О распределении Лапласа как стационарном распределении для стохастического разностного уравнения со случайными коэффициентами

К. П. Беляев[1, 2, 3], В. Ю. Королев[2, 3, 4], С. К. Гулев[1], Н. Романюк[2]

[1] *Институт океанологии имени П. П. Ширшова РАН*
[2] *МГУ имени М. В. Ломоносова, факультет ВМК*
[3] *ФИЦ "Информатика и управление" РАН*
[4] *Московский математический центр "Фундаментальная и прикладная математика"*

Аннотация. В данной статье для схемы стохастического разностного уравнения – схемы авторегрессии первого порядка со случайными коэффициентами – приводится пример условий на коэффициенты, обеспечивающих наличие нетривиального стационарного распределения процесса авторегрессии, в качестве которого выступает распределение Лапласа (двойное экспоненциальное). Доказана устойчивость такого стационарного режима: малые отклонения распределения стартовой случайной величины от распределения Лапласа гарантируют еще меньшие отклонения распределений всех последующих членов последовательности от распределения Лапласа. Рассмотрены как одномерный, так и многомерный случай.

Ключевые слова: стохастическое разностное уравнение; авторегрессия первого порядка со случайными коэффициентами; стационарное распределение; распределение Лапласа; смесь нормальных законов; многомерное распределение Лапласа

MSC: 37H10; 39A50; 60F05; 60G50; 60G55; 62E20; 62G30; 86-10

1 Введение

Стохастические дифференциальные уравнения или их "допредельные" дискретные аналоги – стохастические разностные уравнения – применяются в качестве моделей наблюдаемых процессов во многих областях. В частности в работах [1, 2] при анализе потоков тепла между атмосферой и океаном была использована модель стохастических дифференциальных уравнений с неизвестными случайными коэффициентами. При этом были предложены оригинальные методы оценки (реконструкции) неизвестных случайных коэффициентов этих уравнений по наблюдаемым данным. В этих работах отмечено, что в системе океан-атмосфера тепловые потоки играют ключевую роль, так что их количественные оценки чрезвычайно важны для анализа и прогноза погоды и климата. При этом потоки тепла не замкнуты в том смысле, что их поведение в точке и даже в ограниченной области не дает возможность достоверно оценить и предсказать их изменчивость во всей области на разумный период времени. Поэтому важно получить (оценить, реконструировать) их вероятностные распределения, чтобы на их основе проанализировать наблюдаемую изменчивость по имеющимся базам данных и дать вероятностный прогноз на более-менее длительный период с оценкой его достоверности. Для этого требуется определить распределение характеристик, задаваемых стохастическими дифференциальными или разностными уравнениями, что аналитически сделать невозможно, если это уравнение нелинейно, а в линейном случае это представляет собой непростую и весьма громоздкую математическую задачу. Важно также понять, какие физические условия управляют поведением потоков тепла, чтобы на основе этих условий сформулировать адекватную математическую модель и дать математически корректное, физически разумное и проверяемое на наблюдениях решение.

В данной статье для схемы стохастического разностного уравнения – схемы авторегрессии первого порядка со случайными коэффициентами – рассматривается метод определения и расчета предельного распределения изучаемой характеристики. При этом большой интерес представляет описание стационарного режима (распределения вероятностей) процесса авторегрессии, в частности, описание условий на коэффициенты, при которых такое распределение существует. Среди возможных комплексов условий существования стационарного распределения особый интерес представляют такие, которые порождают стационарные распределения с максимальной энтропией. Например, нормальное (гауссово) распределение максимизирует энтропию в классе распределений, носителем которых является все множество $\mathbb{R}^d$ вещественных чисел, и имеющих конечный второй момент. Еще одним примером распределения с максимальной энтропией является распределение Лапласа, задаваемое плотностью

$$\lambda(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Плотности (1) соответствует функция распределения

$$\Lambda(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-|x|}, & x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & x \geqslant 0. \end{cases} \tag{2}$$

Это распределение обладает максимальной энтропией в классе всех абсолютно непрерывных распределений, носителем которых является вся вещественная прямая, с нулевым математическим ожиданием и конечным абсолютным моментом первого порядка, а также в классе масштабных смесей абсолютно непрерывных распределений, носителем которых является вся вещественная прямая, с нулевым математическим ожиданием и конечной дисперсией, а смешивающее распределение имеет в качестве носителя всю неотрицательную полуось и конечное математическое ожидание (см. [18]). Наличие экстремальных энтропийных свойств у распределений означает, что они соответствуют установившимся физическим процессам, например, стационарности в геофизике.

В данной статье рассматривается последовательность случайных величин $\{Z_n\}_{n\geqslant 1}$, где Z_1 – некоторая случайная величина, а для $n \geqslant 1$ величины Z_n связаны рекуррентным соотношением (стохастическим разностным уравнением)

$$Z_{n+1} = Z_n + \alpha_{n+1}(Z_n) + \beta_{n+1}(Z_n) \circ X_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

где $\alpha_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – вещественная функция, $\beta_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ – положительная функция для каждого $n \in \mathbb{N}$, а $X, X_1, X_2, \ldots$ – независимые случайные величины, имеющие одинаковое стандартное нормальное распределение. Символ $\circ$ обозначает произведение независимых случайных величин. Подобные последовательности объекты рассматривались, например, в работах [3, 4, 5]. В указанных работах при весьма жестких условиях исследовались вопросы существования и единственности последовательностей, удовлетворяющих (3), и наличие у этих решений марковского свойства. Мы же сосредоточимся на обсуждении некоторых условий существования нетривиального стационарного распределения для последовательности (3).

Тривиальный пример существования стационарного распределения таков. Пусть $\gamma \in (0,1)$. Предположим, что случайная величина Z_1 имеет стандартное нормальное распределение, $\alpha_n(u) = (\gamma - 1)u$ и $\beta_n(u) \equiv \sqrt{1-\gamma^2}$, $u \in \mathbb{R}$, $n = 2, 3, \ldots$ Тогда, как легко видеть, стационарным распределением последовательности $\{Z_n\}$ будет стандартное нормальное.

Ниже будет показано, что возможен и нетривиальный набор условий, при которых стационарным распределением последовательности $\{Z_n\}$ будет распределение Лапласа. Соотношение (3) представляет собой частный случай процесса авторегрессии первого порядка со случайными коэффициентами. В недавней статье [6] замечено, что такие процессы могут успешно описывать часто наблюдаемое явление “аномальной диффузии”, когда вроде бы есть все предпосылки того, чтобы наблюдаемый временной ряд представлял собой броуновское движение, но распределения реально наблюдаемых приращений имеют более тяжелые хвосты, нежели имеющиеся у нормального (гауссова) закона, но убывающие не степенны́м образом, как у “чисто аномальной диффузии” (обусловленной отсутствием вторых моментов инкрементов), а экспоненциально, как у распределения Лапласа [7, 8, 9, 10, 11]. Поэтому исследование моделей процессов, обосновывающих наличие негауссовых распределений (в частности, лапласовских) у приращений наблюдаемых процессов наряду с практическим (физическим) представляет несомненный теоретический интерес.

Не ограничивая общность, будем считать, что все случайные величины и случайные векторы, участвующие в приводимых ниже построениях, определены на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$. Математическое ожидание по отношению к вероятностной мере P будем обозначать E.

Стандартную нормальную функцию распределения обозначим $\Phi(x)$,

$$\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(y)dy, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Пусть L – случайная величина, имеющая распределение Лапласа с плотностью $\lambda(x)$ (см. (1)). Несложно видеть, что $\mathsf{E}L = 0$, $\mathsf{D}L = 2$ и $|L| \stackrel{d}{=} E$, где E – случайная величина с показательным распределением, соответствующим плотности $p(x) = e^{-x}$, $x \geqslant 0$. Несложно убедиться в справедливости представления

$$L \stackrel{d}{=} X \circ \sqrt{2|L|}, \tag{4}$$

где символ $\circ$ обозначает произведение *независимых* случайных величин (см., например, [12]. В терминах плотностей, соотношение (4) имеет вид

$$\lambda(x) \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} e^{-|x|} = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2z}} \varphi\Big(\frac{x}{\sqrt{2z}}\Big) e^{-z} dz = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{z}} \exp\Big\{-\frac{x^2}{4z}\Big\} e^{-z} dz, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

2 Условия существования стационарного распределения процесса авторегрессии первого порядка со случайными коэффициентами в одномерном случае

Обозначим $P_n(x) = \mathsf{P}(Z_n < x)$. Тогда из (3) вытекает, что

$$P_{n+1}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi\Big(\frac{x - u - \alpha_{n+1}(u)}{\beta_{n+1}(u)}\Big) dP_n(u) \tag{6}$$

Лемма 1. *Пусть $\beta(u) > 0$ – некоторая функция. Справедливо неравенство*

$$\sup_x \Big| P_{n+1}(x) - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi\Big(\frac{x}{\beta(u)}\Big) dP_n(u) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathsf{E} \frac{|\alpha_{n+1}(Z_n) + Z_n|}{\beta(Z_n)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \mathsf{E} \Big| \max\Big\{\frac{\beta_{n+1}(Z_n)}{\beta(Z_n)}, \frac{\beta(Z_n)}{\beta_{n+1}(Z_n)}\Big\} - 1 \Big| \Big\}. \tag{7}$$

Доказательство. Несложно видеть, что

$$\Big| P_{n+1}(x) - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi\Big(\frac{x}{\beta(u)}\Big) dP_n(u) \Big| =$$

$$= \Big| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi\Big(\frac{x - u - \alpha_{n+1}(u)}{\beta_{n+1}(u)}\Big) dP_n(u) - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi\Big(\frac{x}{\beta(u)}\Big) dP_n(u) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi\Big(\frac{x - u - \alpha_{n+1}(u)}{\beta_{n+1}(u)}\Big) dP_n(u) - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi\Big(\frac{x - u - \alpha_{n+1}(u)}{\beta(u)}\Big) dP_n(u) \Big| +$$

$$+ \Big| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi\Big(\frac{x - u - \alpha_{n+1}(u)}{\beta(u)}\Big) dP_n(u) - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi\Big(\frac{x}{\beta(u)}\Big) dP_n(u) \Big| \stackrel{def}{=} I_1 + I_2. \tag{8}$$

Обозначим $y = y(x, u) = x - u - \alpha_{n+1}(u)$. С помощью неравенства (3.3) в книге [13] (с. 143) получаем

$$I_1 \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big| \Phi\Big(\frac{y}{\beta_{n+1}(u)}\Big) - \Phi\Big(\frac{y}{\beta(u)}\Big) \Big| dP_n(u) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big| \max\Big\{\frac{\beta_{n+1}(u)}{\beta(u)}, \frac{\beta(u)}{\beta_{n+1}(u)}\Big\} - 1 \Big| dP_n(u) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \mathsf{E} \Big| \max\Big\{\frac{\beta_{n+1}(Z_n)}{\beta(Z_n)}, \frac{\beta(Z_n)}{\beta_{n+1}(Z_n)}\Big\} - 1 \Big|. \tag{9}$$

Рассмотрим I_2. С помощью неравенства (3.4) в книге [13] (с. 143) получаем

$$I_2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\alpha_{n+1}(u)+u|}{\beta(u)} dP_n(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathsf{E} \frac{|\alpha_{n+1}(Z_n)+Z_n|}{\beta(Z_n)}. \tag{10}$$

Теперь утверждение леммы следует из (9), (10) и (8). Лемма доказана.

Замечание 1. *Из доказательства Леммы 1 вытекает, что справедлива более грубая оценка*

$$\sup_x \left| P_{n+1}(x) - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi\Big(\frac{x}{\beta(u)}\Big) dP_n(u) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_u \frac{|\alpha_{n+1}(u)+u|}{\beta(u)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \sup_u \left| \max\Big\{ \frac{\beta_{n+1}(u)}{\beta(u)},\, \frac{\beta(u)}{\beta_{n+1}(u)} \Big\} - 1 \right|. \tag{11}$$

Эта оценка является менее устойчивой по отношению к поведению хвостов распределений случайных величин Z_n, приписывая одинаковую важность всем возможным значениям этих случайных величин независимо от их вероятностей (сколь бы малыми эти вероятности ни были).

Хотя оценка, приведенная в Замечании 1 является более грубой, нежели оценка, приведенная в Лемме 1, она поясняет "физический" смысл следующих условий.

В качестве $\beta(u)$, фигурирующей в Лемме 1, рассмотрим функцию $\beta(u) = \sqrt{2|u|}$ и предположим, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E} \frac{|\alpha_{n+1}(Z_n)+Z_n|}{\sqrt{2|Z_n|}} = 0 \tag{12}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E} \left| \max\Big\{ \frac{\beta_{n+1}(Z_n)}{\sqrt{2|Z_n|}},\, \frac{\sqrt{2|Z_n|}}{\beta_{n+1}(Z_n)} \Big\} - 1 \right| = 0. \tag{13}$$

Очевидно, что условия (12) и (13) вытекают из более сильных условий

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{u\in\mathbb{R}} \frac{|\alpha_n(u)+u|}{\sqrt{2|u|}} = 0 \tag{14}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{u\in\mathbb{R}} \left| \max\Big\{ \frac{\beta_n(u)}{\sqrt{2|u|}},\, \frac{\sqrt{2|u|}}{\beta_n(u)} \Big\} - 1 \right| = 0. \tag{15}$$

Замечание 2. *Очевидно, что если условие* (13) *выполнено, то условие* (12) *эквивалентно условию*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E} \frac{|\alpha_{n+1}(Z_n)+Z_n|}{\beta_{n+1}(Z_n)} = 0, \tag{16}$$

которое, естественно, вытекает из более сильного условия

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{u\in\mathbb{R}} \frac{|\alpha_n(u)+u|}{\beta_n(u)} = 0. \tag{17}$$

Теорема 1. *Предположим, что для каждого $x \in \mathbb{R}$ существует предел*

$$P_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x) \tag{18}$$

и выполнены условия (12) *и* (13). *Тогда распределение Лапласа с плотностью* (1) *является стационарным распределением последовательности* (3).

Доказательство. Из условий (12), (13) и Леммы 1 с $\beta(u) \equiv \sqrt{2|u|}$ вытекает, что

$$P_\infty(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{2|u|}}\Big) dP_\infty(u). \tag{19}$$

Пусть Y – случайная величина с функцией распределения $P_\infty(x)$. Тогда (19) можно переписать в следующем виде:

$$Y \stackrel{d}{=} X \circ \sqrt{2|Y|}. \tag{20}$$

Сравнив (20) и (4) заключаем, что распределение Лапласа с плотностью (1) удовлетворяет уравнению (19). Таким образом, если выполнены условия (12) и (13) (или (16) и (13)), то одним из решений уравнения (19) является функция распределения

$$P_\infty(x) \equiv \Lambda(x)$$

(см. (2)). Теорема доказана.

Нелишне еще раз отметить, что нормальное распределение имеет максимальную энтропию среди всех распределений, носителем которых является все $\mathbb{R}^d$, имеющих конечный второй момент, а показательное распределение имеет максимальную энтропию среди всех распределений, носителем которых является $\mathbb{R}_+$, имеющих конечное математическое ожидание.

Обозначим

$$\Delta_n = \sup_x |P_n(x) - \Lambda(x)|,$$

$$\delta_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_{u\in\mathbb{R}} \frac{|\alpha_n(u) + u|}{\sqrt{2|u|}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \sup_{u\in\mathbb{R}} \Big| \max\Big\{\frac{\beta_n(u)}{\sqrt{2|u|}}, \frac{\sqrt{2|u|}}{\beta_n(u)}\Big\} - 1\Big|.$$

Теорема 2. *Для любого* $n \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$\Delta_{n+1} \leqslant \delta_{n+1} + \Delta_n. \tag{21}$$

Доказательство. Для $u \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ обозначим $a_n(u) = u + \alpha_n(u)$. При каждом $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$|P_{n+1}(x) - \Lambda(x)| = \Big| \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\Big(\frac{x - a_{n+1}(u)}{\beta_{n+1}(u)}\Big) dP_n(u) - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{2|u|}}\Big) d\Lambda(u) \Big| =$$

$$= \Big| \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\Big(\frac{x - a_{n+1}(u)}{\beta_{n+1}(u)}\Big) dP_n(u) - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{2|u|}}\Big) dP_n(u) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{2|u|}}\Big) dP_n(u) - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{2|u|}}\Big) d\Lambda(u) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \Big| \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\Phi\Big(\frac{x - a_{n+1}(u)}{\beta_{n+1}(u)}\Big) - \Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{2|u|}}\Big)\Big] dP_n(u) \Big| + \Big| \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{2|u|}}\Big) d\big[P_n(u) - \Lambda(u)\big] \Big| \stackrel{def}{=} I_1 + I_2.$$

Величину I_1 оценим с помощью (11):

$$I_1 \leqslant \delta_{n+1}. \tag{22}$$

Величину I_2 оценим, интегрируя по частям:

$$I_2 \leqslant \left| \Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{2|u|}}\Big)\big[P_n(u) - \Lambda(u)\big]\Big|_{u=-\infty}^{\infty} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big[P_n(u) - \Lambda(u)\big] d_u \Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{2|u|}}\Big) \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big[P_n(u) - \Lambda(u)\big] d_u \Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{2|u|}}\Big) \right| \leqslant \Delta_n. \tag{23}$$

Таким образом, из (22) и (23) вытекает неравенство (21). Теорема доказана.

Замечание 3. *Предположим, что $\delta_n = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда из Теоремы 2 вытекает, что $\Delta_n \leqslant \Delta_1$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, при $\alpha_n(u) \equiv -u$ и $\beta_n(u) \equiv \sqrt{2|u|}$ стационарный режим процесса Z_n обладает устойчивостью: малые отклонения распределения случайной величины Z_1 от распределения Лапласа гарантируют малые отклонения распределения величины Z_n от распределения Лапласа при любом n.*

3 Физическая интерпретация условий стационарности распределения Лапласа

Соотношение (19) по сути является уравнением Фредгольма. Теорема 1 устанавливает, что распределения Лапласа (1) оказывается решением этого уранения. Это распределение, имеющее экстремальные энтропийные свойства (см. выше), имеет прозрачный физический смысл. А именно, оно возникает, когда происходит установление физических характеристик или стационарность в геофизике. Условия, при которых такое установление происходит, физически состоятельны и легко проверяются, а именно, асимптотически среднее значение процесса относительно достигнутого значения процесса на предыдущем шаге равно нулю, то есть процесс «в среднем» не растет относительно тренда, более точно, для любого фиксированного значения процесса, асимптотически по времени условное среднее, нормированное корнем квадратным самого значения, стремится к нулю. Равновесие обычно фиксируется, когда суммарная кинетическая энергия течений в океане не меняется во времени, или меняется в пределах заданного интервала. Это условие как раз и выражено соотношениями (12) или (16). Эти условия могут считаться критерием достижения динамического равновесия модели.

Одновременно дисперсия процесса также соответствует дисперсии (энергии) предыдущего значения, то есть энергия также не меняется.

4 Многомерный случай. Эллиптически контурированное многомерное распределение Лапласа

Пусть $d \in \mathbb{N}$. В данном разделе мы будем рассматривать случайные векторы, принимающие значения в d-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. Символ $\boldsymbol{x}$ будет обозначать вектор-столбец $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)^\top$. Евклидова норма вектора $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ будет обозначаться $\|\boldsymbol{x}\|$. Вектор, все координаты которого равны нулю, будет обозначаться $\mathbf{0}$.

Пусть Σ – симметричная положительно определенная матрица размера $d\times d$. Нормальное распределение на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ с нулевым вектором математических ожиданий и ковариационной матрицей Σ будет обозначаться $\mathfrak{N}_{d,\Sigma}$. Это распределение задается его плотностью

$$\varphi_{d,\Sigma}(\boldsymbol{x}) = \frac{\exp\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top\Sigma^{-1}\boldsymbol{x}\}}{(2\pi)^{d/2}|\Sigma|^{1/2}}, \qquad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d.$$

Характеристическая функция $\mathfrak{f}_{\boldsymbol{X}_{d,\Sigma}}(\boldsymbol{t})$ случайного вектора $\boldsymbol{X}_{d,\Sigma} = (X_1,\ldots,X_d)^\top$ такого, что $\mathcal{L}(\boldsymbol{X}_{d,\Sigma}) = \mathfrak{N}_{d,\Sigma}$, имеет вид

$$\mathfrak{f}_{\boldsymbol{X}_{d,\Sigma}}(\boldsymbol{u}) \equiv \mathsf{E}\exp\{i\boldsymbol{u}^\top\boldsymbol{X}_{d,\Sigma}\} = \exp\big\{-\tfrac{1}{2}\boldsymbol{u}^\top\Sigma\boldsymbol{u}\big\}, \quad \boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^d. \tag{24}$$

Рассмотрим многомерный эллиптически контурированный аналог одномерного распределения Лапласа, проекция которого на любую прямую, проходящую через начало координат, имеет одномерное распределение Лапласа. С этой целью формально перенесем свойство одномерного распределения Лапласа быть масштабной смесью нормальных законов (1) на многомерный случай и назовем распределение d-мерного случайного вектора $\boldsymbol{L}_{d,\Sigma} = (L_1,\ldots,L_d)^\top$, определяемого соотношением

$$\boldsymbol{L}_{d,\Sigma} = \sqrt{2E}\circ\boldsymbol{X}_{d,\Sigma}, \tag{25}$$

многомерным распределением Лапласа. Поскольку скалярные масштабные смеси многомерных нормальных законов являются эллиптически контурированными (см. [14, 15, 16]), многомерное распределение Лапласа, определенное соотношением (25), эллиптически контурировано.

Характеристическая функция $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{L}_{d,\Sigma}}(\boldsymbol{t})$ случайного вектора $\boldsymbol{L}_{d,\Sigma}$, определяемого соотношением (25), имеет вид

$$\mathfrak{h}_{\boldsymbol{L}_{d,\Sigma}}(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{1+\boldsymbol{t}^\top\Sigma\boldsymbol{t}}, \quad \boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^d.$$

Плотность $\lambda_{d,\Sigma}(\boldsymbol{x})$ случайного вектора $\boldsymbol{L}_{d,\Sigma}$ принято записывать в виде

$$\lambda_{d,\Sigma}(\boldsymbol{x}) = \frac{\big(\boldsymbol{x}^\top\Sigma^{-1}\boldsymbol{x}\big)^{(2-d)/4}}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{|\Sigma|}}K_{1-d/2}\big(\sqrt{\boldsymbol{x}^\top\Sigma^{-1}\boldsymbol{x}}\big), \tag{26}$$

где $K_\nu(u)$ – модифицированная функция Бесселя третьего рода с индексом ν:

$$K_\nu(u) = \frac{u^\nu}{2^{\nu+1}}\int\limits_0^\infty y^{-\nu-1}\exp\Big\{-y-\frac{u^2}{4y}\Big\}dy, \quad u>0.$$

Можно убедиться, что при $d=1$ плотность (26) совпадает с (1).

Условие (25) допускает следующую интерпретацию. Введенное таким образом многомерное распределение Лапласа соответствует многомерному броуновскому движению с нулевым сносом и ковариационной матрицей Σ, рассматриваемому (остановленному) в случайный момент времени, имеющий показательное (экспоненциальное) распределение.

Свойства многомерного распределения Лапласа (и его обобщений) описаны, например, в работах [19, 20]. Нас особенно интересует следующее свойство линейных комбинаций координат случайного вектора $\boldsymbol{L}_{d,\Sigma} = (L_1,\ldots,L_d)^\top$.

Лемма 2 [19, 20]. *Для любого вектора $\boldsymbol{a}^\top = (a_1,a_2,\ldots,a_d)^\top\in\mathbb{R}^d$ случайная величина $L_{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{a}^\top\boldsymbol{L}_{d,\Sigma} = \sum_{j=1}^d a_jL_j$ имеет распределение Лапласа с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2 = 2\boldsymbol{a}^\top\Sigma\boldsymbol{a}$.*

5 Многомерный случай. Условия существования стационарного распределения процесса авторегрессии первого порядка со случайными коэффициентами в многомерном случае

Пусть $\boldsymbol{Z}_1$ – произвольный случайный вектор. Рассмотрим последовательность случайных векторов $\{\boldsymbol{Z}_n\}_{n\geqslant 1}$, задаваемую рекуррентным соотношением

$$\boldsymbol{Z}_{n+1} = \boldsymbol{Z}_n + \alpha_{n+1}(\boldsymbol{Z}_n) + \beta_{n+1}(\boldsymbol{Z}_n) \circ \boldsymbol{X}_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{27}$$

где $\{\boldsymbol{X}_n\}_{n\geqslant 1}$ – последовательность независимых d-мерных случайных векторов, имеющих одно и то же нормальное распределение $\mathfrak{N}_{d,\Sigma}$ с нулевым вектором математических ожиданий и ковариационной матрицей Σ, $\alpha_{n+1}(\boldsymbol{u})$ – вектор-функция, $\alpha_{n+1}(\boldsymbol{u}) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, $\beta_{n+1}(\boldsymbol{u})$ – положительная функция, $\beta_{n+1}(\boldsymbol{u}) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$.

Обозначим $P_n(A) = \mathsf{P}(\boldsymbol{Z}_n \in A)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Тогда из (22) вытекает, что для произвольного множества $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ справедливо соотношение

$$P_{n+1}(A) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathsf{P}\big(\beta_{n+1}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{X}_{n+1} + \boldsymbol{u} + \alpha_{n+1}(\boldsymbol{u}) \in A\big) P_n(d\boldsymbol{u}) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathfrak{N}_{d,\Sigma}\big((\beta_{n+1}(\boldsymbol{u}))^{-1}(A - \boldsymbol{u} - \alpha_{n+1}(\boldsymbol{u}))\big) P_n(d\boldsymbol{u}). \tag{28}$$

Пусть вектор $\boldsymbol{a}^\top = (a_1, a_2, \ldots, a_d)^\top \in \mathbb{R}^d$ таков, что

$$\boldsymbol{a}^\top \Sigma \boldsymbol{a} = 1. \tag{29}$$

Предположим, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^d} \frac{\|\alpha_n(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u}\|}{\sqrt{2|\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{u}|}} = 0 \tag{30}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^d} \Big| \max\Big\{ \frac{\beta_n(\boldsymbol{u})}{\sqrt{2|\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{u}|}}, \frac{\sqrt{2|\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{u}|}}{\beta_n(\boldsymbol{u})} \Big\} - 1 \Big| = 0. \tag{31}$$

Замечание 4. *Очевидно, что если условие* (31) *выполнено, то условие* (30) *эквивалентно условию*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^d} \frac{\|\alpha_n(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u}\|}{\beta_n(\boldsymbol{u})} = 0. \tag{32}$$

Теорема 3. *Предположим, что для каждого $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ существует предел*

$$P_\infty(A) = \lim_{n\to\infty} P_n(A)$$

и выполнены условия (30) *и* (31), *причем вектор $\boldsymbol{a}$ удовлетворяет условию* (29). *Тогда многомерное эллиптически контурированное распределение Лапласа с плотностью* (26) *является стационарным распределением последовательности* (27) *в том смысле, что если $P_\infty(A) = \mathsf{P}(\boldsymbol{L}_{d,\Sigma} \in A)$, то*

$$P_\infty(A) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathsf{P}\big(\sqrt{2|\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{u}|}\boldsymbol{X}_{d,\Sigma} \in A\big) P_\infty(d\boldsymbol{u}) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathfrak{N}_{d,\Sigma}\big((2|\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{u}|)^{-1/2} A\big) P_\infty(d\boldsymbol{u}) \tag{33}$$

для любого $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{Y}$ – случайный вектор с распределением P_∞. Тогда правое равенство (33) можно переписать в следующем виде:

$$\boldsymbol{Y} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{X}_{d,\Sigma} \circ \sqrt{2|\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{Y}|}. \tag{34}$$

Теперь заметим, что если случайный вектор $\boldsymbol{Y}$ имеет многомерное распределение Лапласа (26), то есть $\boldsymbol{Y} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{L}_{d,\Sigma}$, то все линейные комбинации его компонент, в том числе $\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{L}_{d,\Sigma}$, имеют одномерное распределение Лапласа (см. Лемму 2). При этом из Леммы 2 и условия (29) вытекает, что

$$\mathsf{D}\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{L}_{d,\Sigma} = 2.$$

Стало быть, случайная величина $|\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{L}_{d,\Sigma}|$ имеет стандартное показательное распределение, то есть $|\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{L}_{d,\Sigma}| \stackrel{d}{=} E$. Поэтому в соответствии с определением (25) мы замечаем, что произведение в правой части (34) имеет многомерное распределение Лапласа (26), совпадающее с распределением случайного вектора в левой части (34). Таким образом, если выполнены условия (29), (30) и (31), то многомерное распределение Лапласа с плотностью (26) является стационарным распределением последовательности $\{\boldsymbol{Z}_n\}_{n\geqslant 1}$, задаваемой рекуррентным соотношением (27). Теорема доказана.

6 Заключение

В данной работе приводится пример нетривиального предельного распределения случайных последовательностей, задаваемых уравнением авторегрессии первого порядка со случайными коэффициентами. Такие модели часто используются в геофизике, финансовой математике, технике и других областях. Хорошо известно, что возможным предельным распределением является нормальное (гауссово) распределение, но другие распределения, а тем более условия их существования не были известны.

В настоящей работе показано, что в указанной схеме как в одномерном случае, так и в многомерной ситуации могут возникать и другие распределения, в частности распределение Лапласа. Это новый результат, который имеет как теоретическое, так и чисто практическое значение. С теоретической точки зрения приведенные в статье результаты дают некоторые объяснение тому, как и почему предложенные в тексте условия приводят к распределению Лапласа, и как будут вести себя распределения в предельном режиме при различном выборе коэффициентов регрессии. Практически же предложенные распределения могут помочь в оценках различных в том числе геофизических характеристик, быть основой для критериев согласия при проверке статистических гипотез о существовании предельного режима, оценки его параметров. Также следует отметить, что функция распределения Лапласа непрерывна, но не имеет производной в точке $x = 0$, что физически может быть вполне оправдано, так как существует много природных явлений, например фронты в океане и атмосфере, где на небольших пространственных масштабах происходят резкие скачки физических характеристик. Такие процессы не описываются гладкими функциями, поэтому предложенное распределение может помочь в адекватном количественном описании и объяснении соответствующих процессов и явлений.

Список литературы

[1] Belyaev K. P., Gorshenin A. K., Korolev V. Yu., Osipova A. A. Comparison of statistical approaches for reconstructing random coefficients in the problem of stochastic modeling of air–sea heat flux increments // Mathematics. 2024. **12**. N 2. Art. 288.

[2] *Беляев К. П., Горшенин А. К., Королев В. Ю., Плеханов А. Д.* Статистический анализ внутри- и межгодовой изменчивости экстремальных значений явных и скрытых потоков тепла в Северной Атлантике за 1979–2021 гг. // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана, 2022. Т. 58ю Вып. 6. С. 720–736.

[3] *Donati-Martin C.* Equations differentielles stochastiques dans iw avec conditions aux bords // Stochastics and Stochastics Reports, 1991. Vol. 35. P. 143–173.

[4] *Nualart D., Pardoux E.* Boundary value problems for stochastic differential equations // Ann. Probab., 1991. Vol. 19. P. 1118–1144.

[5] *Ferrante M., Nualart D.* On the Markov property of a stochastic difference equation // Stochastic Processes and their Applications, 1994. Vol. 52. P. 239–250.

[6] *Ślęzak J., Burnecki K., Metzler R.* Random coefficient autoregressive processes describe Brownian yet non-Gaussian diffusion in heterogeneous systems // New J. Phys., 2019. Vol. 21. Art. 073056. DOI: 10.1088/1367-2630/ab3366

[7] *Wang B, Anthony S, Bae S and Granick S.* Anomalous yet Brownian // Proc. Nat Acad. Sci. USA, 2009. 106. 15160

[8] *Wang B, Kuo J, Bae S and Granick S.* When Brownian diffusion is not Gaussian // Nat. Mater., 2012. Vol. 11. P. 481.

[9] *Bhattacharya S, Sharma D, Saurabh S, De S, Sain A, Nandi A and Chowdhury A.* Plasticization of polyvinylpyrrolidone thin films under ambient humidity: insight from single-molecule tracer diffusion dynamics // J. Phys. Chem. B, 2013. Vol. 117. P. 7771.

[10] *Hapca S, Crawford J Wand Young IM.* Anomalous diffusion of heterogeneous populations characterized by normal diffusion at the individual level // J. R. Soc. Interface, 2009. Vol. 6. P. 111.

[11] *Cherstvy AG, Nagel O, BetaCand Metzler R.* Non-Gaussianity, population heterogeneity, and transient superdiffusion in the spreading dynamics of amoeboid cells // Phys. Chem. Chem. Phys., 2018. Vol. 20. P. 23034

[12] *Королев В. Ю., Бенинг В. Е., Шоргин С. Я.* Математические основы теории риска. 2-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011.

[13] *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. – М.: Наука, 1972.

[14] *Cambanis S., Huang S., Simons G.* On the theory of elliptically contoured distributions // J. of Multvariate Analysis, 1981. Vol. 11. P. 365–385.

[15] *Fang K., Zhang Y.* Generalized Multivariate Analysis. – Beijing: Springer-Verlag, 1990.

[16] *Fang K. T., Kotz S., Ng K. W.* Symmetric Multivariate and Related Distributions. – London: Chapman and Hall, 1990.

[17] *Teicher H.* Identifiability of mixtures // Annals of Mathematical Statistics, 1961. Vol. 32. P. 244–248.

[18] *Kapur J. N.* Maximum-Entropy Models in Science and Engineering. New York: Wiley, 1989.

[19] *Kotz S., Kozubowski T. J., Podgórski K.* The Laplace Distribution and Generalizations: A Revisit with Applications to Communications, Economics, Engineering and Finance, – Boston: Birkhäuser, 2001.

[20] *Kozubowski T. J., Podgórski K., Rychlik I.* Multivariate generalized Laplace distribution and related random fields // Journal of Multivariate Analysis Volume 113, January 2013, Pages 59-72. DOI: 10.1016/j.jmva.2012.02.010