а именно, тета-функция Якоби

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^\alpha m^2} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{\pi i \alpha n m^2} = \theta(0, n\alpha) \quad (4.18)$$

где $\alpha = \beta + i\gamma$ и сумма

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} e^{\pi i n^\alpha m^2} = \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{\pi i \alpha n m^2} \quad (4.19)$$

которая в случае $\gamma > 0$ является сходящейся геометрической прогрессией и равна

$$\frac{e^{\pi i \alpha m^2}}{1 - e^{\pi i \alpha m^2}} \quad (4.20)$$

Следовательно исходную двойную сумму 4.17 можно упростить до простой суммы и получить искомую функцию

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{e^{\pi i \alpha m^2}}{1 - e^{\pi i \alpha m^2}} = \frac{\theta(0, \alpha)}{1 - \theta(0, \alpha)} \quad (4.21)$$

Таким образом, для статистической суммы, интерпретируемой как амплитуда вероятности газа, состоящего из частиц, блуждающих по намотке сферы, выполняется тождество

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^\alpha m^2} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \theta(0, n\alpha) = \frac{\theta(0, \alpha)}{1 - \theta(0, \alpha)} \quad (4.22)$$

Вместе с тем, если функцию

$$\rho(\tau) = \frac{\theta(0, i\tau)}{1 - \theta(0, i\tau)} \quad (4.23)$$

где $\tau \geq 0$, понимать как комплексную плотность вероятности, то применив к ней интегральное преобразование, мы получим частотную плотность распределения вероятности (характеристическую функцию)

$$\zeta(z) = \int_0^{+\infty} \frac{\theta(0, i\tau) \tau^{iz-1}}{1 - \theta(0, i\tau)} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(0, ie^t) e^{izt}}{1 - \theta(0, ie^t)} dt \quad (4.24)$$

где $t = \log \tau$. А поскольку эволюция функции $\theta(x, i\tau)$ описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial \theta(x, i\tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 \theta(x, i\tau)}{\partial x^2} \quad (4.25)$$

с начальными условиями $\lim_{\tau \rightarrow 0} \theta(x, i\tau) = \delta(x - m)$, где $m \in \mathbb{Z}$, то было бы интересно знать, какое дифференциальное уравнение соответствует функции

$$\varphi(x, i\tau) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \theta(x, ni\tau) = \frac{\theta(x, i\tau)}{1 - \theta(x, i\tau)} \quad (4.26)$$

или функции

$$\zeta(x, iz) = \int_0^{+\infty} \tau^{iz-1} \varphi(x, i\tau) d\tau \quad (4.27)$$

полученной из оригинальной с помощью интегрального преобразования Меллина.

5 Заключение

Таким образом, наши абстрактные математические конструкции имеют некоторое сходство с математическим формализмом квантовой механики, а следовательно вопросы обоснования квантовой механики, возможно, могли бы получить ответ в рамках развитого здесь математического формализма. По крайней мере, если функция 4.26 удовлетворяет обобщенному уравнению Шредингера, то можно было бы ее интерпретировать как амплитуду колебаний обмотки сферы. Кроме того, унитарная группа изометрий тора на сфере подсказывает нам, что природа электрона как-то связана с геометрией обмотки сферы. Например, постоянную тонкой структуры можно было бы связать с углом наклона прообраза обмотки $(1,1)$ -торического узла, который она имеет в настоящий момент эволюции, а массу электрона - с псевдоевклидовой длиной замкнутой обмотки сферы, имеющей форму $(2,3)$ -торического узла. Тогда иерархию

лептонов можно было бы объяснить связкой из трехлистников. Действительно, пусть тангенс угла наклона прообраза замкнутой обмотки на комплексной плоскости равен

$$\tan \vartheta_c = \frac{2}{3}\alpha \quad (5.1)$$

где $\tan \vartheta_0 = \alpha$ - тангенс угла наклона диагонали прямоугольника, который служит прообразом обмотки тора на сфере, а коэффициент роста производной от этой обмотки логарифмической спирали $r = e^{k\varphi}$ равен

$$k = -1 - \log \frac{2}{3}\alpha \quad (5.2)$$

Тогда если за единицу измерения угла развертки φ спирали принять число четвертей оборотов обмотки, а в качестве массы лептона N -ой иерархии взять длину спирали за $j + 1$ четвертей оборотов обмотки

$$M_N = e^{k(1+j)} \quad (5.3)$$

где $j = \sum_{n=0}^N n^4$, то при упрощении $k' = k + 1$ выполняется формула Барута [9] для соотношения масс лептонов.

Список литературы

- [1] Alfred L. Parson, "Magnetron Theory of the Structure of the Atom," Smithsonian Miscellaneous Collection, Pub 2371, 80pp, 2 plates (29 Nov 1915)
- [2] Yang, C. N.; Mills, R. (1954). "Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance". *Physical Review*. 96 (1): 191–195.
- [3] S.L. Glashow (1961). "Partial-symmetries of weak interactions". *Nuclear Physics*. 22 (4): 579–588.
- [4] S. Weinberg (1967). "A Model of Leptons". *Physical Review Letters*. 19 (21): 1264–1266.
- [5] A. Salam (1968). N. Svartholm (ed.). *Elementary Particle Physics: Relativistic Groups and Analyticity*. Eighth Nobel Symposium. Stockholm: Almquist and Wiksell. p. 367.

- [6] Igor V. Bayak, Applications of the Linear Algebras of Vector Fields to the Modelling of Physical Phenomena, *Journal of Geometry and Symmetries in Physics*, 38 (2015)
- [7] Ж.-П. Серр, Курс арифметики.
- [8] Edward Nelson, *Dynamical Theories of Brownian Motion*.
- [9] A. O. Barut, Lepton Mass Formula, *Phys. Rev. Lett.* 42, 1251 (1979)

90