

**Волновая природа модели GS6 и её
отличие от стандартных волновых
моделей**

Аннотация

В работе раскрывается волновая природа модели GS6, основанная на согласованной паре уравнений различной структуры и дискретном наборе разрешённых мод. Показано, что модель принципиально отличается от традиционных волновых формализмов способом задания спектра мод, наличием двух внутренне согласованных трактовок (комплексной и вещественной) и возможностью

целенаправленной локализации пучностей поля в свободном пространстве. Приведены строгие формулировки уравнений, условия на параметры мод и интерпретация W , R в терминах собственных значений операторов.

1. Введение

Стандартные волновые модели, как правило, опираются на одно базовое уравнение (волновое, Гельмгольца, Шрёдингера) и формируют дискретный спектр мод за счёт граничных условий. В модели GS6 волновая картина строится иначе: она основана на двух уравнениях принципиально разной структуры, которые тем не менее опираются на единую дискретную систему мод, задаваемую внутренними

тождествами модели. Это позволяет разделять задачи фазового контроля и анализа резонансных эффектов, а также целенаправленно формировать пучности поля в заданных точках свободного пространства.

Цель настоящей работы — систематизировать волновую природу модели GS6 и выделить её принципиальные отличия от стандартных подходов.

2. Два согласованных уравнения модели GS6

Модель GS6 использует два уравнения, различающихся структурой, но согласованных через общий набор разрешённых пар параметров (W, R) .

2.1 Комплексная форма (квантово-подобная трактовка)

Уравнение имеет вид:

$$V_{yy} - V_{xx} = 2iV_y.$$

Его решения записываются отдельно для каждой бегущей волны:

$$V_1(x, y) = \exp(iWy - iRx),$$

$$V_2(x, y) = \exp(iWy + iRx).$$

Здесь:

- левая часть — разность вторых производных,
- правая часть — первая производная по y с мнимым коэффициентом,
- решения описывают бегущие волны в противоположных направлениях по x .

Условие на параметры, следующее из базовых тождеств модели:

$$R^2 = W^2 - 2W.$$

Такая форма удобна для описания фазовых соотношений, суперпозиций и точного управления волновой картиной.

2.2 Вещественная форма (классическая трактовка)

Уравнение:

$$U_{yy} + U_{xx} + 4U = 0.$$

Решения:

$$U_+(x, y) = \cos(Wy + Rx), \quad U_-(x, y) = \cos(Wy - Rx).$$

Особенности:

- левая часть — сумма вторых производных (аналог уравнения Гельмгольца),
- правая часть отсутствует; вместо неё — член $4U$, определяющий «собственное число» моды,
- удобно для анализа пучностей, интенсивности и резонансных эффектов.

Условие на параметры:

$$W^2 + R^2 = 4.$$

Оба условия автоматически следуют из базовых тождеств GS6:

$$W^2 = W + 2, \quad R^2 = -W + 2.$$

3. Дискретный спектр мод из внутренних тождеств

В отличие от классических моделей, где дискретные моды возникают из граничных условий (резонатор, волновод, потенциальная яма), в GS6 дискретный набор мод определяется самой структурой модели.

Разрешённые пары (W, R) :

$$(2, 0),$$

$$(-1, -\sqrt{3}),$$

$$(-1, +\sqrt{3}).$$

Для каждой из этих пар выполняются оба условия:

- $R^2 = W^2 - 2W,$
- $W^2 + R^2 = 4.$

Таким образом, модель GS6 оперирует ровно тремя «разрешёнными каналами» распространения волн. Это жёстко ограничивает возможные волновые конфигурации, но одновременно даёт удобный инженерный инструмент: любая реализуемая в рамках GS6 волна — это линейная комбинация этих трёх мод.

Линейная комбинация мод (каждая мода — с новой строки):

$$\begin{aligned}\Psi(x, y) = & c_1 \cdot \cos(2y + 0 \cdot x) \\ & + c_2 \cdot \cos(-y - \sqrt{3}x) \\ & + c_3 \cdot \cos(-y + \sqrt{3}x).\end{aligned}$$

Коэффициенты c_1, c_2, c_3 определяют, как именно суперпозиция формирует пространственную структуру поля, включая положение пучностей.

4. Операторная интерпретация и параметрическое пространство мод

4.1. Базовые матрицы и их свойства

Модель GS6 строится на трёх эрмитовых унитарных матрицах A, B, C размера 3×3 , ненулевые элементы которых равны 1 и расположены следующим образом:

- $A: A_{11} = 1, A_{23} = 1, A_{32} = 1;$
- $B: B_{13} = 1, B_{22} = 1, B_{31} = 1;$
- $C: C_{12} = 1, C_{21} = 1, C_{33} = 1.$

В явном виде:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эти матрицы эрмитовы ($M^\dagger = M$) и унитарны ($M^2 = I$), что обеспечивает корректность их интерпретации как операторов наблюдаемых.

4.2. Построение операторов $\hat{W}$ и $\hat{R}$ через коммутаторы и антикоммутаторы

Операторы $\hat{W}$ и $\hat{R}$, определяющие параметрическое пространство мод модели GS6, строятся непосредственно из коммутационных и антикоммутационных соотношений между A, B, C .

$$\begin{aligned}\hat{W} &= \{A, B\} = AB + BA, \\ \hat{W} &= \{B, C\} = BC + CB, \\ \hat{W} &= \{C, A\} = CA + AC.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{R} &= i[A, B] = i(AB - BA), \\ \hat{R} &= i[B, C] = i(BC - CB), \\ \hat{R} &= i[C, A] = i(CA - AC).\end{aligned}$$

Равенства между разными парами означают, что матрицы A , B , C удовлетворяют специальным алгебраическим соотношениям, фиксирующим структуру модели.

Явный расчёт, например, для пары (A, B) , даёт:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Таким образом,

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{R} = i[A, B] = \begin{pmatrix} 0 & -i & i \\ i & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{pmatrix}.$$

Такая конструкция подчёркивает алгебраическую природу GS6: параметры W, R возникают как собственные значения операторов, жёстко заданные коммутационной структурой базовых матриц.

4.3. Групповая структура и степени генератора P

Матрицы A, B, C обладают дополнительной симметрией, выражаемой соотношениями:

$$ABC = B, \quad BCA = C, \quad CAB = A.$$

Эти равенства отражают принадлежность матриц к группе перестановок с циклической симметрией.

Введём генератор P , определяемый как:

$$P = BA = AC = CB.$$

Тогда обратные элементы задаются как $P^{-1} = AB = CA = BC$.

$$\begin{aligned}
P^0 = I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
P^1 = P &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
P^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
P^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.
\end{aligned}$$

Полная группа порядка 6 задаётся набором:

$$Z_6 = \{I, P, P^2, A, B, C\},$$

где $P = BA = AC = CB$, а A, B, C выступают как дополнительные элементы, обеспечивающие полный порядок группы.

Симметрия группы объясняет равенство антикоммутаторов и коммутаторов для разных пар: операторы $\hat{W}$ и $\hat{R}$ являются инвариантами группы, построенными из её генераторов.

Циклические перестановки пар $(A, B) \rightarrow (B, C) \rightarrow (C, A)$ сохраняют значения $\hat{W}$ и $\hat{R}$ благодаря симметрии структуры. Таким образом, дискретный набор мод модели GS6 жёстко задан групповой структурой: собственные значения W, R возникают как спектры инвариантных операторов $\hat{W}, \hat{R}$, а собственные векторы соответствуют неприводимым представлениям группы. Это придаёт модели алгебраическую строгость и объясняет, почему разрешённые пары (W, R) не

зависят от геометрии, а определяются внутренней симметрией системы.

4.4. Собственные векторы и разрешённые пары **(W, R)**

Собственные векторы операторов $\hat{W}$ и $\hat{R}$, отвечающие разрешённым модам модели GS6, имеют вид:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}, \quad |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix},$$

где $\omega = \exp(2\pi i/3) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ — примитивный кубический корень из единицы.

Соответствующие собственные значения:

- Для $|\psi_1\rangle$: $\hat{W}|\psi_1\rangle = 2|\psi_1\rangle, \hat{R}|\psi_1\rangle = 0|\psi_1\rangle \rightarrow$ пара $(W, R) = (2, 0)$;

- Для $|\psi_2\rangle$: $\hat{W}|\psi_2\rangle = -1|\psi_2\rangle$, $\hat{R}|\psi_2\rangle = -\sqrt{3}|\psi_2\rangle \rightarrow$ пара $(-1, -\sqrt{3})$;
- Для $|\psi_3\rangle$: $\hat{W}|\psi_3\rangle = -1|\psi_3\rangle$, $\hat{R}|\psi_3\rangle = +\sqrt{3}|\psi_3\rangle \rightarrow$ пара $(-1, +\sqrt{3})$.

Проверка для $|\psi_1\rangle$ тривиальна: все строки $\hat{W}$ дают сумму двух единиц, что при $x = y = z$ даёт $2x$, а строки $\hat{R}$ содержат разности $-i + i = 0$, подтверждая $R = 0$. Для $|\psi_2\rangle$ и $|\psi_3\rangle$

циклическая структура и свойства ω обеспечивают выполнение уравнений собственных значений; явные подстановки подтверждают указанные собственные значения.

Таким образом, разрешённые пары параметров (W, R) , определяющие волновую структуру модели GS6, возникают как спектр инвариантных операторов, построенных на базе коммутационной структуры матриц A, B, C . Это подчёркивает алгебраическую природу дискретного спектра GS6: он не является следствием граничных условий, а жёстко задан симметрией группы.

Такая единая операторная трактовка позволяет переносить результаты между разными диапазонами излучения и средами, сохраняя общую алгебраическую структуру модели GS6.

Аспект	Стандартный волновой формализм	Модель GS6
Базовое уравнение	Одно уравнение (волновое, Гельмгольца и т. п.)	Два уравнения разной структуры, согласованные через одни и те же моды

Дискретизация
мод

Из граничных
условий
(геометрия
резонатора/
волновода)

Из внутренних
тождеств модели (
 $W^2 = W + 2, R^2 =$
 $-W + 2)$

Физическая
трактовка

Одна трактовка
(либо комплексная,
либо
вещественная)

Две трактовки:
квантово-подобная
(фазовая) и
классическая
(резонансная)

Управление пучностями	Обычно внутри резонаторов или через диаграммы направленности	Возможность целенаправленной локализации пучности в свободном пространстве
--------------------------	---	---

Собственные
значения

Параметры
подстановки

W, R как
собственные
значения операторов
с геометрической
трактовкой
направлений

Прикладной
фокус

Распространение,
затухание,
дисперсия, моды
внутри структур

Локализация
пучностей и
резонансное
воздействие на
объекты

Ключевое отличие: в GS6 «разрешённые каналы» распространения волн заданы самой моделью, а не только геометрией. Это даёт строгий набор базовых мод, через которые можно строить суперпозиции для точного нацеливания энергии.

Модель GS6 обладает выраженной волновой природой, отличающейся от стандартных подходов рядом принципиальных черт:

- использование двух согласованных уравнений разной структуры,
- дискретный спектр мод, задаваемый внутренними тождествами,

- возможность строгой операторной интерпретации W, R ,
- целенаправленная локализация пучностей в свободном пространстве и управление резонансом.

Эти особенности делают GS6 удобным инструментом для инженерных задач, где требуется не просто распространение волны, а точное нацеливание энергии и резонансное воздействие на объект.