# О пространственном квантовании углового момента в физических кубитах

Ю.А. Спиричев
Научно-исследовательский и конструкторский институт радиоэлектронной техники,
г. Заречный, Пензенская обл., Россия

**Аннотация**: Показана причина пространственного квантования проекции углового момента в магнитном поле. Квантовый «магический» угол прецессии углового момента соответствует экстремальной энергии взаимодействия его магнитного момента с внешним магнитным полем и индуцированным прецессией магнитным моментом, что приводит к образованию дискретных уровней энергии в атомах и ядрах с образованием физических кубитов. Сделан вывод по устойчивости физических кубитов к помехам в зависимости от квантового числа и угловой скорости прецессии углового момента.
**Ключевые слова:** физический кубит, квантование углового момента, магический угол, магнитный момент, магнитный диполь.

## Введение

Угловой момент является фундаментальной сохраняющейся физической величиной, связанной со свойствами пространства-времени. В квантовой физике эта величина, наряду с электрическим зарядом, определяет внутренние связи материи, так как угловым моментом обладают ее элементарные структурные части – протон, нейтрон и электрон. От величины углового момента зависят энергетические уровни ядер, атомов и молекул. Одним из проявлений углового момента является спин электрона и других элементарных частиц, который считается их внутренним квантово-механическим свойством, не имеющим классической интерпретации. Главным свойством углового момента в микромире является его пространственное квантование, которое заключается в том, что проекция углового момента на любое выбранное направление может принимать только дискретные значения кратные целой или полуцелой постоянной Планка [1-5].

В квантовой физике угловой момент неразрывно связан с магнитным моментом через гиромагнитное отношение. Вектор магнитного момента всегда параллелен вектору углового момента. Пространственное квантование углового момента проявляется в виде его прецессии вокруг вектора внешнего магнитного поля, задающего выбранное направление наблюдения. В результате взаимодействия магнитного момента с внешним магнитным полем появляется момент сил, стремящийся повернуть магнитный и, соответствующий ему угловой момент, по направлению вектора внешнего поля, что приводит к прецессии углового момента. Прецессия происходит под строго определенным углом, называемым «магическим», а проекция углового момента на направление внешнего поля имеет дискретную величину, независящую от величины внешнего магнитного поля. Изменение величины внешнего магнитного поля приводит только к изменению угловой скорости прецессии (частоты Лармора) [1-5] под «магическим» углом.

В квантовой физике причиной пространственного квантования углового момента принято считать волновую природу частиц, симметрии пространства-времени, принцип неопределенности Гейзенберга, не коммутативность квантовых операторов, и др. Все эти причины можно свести к тому, что существуют энергетически устойчивые дискретные состояния, как для отдельных квантовых частиц, так и для квантовых систем. Таким образом, в

настоящее время однозначная причина пространственного квантования углового момента и существования энергетически устойчивых квантовых состояний не названа, и ее определяют, как общее квантовое свойство материи.

Теория углового момента приобрела особенно важное практическое значение в связи с созданием квантовых компьютеров. В проектах квантовых компьютеров в качестве физической реализации квантовых ячеек (кубитов) часто используется орбитальный или спиновой угловой момент ядер, атомов (ионов) [6-10]. Физическое развитие квантовых компьютеров идет по пути создания квантовых регистров с постоянно увеличивающимся числом кубитов [11]. В связи с этим, уточнение причины пространственного квантования углового момента при формировании физических кубитов, имеет не только теоретическое, но и практическое значение.

## 2 Угловой и магнитный моменты и «магические» углы

Согласно общим принципам квантовой механики проекция P углового момента **L** на направление магнитного поля $\mathbf{B}_0$ равна постоянной Планка, умноженной на целое, или полуцелое квантовое число J, которое для электрона, протона и нейтрона равно 1/2, а для орбитального углового момента принимает целочисленные значения 0, 1, 2, 3… Далее не будем различать спин и орбитальный угловой момент и будем оперировать одним термином - угловой момент. Проекции углового момента на другие направления не определены в соответствии принципом неопределенности Гейзенберга, а с классической точки зрения они не определены из-за прецессии вектора **L**, когда другие его проекции осциллируют и на периоде прецессии равны нулю. Квадрат углового момента **L** определяется выражением [1-3]:

$$L^2 = \hbar^2 J(J+1) \qquad (1)$$

Здесь ħ - приведенная постоянная Планка. Проекцию P углового момента на направление внешнего магнитного поля можно записать в виде:

$$P = \hbar L\sqrt{\frac{J}{J+1}} = \hbar L\cos\alpha \text{ , где} \qquad \cos\alpha = \sqrt{\frac{J}{J+1}} \qquad (2)$$

Таким образом, квантовая система в магнитном поле всегда прецессирует под «магическим» углом α к этому полю независимо от его направления, а проекции магнитного и углового момента на направление магнитного поля всегда являются дискретными величинами. «Магический» угол также является постоянным, а его величина характеризует квантовую систему, так как этот угол зависит от значения квантового числа J следующим образом:

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{J}{J+1}} \qquad \text{или} \qquad J = \cot^2\alpha \qquad (3)$$

Для спина электрона, протона и нейтрона с квантовым числом J=1/2 «магический» угол прецессии равен $\pm 54{,}73^o$. Таким образом, каждому квантовому числу J соответствует (3) свой «магический» угол $\pm$ α. С увеличением квантового числа «магический» угол уменьшается, стремясь к нулю. При рассмотрении только углового момента физическая природа связи (3) «магического» угла прецессии с квантовым числом остается не раскрытой.

Угловой и магнитный моменты представляют собой связанную магнитомеханическую квантовую систему, функционирующую во внешнем магнитном поле. Для электрона, протона или нейтрона магнитный момент представляет собой магнитный диполь, создающий в пространстве собственное магнитное поле. В классическом представлении, в декартовой

системе координат компоненты магнитной индукции поля диполя на удалении от его центра имеют вид (здесь магнитный момент M диполя ориентирован по оси координат Z) [5, 12]:

$$B_x = M_z \frac{3\sin\theta\cos\theta}{r^3} \qquad B_y = M_z \frac{3\sin\theta\cos\theta}{r^3} \qquad B_z = M_z \frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3} \tag{4}$$

Здесь $B_x$, $B_y$, $B_z$ и $M_z$ компоненты векторов магнитной индукции и магнитного момента, соответственно, r - радиус-вектор от центра диполя до рассматриваемой точки пространства, θ – угол между осью координат Z и радиус-вектором r до точки наблюдения. Магнитный диполь, как и угловой момент, синхронно прецессируют вокруг вектора внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_0$, поэтому компоненты магнитного момента $M_x$, $M_y$, не определены, а проекция $M_z$ квантована. Из выражения для компоненты магнитного поля диполя $B_z = M_z \frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3}$ следует, что при условии $(3\cos^2\theta - 1) = 0$ угол θ равен «магическому» углу прецессии углового момента α. Во всех точках этого направления компонента магнитной индукции $B_z$ диполя переходит через ноль и меняет знак на противоположный. Из этого можно сделать вывод о том, что физической причиной появления «магического» угла прецессии для углового момента и, соответственно, его пространственного квантования, является особенность пространственной формы собственного поля связанного с ним магнитного момента (магнитного диполя). Величину проекции вектора магнитной индукции магнитного момента для различных квантовых чисел J и углов θ можно записать в виде:

$$B_z = \frac{m((n+2)\cos^2\theta - n)}{R^{(n+2)}}, \text{ где } n=2J \tag{5}$$

Это выражение показывает изменение пространственной формы магнитного поля магнитного момента для различных квантовых чисел.

### 3 Пространственное квантование углового момента и энергия

Энергетически устойчивые квантовые состояния для отдельных квантовых частиц, так и для квантовых систем существуют, если существуют особые точки для энергии в этих состояниях. Квантование спина электронов и других частиц происходит во внешнем магнитном поле. Рассмотрим энергию взаимодействия магнитного момента (магнитного диполя) с внешним магнитным полем.

В декартовой системе координат энергия взаимодействия U магнитного диполя, имеющего момент **M,** с внешним магнитным полем с индукцией $\mathbf{B}_0$ равна скалярному произведению магнитного момента **M** диполя на внешнее магнитное поле $\mathbf{B}_0$ [5]:

$$U = \boldsymbol{M}\boldsymbol{B}_0 = M_x B_{0x} + M_y B_{0y} + M_z B_{0z} \tag{6}$$

Выберем систему координат так, что **M** направлен по оси координат Z тогда его другие компоненты по осям X и Y равны нулю, а модуль магнитного момента M равен $M_z$. Тогда энергия взаимодействия равна $U = M_z B_{0z}$. Запишем $B_z$ компоненту собственного магнитного поля **B** магнитного момента **M** (4):

$$B_z = M_z \frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3} \tag{7}$$

Поскольку магнитный момент, вместе с угловым моментом прецессирует, то другие компоненты магнитного момента M осциллируют и на интервале периода прецессии равны нулю. Соответственно равны нулю и компоненты магнитной индукции $B_x$ и $B_y$. Из выражения (7) для компоненты $B_z$ запишем выражение для компоненты модуля магнитного момента $M_z$ через компоненту его собственной магнитной индукции $B_z$:

$$M_z = \frac{B_z r^3}{3\cos^2\theta - 1} \qquad (8)$$

Теперь энергию взаимодействия магнитного момента с внешним полем запишем в виде:

$$U = \mathrm{M}_z B_0 \cos\theta = \frac{B_0 B_z r^3 \cos\theta}{3\cos^2\theta - 1} \qquad (9)$$

Из выражения (9) следует, что при величине угла θ, равном «магическому» углу $\theta = \pm\arccos\sqrt{1/3} = \pm 54{,}73^o$ энергия не определена. График функции энергии U имеет точки бесконечного разрыва, при этом энергия асимптотически стремится к $\pm\infty$ с переходом через ноль, а вертикальные асимптоты в этих точках проходят через «магический» угол. На рисунках 1–6 приведены графики изменения энергии U пространственного квантования и компоненты $B_z$ магнитного поля диполя для различных квантовых чисел J (1/2, 1, 3/2, 4) в зависимости от угла θ.

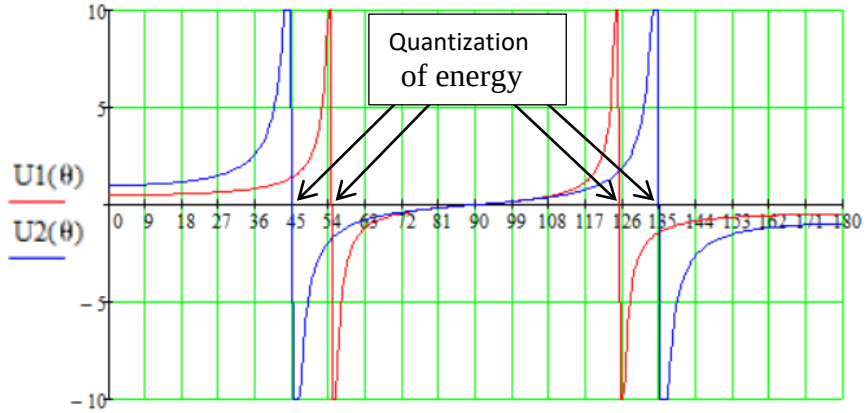



Рис.1 Графики энергии U пространственного квантования для квантоввых чисел J=1/2 и J=1 на интервале 0-180°. «Магические» углы равны 54,73° и 45°, соответственно.

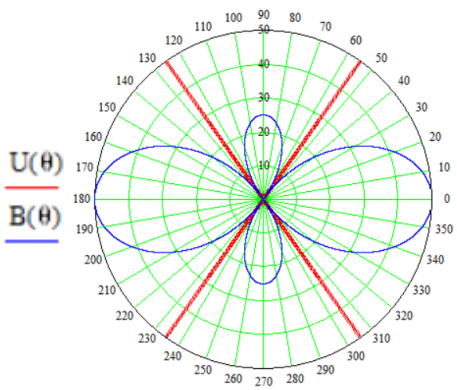



Рис.2 Графики энергии U пространственного квантования и магнитной индукции B в полярных координатах на интервале 0-360° для квантового числа J=1/2. «Магический» угол прецессии 54,73°.

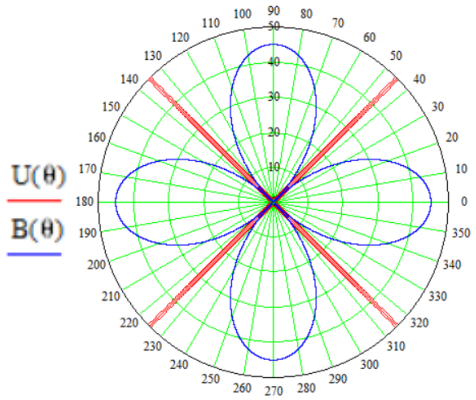



Рис.3 Графики энергии U пространственного квантования и магнитной индукции B в полярных координатах на интервале 0-360° для квантового числа J=1. «Магический» угол прецессии 45°.

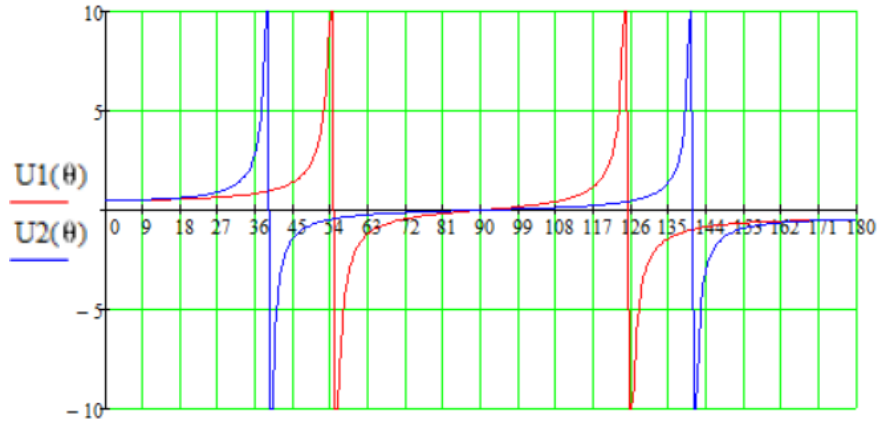



Рис.4 Графики энергии U пространственного квантования для квантоввых чисел J=1/2 и J=3/2 на интервале 0-180°. «Магические» углы равны 54,73° и 39,23°, соответственно.

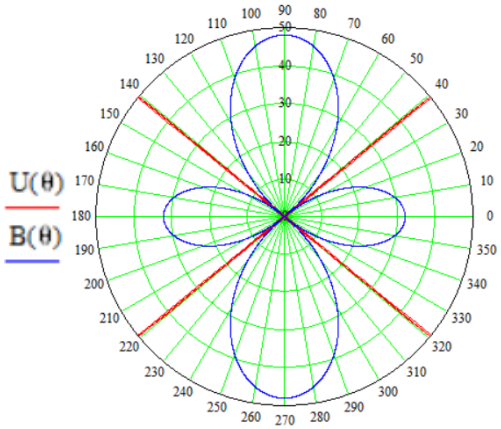



Рис.5 Графики энергии U пространственного квантования и магнитной индукции B в полярных координатах на интервале 0-360° для квантового числа J=3/2. «Магический» угол прецессии 39,23°

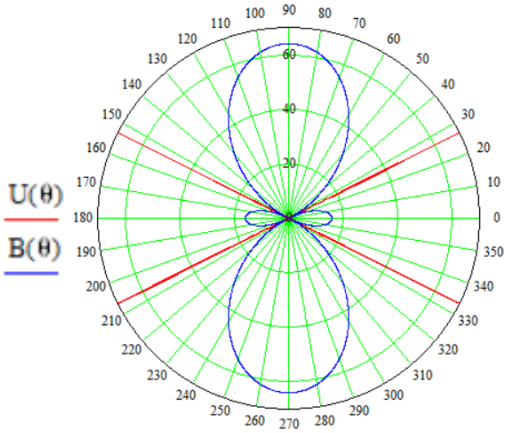



Рис.6 Графики энергии U пространственного квантования и магнитной индукции B в полярных координатах на интервале 0-360° для квантового числа J=4. «Магический» угол прецессии 26,56°.

Из этих графиков следует, что энергия взаимодействия магнитного момента с внешним магнитным полем имеет экстремальные направления, обусловленные особенностями пространственной формы собственного поля магнитного момента, связаной с значением конкретного квантового числа. Это приводит к прецессии углового момента под «магическим» углом независимо от величины внешнего магнитного поля. Вторым фактором, приводящим к пространственному квантованию углового момента является сама прецессия. Поскольку магнитный момент прецессирует вместе с угловым моментом вокруг направления внешнего поля, то эта прецессия, как дополнительный ток, создает вторичный индуцированный магнитный момент направленный параллельно внешнему магнитному полю. Таким образом во время прецессии существует два магнитных момента расположенных под углом друг к другу. Первый, это исходный магнитный момент квантовой частицы или системы, а второй магнитный момент индуцирован прецессией углового момента. Эти два магнитных момента взаимодействуют между собой. Энергия их взаимодействия описывается выражением:

$$W = \frac{M_1 M_2}{r^3}(3\,cos^2\,\theta - 1) \qquad (10)$$

где $M_1$ и $M_2$ , соответственно, исходный и индуцированный прецессией момент. Из этого следует, что энергия их взаимодействия равна нулю, если они находятся под «магическим» углом друг к другу. Таким образом, сама прецессия формирует поворот углового момента именно на «магический» угол, как в наиболее устойчивое состояние этой квантовой системы.

При возрастании квантового числа «магический» угол прецессии стремится к нулю. Из этого можно сделать вывод о том, что максимальной устойчивостью к помехам обладают физические кубиты с малыми квантовыми числами, т.е. с большими «магическими» углами. С возрастанием квантового числа уменьшается пространственный угловой разрыв между состояниями кубита и снижается его помехоустойчивость. Из выражения (10) следует, что помехоустойчивость кубитов также возрастает при увеличении угловой скорости прецесии (частоты Лармора), которая, в свою очередь, возрастает с увеличением магнитной индукции внешнего поля.

## 4 Заключение

Кроме известных причин пространственного квантования углового момента (спинов и орбитальных моментов) в магнитном поле, таких как волновая природа частиц, симметрия пространства-времени, принцип неопределенности Гейзенберга и не коммутативность квантовых операторов, существует еще одна причина, заключающаяся в том, что для энергии квантово-механической системы, образованной угловым моментом и магнитным моментом (магнитным диполем) существуют экстремальные направления. Эти экстремальные направления образуются благодаря особенностям пространственной формы магнитного поля магнитного момента, на которых осевая компонента его магнитного поля меняет знак, переходя через ноль. Кроме того, прецессия углового момента эквивалента дополнительному току, создающему дополнительный индуцированный магнитный момент, направленный параллельно внешнему полю и который взаимодействует с основным магнитным моментом. Энергия их взаимодействия равна нулю при «магическом» угле. При взаимодействии диполя с внешним полем, направление «магического» угла является экстремальным для энергии взаимодействия, а электромагнитные силы взаимодействия магнитного диполя с внешним полем и индуцированным магнитным моментом устанавливают угол прецессии углового момента (спина, орбитального момента) в пространственное положение, соответствующее этим энергетически экстремальным направлениям с образованием физических кубитов. Максимальную устойчивость к внешним помехам имеют кубиты с малыми квантовыми числами, имеющими большой угловой разрыв между состояниями кубитов и максимальной угловой скоростью прецессии углового момента.

## Литература

1 Biedenharn L.C., Louck J.D. Angular Momentum in Quantum Physics. Theory and Application. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1981.
2 Schiff L.I. Quantum Mechanics. MeGraW-Hill, New York. 1955.
3 Messiah A. Quantum Mechanics. North-Holland Publ Co. Amsterdam. 1961.

4 Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. Т. III. Наука, М. 1989.
5 Тикадзуми С. Физика ферромагнетизма. Магнитные свойства вещества. Пер. с японского. Мир. М. 1983.
6 Feynman R. Quantum mechanical computers. Foundations of Physics. Vol. 16. 1986.
7 Atoms make better quantum computers. https://www.ionq.com/technology
8 The fastest path to fault tolerance. https://www.ionq.com/technology
9 Jwo-Sy Chen, Erik Nielsen and others. Benchmarking a trapped-ion quantum computer with 30 qubits. arXiv:2308.05071 [quant-ph]. 2024.
10 Intel's New Chip to Advance Silicon Spin Qubit Research for Quantum Computing https://www.intc.com/news-events/press-releases/detail/1626/intels-new-chip-to-advance-silicon-spin-qubit-research
11 Jay Gambetta. Expanding the IBM Quantum roadmap to anticipate the future of quantum-centric supercomputing. https://www.ibm.com/quantum/blog/ibm-quantum-roadmap-2025
12 Pursell E. Electrisity and Magnetism. Berkeley Physics Course. Volume 2. Harward University.