ФРАКТАЛЫ В СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В. Н. Гладкий*

2 ноября 2026 г.

Аннотация

В статье используются фрактальные функции для получения общего уравнения релятивистского движения частицы в инерциальной системе отсчета. В общем случае релятивистские выражения для закона движения, импульса, энергии, силы описываются фрактальными функциями. Общее уравнение движения в явном виде содержит математическое описание релятивистского замедления времени и сокращения размеров движущегося тела (частицы). При переходе тела (частицы) из одного равновесного состояния ($u_1 = const$) в другое ($u_2 = const$) данные релятивистские эффекты появляются в результате ускоренного движения тела по переходу из одного состояния в другое. В то же время изменение расстояний и скорости хода координатных часов при переходе в другую систему отсчета возникает из-за относительного различия эталонов длины и времени в этих системах отсчета. При этом в каждой из систем отсчета эталоны вводятся по тождественным правилам и на основе тождественных физических явлений. Применение фракталов в специальной теории относительности и полученные при этом результаты являются полностью оригинальными.

1 Введение

Пусть закон движения частицы в инерциальной системе отсчета (ИСО) S имеет вид $\mathbf{r}(t)$. Стандартной задачей для преобразований Лоренца является нахождение закона движения этой частицы $\mathbf{r}'(t')$ в системе S' , движущейся со скоростью $\mathbf{v}$. Для этого необходимо в прямое преобразование координат $\mathbf{r}'(t) = f_1[\mathbf{r}(t), \mathbf{v}, t]$ подставить обратное преобразование времени $t(t') = f_2[\mathbf{r}'(t'), \mathbf{v}, t']$. В результате, в общем случае получается трансцендентное уравнение относительно неизвестной функции $\mathbf{r}'(t')$

$$\mathbf{r}'(t') = f_1\left\{\mathbf{r}\left(f_2\left[\mathbf{r}'(t'), \mathbf{v}, t'\right]\right), \mathbf{v}, f_2\left[\mathbf{r}'(t'), \mathbf{v}, t'\right]\right\}$$

В частном случае равномерного движения частицы $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0 t$ это уравнение будет алгебраическим и из него легко находится аналитическое выражение для функции $\mathbf{r}'(t')$. В общем случае

*email: vgladkiy58@gmail.com ; МТС +375 29 859 23 39

решение уравнения получают численными методами. То есть мы получаем график $\mathbf{r}'(t')$. Аналитического выражения для общего закона движения частицы в ИСО не получено. В статье данная задача решается с помощью фрактальных функций. Такое решение задачи является полностью оригинальным и ни кем ранее не применялось. Аналогичная ситуация с формулами преобразования импульса, энергии и силы. Чтобы получить аналитическое выражение для импульса, энергии и силы в системе S' тоже необходимо использовать фрактальные функции. В статье используется релятивистская система единиц (релятивистское время), когда скорость света $c = 1$, и векторная форма преобразований Лоренца

$$t'(t) = \gamma_v[t - \mathbf{v}\cdot\mathbf{r}(t)] \quad , \quad \text{где} \quad \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \ , \tag{1.1}$$

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) - \gamma_v\mathbf{v}t + \Gamma_v\mathbf{v}[\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}(t)] \quad , \quad \text{где} \quad \Gamma_v = \frac{\gamma_v - 1}{v^2} = \frac{\gamma_v^2}{\gamma_v + 1} \tag{1.2}$$

Фрактальные функции записываются в виде $\underline{\varphi} = \underline{f + g(\,)}$, где ( ) – пустые скобки обозначают место, в которое циклически подставляется все подчеркнутое выражение. В скобках, в общем случае, записывается аргумент функции g либо, в частном случае, сомножитель для g . Так фрактальная функция, развернутая на три шага имеет вид $\underline{\varphi} = f + g(f + g(f + g(\underline{f + g(\,)})))$. Подчеркивание функции $\underline{\varphi}$ либо любой другой функции $\underline{F}$ аргументом которой является $\underline{\varphi}$ указывает на то, что это не обычная, а фрактальная функция. Подчеркивание может не применяться, если и так ясно, что записана фрактальная функция. Простейшими примерами фрактальных функций являются следующие: $\varphi_1 = \underline{a + b\cdot(\,)}$ и $\varphi_2 = \underline{a + b\cdot(\,) + c\cdot(\,)}$. Их суммы равны

$$\varphi_1 = \frac{a}{1-b} \quad , \quad \text{при} \quad |b| < 1 \quad , \quad \varphi_2 = \frac{a}{1-b-c} \quad , \quad \text{при} \quad |b+c| < 1$$

Фрактальные функции являются по сути такими же функциями, как и тригонометрические. Но если тригонометрическая функция представляет собой бесконечный ряд последовательно суммируемых членов, то фрактальная функция это бесконечное число циклов вложений функции в саму себя. Когда требуется вычислить значение тригонометрической функции с заданной точностью, то суммируется определенное число членов бесконечного ряда. Когда находится значение фрактальной функции с заданной точностью, то берется функция с определенным числом циклов вложений в саму себя.

2 Релятивистское равномерное движение

Пусть система отсчета S' движется относительно системы S с постоянной скоростью $\mathbf{v}$. Уравнение движения частицы в системе S $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0 t$. Закон движения частицы в системе S'

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 + \frac{\gamma_v\mathbf{u}_0 - \Gamma_v\mathbf{v}}{\gamma_v(1 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_0)}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_0) + \frac{\mathbf{u}_0 - \gamma_v\mathbf{v} + \Gamma_v\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_0)}{\gamma_v(1 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_0)}t' \tag{2.1}$$

Правильность решения проверяется подстановкой в (2.1) прямого преобразования времени (1.1) , в результате чего получаем уравнение прямого преобразования координат (1.2).

Введем обозначение

$$\mathbf{r}'_0 = \mathbf{r}_0 + \frac{\gamma_v\mathbf{u}_0 - \Gamma_v\mathbf{v}}{\gamma_v(1 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_0)}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_0) \quad , \quad \mathbf{u}'_0 = \frac{\mathbf{u}_0 - \gamma_v\mathbf{v} + \Gamma_v\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_0)}{\gamma_v(1 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_0)}$$

тогда уравнение движения частицы с величинами из системы S' принимает вид $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_0 + \mathbf{u}'_0 t'$. Введем следующие определения. Уравнение (2.1) называется *переходной формой закона движения частицы* в системе S'. *Стандартный вид закона движения частицы* должен включать начальное местоположение и начальную скорость из системы, в которой описывается движение частицы.

3 Общий случай релятивистского движения

3.1 Уравнение релятивистского движения без начальной скорости

В начальный момент времени точка находится в собственной системе отсчета $\mathbf{u}_0 = 0$. Скорость и ускорение частицы в системе S

$$\mathbf{u}_f = \frac{\mathbf{u}_w}{\sqrt{1+u_w^2}} \quad , \quad \mathbf{a}_f = \frac{\dot{\mathbf{u}}_w}{(1+u_w^2)^{3/2}} \quad , \quad \text{где} \quad \mathbf{u}_w = \frac{1}{M}\int \mathbf{F}\, dt$$

Уравнение движения

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \int \mathbf{u}_f\, dt = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_f(t) \quad , \quad \text{где} \quad \mathbf{r}_0 = const \quad , \quad \mathbf{r}_f = r_f(t)\,\mathbf{n} \tag{3.1}$$

Найдем закон движения частицы в системе S' , движущейся со скоростью $\mathbf{v}$ относительно системы S. Из прямого преобразования времени $t'(t) = \gamma_v\,[t - \mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_0 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_f(t)]$ получим обратную функцию для времени t $t(t') = \underline{t'/\gamma_v + \mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_f(\,)}$, которая является фракталом. Так как функция $\mathbf{r}_f(t)$ является по определению однозначной, гладкой, конечной, то фрактальное выражение для времени t существует. Подставляя фрактал в прямое преобразование координат, находим закон движения частицы в системе S'

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v+1}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_0) - \mathbf{v}t' + \left[\mathbf{n} - \frac{\gamma_v\mathbf{v}}{\gamma_v+1}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\right] R_f\!\left(\frac{t'}{\gamma_v} + \underline{\varphi'}\right) \tag{3.2}$$

где $\underline{\varphi'} = \underline{\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}\cdot\mathbf{R}_f\!\left(\dfrac{t'}{\gamma_v} + (\,)\right)}$, $\mathbf{R}_f\!\left(\dfrac{t'}{\gamma_v} + (\,)\right)$ – функция $\mathbf{r}_f(t)$ с новым аргументом.

Решение (3.2) проверяется подстановкой в него прямого преобразования времени (1.1). В результате получаем прямое преобразование координат (1.2).

Аналогично функции $\underline{\mathbf{R}}_f$ введем фрактальные величины $\underline{\mathbf{U}}_w$, $\underline{\mathbf{U}}_f$, $\underline{\mathbf{A}}_f$, получаемые из скоростей $\mathbf{u}_w$, $\mathbf{u}_f$ и ускорения $\mathbf{a}_f$ путем замены аргумента. Продифференцируем по времени выражение (3.2) и найдем скорость и ускорение частицы

$$\mathbf{u}' = \frac{\gamma_v\underline{\mathbf{U}}_f - \Gamma_v\mathbf{v}\big(\mathbf{v}\cdot\underline{\mathbf{U}}_f\big)}{\gamma_v^2\left(1-\mathbf{v}\cdot\underline{\mathbf{U}}_f\right)} - \mathbf{v} \quad , \quad (u')^2 = 1 - \frac{(1-v^2)\left(1-\underline{U}_f^2\right)}{\left(1-\mathbf{v}\cdot\underline{\mathbf{U}}_f\right)} < 1$$

$$\mathbf{a}' = \frac{\gamma_v\underline{\mathbf{U}}_f - \Gamma_v\mathbf{v}}{\gamma_v^3\left(1-\mathbf{v}\cdot\underline{\mathbf{U}}_f\right)^3}\left(\mathbf{v}\cdot\underline{\mathbf{A}}_f\right) + \frac{\underline{\mathbf{A}}_f}{\gamma_v^2\left(1-\mathbf{v}\cdot\underline{\mathbf{A}}_f\right)^2}$$

В случае, когда $\left[\mathbf{v}\times\underline{\mathbf{R}}_f\right] = 0$ выражение (3.2) принимает вид

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 - \frac{\gamma_v\mathbf{v}}{\gamma_v+1}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_0) - \mathbf{v}t' + \frac{1}{\gamma_v}\mathbf{R}_f\!\left(\frac{t'}{\gamma_v} + \underline{\varphi'}\right) \tag{3.3}$$

а когда $(\mathbf{v}\cdot\underline{\mathbf{R}}_f)=0$, то следующий

$$\mathbf{r}'=\mathbf{r}_0-\frac{\gamma_v\mathbf{v}}{\gamma_v+1}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_0)-\mathbf{v}t'+\mathbf{R}_f\left(\frac{t'}{\gamma_v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_0\right) \tag{3.4}$$

От векторной формы записи закона движения (3.2) можно перейти к координатной. При этом наиболее математически простые выражения получаются при переходе в прямолинейную косоугольную систему координат с ортами $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ косинусы углов между которыми равны

$$\cos(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)=-\gamma_{v_x}\gamma_{v_y}v_xv_y \quad , \quad \cos(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3)=-\gamma_{v_x}\gamma_{v_z}v_xv_z \quad , \quad \cos(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)=-\gamma_{v_y}\gamma_{v_z}v_yv_z$$

$$\text{где} \quad \gamma_{v_x}=\frac{1}{\sqrt{1-v_x^2}} \quad , \quad \gamma_{v_y}=\frac{1}{\sqrt{1-v_y^2}} \quad , \quad \gamma_{v_z}=\frac{1}{\sqrt{1-v_z^2}}$$

Матрица M1 задает переход от декартовых координат уравнения (3.2) к контравариантным координатам уравнения (3.6)

$$M1=\begin{pmatrix} \dfrac{\gamma_v}{\gamma_{v_x}}-\dfrac{\gamma_v^2\left(v_y^2+v_z^2\right)}{\gamma_{v_x}(\gamma_v+1)} & \dfrac{\gamma_v^2v_xv_y}{\gamma_{v_x}(\gamma_v+1)} & \dfrac{\gamma_v^2v_xv_z}{\gamma_{v_x}(\gamma_v+1)} \\ \dfrac{\gamma_v^2v_xv_y}{\gamma_{v_y}(\gamma_v+1)} & \dfrac{\gamma_v}{\gamma_{v_y}}-\dfrac{\gamma_v^2\left(v_x^2+v_z^2\right)}{\gamma_{v_y}(\gamma_v+1)} & \dfrac{\gamma_v^2v_yv_z}{\gamma_{v_y}(\gamma_v+1)} \\ \dfrac{\gamma_v^2v_xv_z}{\gamma_{v_z}(\gamma_v+1)} & \dfrac{\gamma_v^2v_yv_z}{\gamma_{v_z}(\gamma_v+1)} & \dfrac{\gamma_v}{\gamma_{v_z}}-\dfrac{\gamma_v^2\left(v_x^2+v_y^2\right)}{\gamma_{v_z}(\gamma_v+1)} \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' \;=\; & \left[x_0-\gamma_vv_xt'+R_{f_x}\left(\frac{t'}{\gamma_v}+\underline{\varphi}'\right)\right]\frac{\mathbf{e}_1}{\gamma_{v_x}}+\left[y_0-\gamma_vv_yt'+R_{f_y}\left(\frac{t'}{\gamma_v}+\underline{\varphi}'\right)\right]\frac{\mathbf{e}_2}{\gamma_{v_y}}+ \\ & +\left[z_0-\gamma_vv_zt'+R_{f_z}\left(\frac{t'}{\gamma_v}+\underline{\varphi}'\right)\right]\frac{\mathbf{e}_3}{\gamma_{v_z}}\end{aligned} \tag{3.6}$$

Матрица M2 задает переход от декартовых координат уравнения (3.2) к ковариантным координатам уравнения (3.8)

$$M2=-\frac{1}{\gamma_v+1}\begin{pmatrix} \gamma_{v_x}\gamma_vv_x^2-\gamma_{v_x}(1+\gamma_v) & \gamma_{v_x}\gamma_vv_xv_y & \gamma_{v_x}\gamma_vv_xv_z \\ \gamma_{v_y}\gamma_vv_xv_y & \gamma_{v_y}\gamma_vv_y^2-\gamma_{v_y}(1+\gamma_v) & \gamma_{v_y}\gamma_vv_yv_z \\ \gamma_{v_z}\gamma_vv_xv_z & \gamma_{v_z}\gamma_vv_yv_z & \gamma_{v_z}\gamma_vv_z^2-\gamma_{v_z}(1+\gamma_v) \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

$$\det M1\cdot\det M2=1 \quad , \quad M1\cdot M2^T=E$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' \;=\; & \gamma_{v_x}\left[x_0-v_x\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_0-\frac{v_x}{\gamma_v}t'+R_{f_x}\left(\frac{t'}{\gamma_v}+\underline{\varphi}'\right)-v_x\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}_{f_x}\left(\frac{t'}{\gamma_v}+\underline{\varphi}'\right)\right]\mathbf{e}_1+ \\ & +\gamma_{v_y}\left[y_0-v_y\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_0-\frac{v_y}{\gamma_v}t'+R_{f_y}\left(\frac{t'}{\gamma_v}+\underline{\varphi}'\right)-v_y\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}_{f_y}\left(\frac{t'}{\gamma_v}+\underline{\varphi}'\right)\right]\mathbf{e}_2+ \\ & +\gamma_{v_z}\left[z_0-v_z\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_0-\frac{v_z}{\gamma_v}t'+R_{f_z}\left(\frac{t'}{\gamma_v}+\underline{\varphi}'\right)-v_z\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}_{f_z}\left(\frac{t'}{\gamma_v}+\underline{\varphi}'\right)\right]\mathbf{e}_3\end{aligned} \tag{3.8}$$

Рассмотрим частный случай закона движения (3.1) , когда $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{u}_0t$. Тогда закон движения в системе S' в соответствии с формулой (3.2) принимает вид

$$\mathbf{r}'=\mathbf{r}_0-\frac{\gamma_v\mathbf{v}}{\gamma_v+1}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_0)-\mathbf{v}t'+\left[\mathbf{u}_0-\frac{\gamma_v\mathbf{v}}{\gamma_v+1}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_0)\right]\left(\underline{\frac{t'}{\gamma_v}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_0+\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_0\cdot(\,)}\right)$$

Суммируя фрактал получим формулу (2.1) .

Преобразуем переходное уравнение движения (3.2) к стандартному виду, то есть когда оно будет включать в себя начальное местоположение и начальную скорость из системы S'. Так как частица движется в системе S' с постоянной скоростью $\mathbf{u}'_0 = -\mathbf{v}$, то вторая, переменная, составляющая скорости уже не может быть любой. Ее значение ограничивается величиной и направлением скорости $\mathbf{u}'_0$. Следовательно, стандартный вид закона движения частицы не может иметь привычный вид $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_0 + \mathbf{u}'_0 t' + \mathbf{r}'_f(t')$. Стандартный вид закона движения частицы имеет вид $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_0 + \mathbf{u}'_0 t' + K(u'_0)\, R'_f(t')\, \mathbf{n}'$. Направление вектора $\mathbf{R}'_f$ задается ортом $\mathbf{n}'$

$$\mathbf{n}' = \gamma_{v_n}\left[\mathbf{n} - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\right] \quad , \quad \text{где} \quad \gamma_{v_n} = \frac{1}{\sqrt{1-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})^2}} \tag{3.9}$$

Обратное преобразование ортов

$$\mathbf{n} = \frac{\gamma_{u'_{\perp n'}}}{\gamma_{u'}}\left[\mathbf{n}' + \Gamma_{u'}(\mathbf{u}'_0\cdot\mathbf{n}')\mathbf{u}'_0\right] \quad , \quad \text{где} \quad \gamma_{u'_{\perp n'}} = \frac{1}{\sqrt{1-(u'_0)^2 + (\mathbf{u}'_0\cdot\mathbf{n}')^2}} \tag{3.10}$$

С учетом соотношений

$$\underline{r}'_f = \frac{\gamma_{u'_{\perp n'}}}{\gamma_{u'}}\underline{R}_f \ , \ \mathbf{r}'_0 = \mathbf{r}_0 - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_0) \ , \ \mathbf{v}\cdot\underline{\mathbf{R}}_f = -\gamma_{u'_{\perp n'}}\underline{R}_f \mathbf{u}'_0\cdot\mathbf{n}' \ , \ \mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_0 = -\gamma_{u'}\mathbf{u}'_0\cdot\mathbf{r}'_0$$

получим стандартную форму релятивистского закона движения частицы (штрихи опускаем)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0 t + \frac{\gamma_{u_{\perp n}}}{\gamma_u} R_f\left(\frac{t}{\gamma_u} - \underline{\varphi}\right)\mathbf{n} \quad , \quad \text{где} \quad \underline{\varphi} = \underline{\gamma_u \mathbf{u}_0\cdot\mathbf{r}_0 + \gamma_{u_{\perp n}}\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{n}\, R_f\left(\frac{t}{\gamma_u} - (\,)\right)} \tag{3.11}$$

где $R_f(t)$ – функция движения в начально-собственной системе S^*, движущейся со скоростью $\mathbf{u}_0$.

В случае, когда $[\mathbf{u}_0 \times \mathbf{n}] = 0$ выражение (3.11) принимает вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0 t + \frac{1}{\gamma_u}\mathbf{R}_f\left(\frac{t}{\gamma_u} - \underline{\varphi}\right) \quad , \quad \text{где} \quad \underline{\varphi} = \underline{\gamma_u \mathbf{u}_0\cdot\mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0\cdot\mathbf{R}_f\left(\frac{t}{\gamma_u} - (\,)\right)} \quad , \tag{3.12}$$

а когда $(\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{n}) = 0$, то следующий

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0 t + \mathbf{R}_f\left(\frac{t}{\gamma_u} - \gamma_u \mathbf{u}_0\cdot\mathbf{r}_0\right) \tag{3.13}$$

В этих двух частных случаях (3.12) - (3.13) направление вектора $\mathbf{R}_f$ совпадает с его направлением в начально-собственной системе отсчета.

Дифференцируя (3.11) находим стандартный вид скорости и ускорения частицы

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \frac{\gamma_{u_{\perp n}}\underline{U}_f \mathbf{n}}{\gamma_u^2\left(1 + \gamma_{u_{\perp n}}\underline{U}_f \mathbf{u}_0\cdot\mathbf{n}\right)} \ , \ u^2 = 1 - \frac{\left(1-u_0^2\right)\left(1-\underline{U}_f^2\right)}{\left(1 + \gamma_{u_{\perp n}}\underline{U}_f \mathbf{u}_0\cdot\mathbf{n}\right)^2} < 1 \quad \text{т.к.} \quad |\gamma_{u_{\perp n}}\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{n}| \le u_0$$

$$\mathbf{a} = \frac{\gamma_{u_{\perp n}}\underline{A}_f \mathbf{n}}{\gamma_u^3\left(1 + \gamma_{u_{\perp n}}\underline{U}_f \mathbf{u}_0\cdot\mathbf{n}\right)^3} \quad ,$$

где функции $\underline{U}_f, \underline{U}_w, \underline{A}_f$ - имеют аргумент $\left(\frac{t}{\gamma_u} - \underline{\varphi}\right)$.

3.2 Уравнение релятивистского движения с начальной скоростью

Для обозначения начальной скорости будем использовать символ $\mathbf{U}_b$. Скорость частицы в системе S

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_f + \mathbf{u}_g \ , \ \ \mathbf{u}_f = \frac{\mathbf{u}_w}{\sqrt{1 + (\mathbf{U}_b + \mathbf{u}_w)^2}} \ , \ \ \mathbf{u}_g = \frac{\mathbf{U}_b}{\sqrt{1 + (\mathbf{U}_b + \mathbf{u}_w)^2}} \ , \ \ \mathbf{n} = \frac{\mathbf{u}_w}{u_w} \ , \ \ \mathbf{m} = \frac{\mathbf{U}_b}{U_b}$$

Уравнение движения частицы в системе S

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \int \frac{\mathbf{U}_b \, dt}{\sqrt{1 + (\mathbf{U}_b + \mathbf{u}_w)^2}} + \int \frac{\mathbf{u}_w \, dt}{\sqrt{1 + (\mathbf{U}_b + \mathbf{u}_w)^2}} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_g(t) + \mathbf{r}_f(t) \tag{3.14}$$

Выполнив переход в систему S' движущуюся со скоростью $\mathbf{v}$ относительно данной системы S , получим уравнение движения частицы в ней

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_0) - \mathbf{v}t' + \left[\mathbf{m} - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{m})\right] R_g\left(\frac{t'}{\gamma_v} + \underline{\varphi'}\right) + \\ + \left[\mathbf{n} - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\right] R_f\left(\frac{t'}{\gamma_v} + \underline{\varphi'}\right) \tag{3.15}$$

$$\text{где} \quad \underline{\varphi'} = \underline{\mathbf{v}\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}\cdot\mathbf{R}_g\left(\frac{t'}{\gamma_v} + (\,)\right) + \mathbf{v}\cdot\mathbf{R}_f\left(\frac{t'}{\gamma_v} + (\,)\right)} \quad ,$$

$$\mathbf{R}_g\left(\frac{t'}{\gamma_v} + \underline{\varphi'}\right) - \quad \text{функция } \mathbf{r}_g(t) \text{с новым аргументом.}$$

От векторной формы закона движения (3.15) можно перейти к координатной. С помощью матрицы M1 (3.5) получаются контравариантные координаты, а с помощью матрицы M2 (3.7) ковариантные координаты.

Преобразуем переходной закон движения частицы (3.15) к стандартному виду и запишем входящие в него символы без штрихов. Получим общее выражение для закона движения частицы в ИСО

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0 t + \frac{\gamma_{u_{\perp m}}}{\gamma_u} R_g\left(\frac{t}{\gamma_u} - \underline{\varphi}\right)\mathbf{m} + \frac{\gamma_{u_{\perp n}}}{\gamma_u} R_f\left(\frac{t}{\gamma_u} - \underline{\varphi}\right)\mathbf{n} \quad , \tag{3.16}$$

$$\text{где} \quad \underline{\varphi} = \underline{\gamma_u \mathbf{u}_0\cdot\mathbf{r}_0 + \gamma_{u_{\perp m}} \mathbf{u}_0\cdot\mathbf{m} \, R_g\left(\frac{t}{\gamma_u} - (\,)\right) + \gamma_{u_{\perp n}} \mathbf{u}_0\cdot\mathbf{n} \, R_f\left(\frac{t}{\gamma_u} - (\,)\right)}$$

Направление векторов в системе S отличается от направления аналогичных векторов в начальной системе отсчета S^* (которая движется со скоростью $\mathbf{u}_0$). Если $\mathbf{n}$ – направление вектора в данной системе S , а $\mathbf{n}^*$ – направление в системе S^* , то уравнения связи для ортов имеют вид (3.9) - (3.10) . Аналогичными уравнениями связаны единичные вектора $\mathbf{m}$ и $\mathbf{m}^*$.

4 Релятивистское равноускоренное движение

Дифференциальное уравнение для релятивистского движения в постоянном электрическом поле имеет вид

$$M\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{u}_f}{\sqrt{1 - u_f^2}} = q\mathbf{E}_0 \quad , \quad \mathbf{E}_0 = const$$

4.1 Решение при нулевой начальной скорости

Скорость и ускорение движения частицы в системе S

$$\mathbf{u}_f = \frac{\mathbf{W}t}{\sqrt{1+W^2t^2}} \quad , \quad \mathbf{a}_f = \frac{\mathbf{W}}{(1+W^2t^2)^{3/2}} \quad , \quad \text{где} \quad \mathbf{W} = \frac{q}{M}\mathbf{E}_0$$

Уравнение движения частицы в системе S

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{n}}{W}\left(\sqrt{1+W^2t^2}-1\right) \quad , \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{W}}{W}$$

Перейдем в систему S' , движущуюся относительно S со скоростью $\mathbf{v}$. Переходная форма закона движения частицы в системе S' получена в параграфе 3 . Поэтому используя формулу (3.2), запишем

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v+1}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_0) - \mathbf{v}t' + \frac{1}{W}\left[\mathbf{n} - \frac{\gamma_v\mathbf{v}}{\gamma_v+1}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\right]\left[\sqrt{1+W^2\left(\gamma_v^{-1}t' + \underline{\varphi'}\right)^2}-1\right] \tag{4.1}$$

$$\text{где} \quad \underline{\varphi'} = \underline{\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{W}\left[\sqrt{1+W^2\left(\gamma_v^{-1}t' + (\,)\right)^2}-1\right]}$$

Запишем стандартную форму закона релятивистского равноускоренного движения частицы, используя общую формулу (3.11)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0 t + \frac{\gamma_{u_{\perp n}}\mathbf{n}}{\gamma_u W}\left[\sqrt{1+W^2\left(\gamma_u^{-1}t - \underline{\varphi}\right)^2}-1\right] \tag{4.2}$$

$$\text{где} \quad \underline{\varphi} = \underline{\gamma_u \mathbf{u}_0\cdot\mathbf{r}_0 + \gamma_{u_{\perp n}}\frac{\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{n}}{W}\left[\sqrt{1+W^2\left(\gamma_u^{-1}t - (\,)\right)}-1\right]}$$

Фрактал квадратного корня суммируется к выражению в элементарных функциях

$$\underline{\sqrt{1+(at+b+c\cdot(\,))^2}-1} = \frac{1}{1-c^2}\left[bc + act + \sqrt{1-c^2+(at+b-c)^2}-1\right]$$

Выполняя суммирование фракталов, запишем полученные выше законы равноускоренного движения частицы в обычном виде. Переходная форма закона равноускоренного движения частицы (4.1) принимает вид

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 - \frac{\gamma_v\mathbf{v}}{\gamma_v+1}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_0) + \gamma_v(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_0)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}')\mathbf{n}' - [\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}')\mathbf{n}']\,t' + \\ + \frac{\mathbf{n}'}{W}\left[\sqrt{1+\gamma_{v_n}^2(\gamma_v^{-1}Wt' + W\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_0 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{n})^2} - \gamma_{v_n}\right] \tag{4.3}$$

где $\mathbf{n}'$ находится по формуле (3.9) .

Просуммируем фрактал в уравнении движения (4.2) и получим следующее выражение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \gamma_u^2(\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{r}_0)(\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} + [\mathbf{u}_0 - (\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}]\,t + \\ + \frac{\mathbf{n}}{W}\left[\sqrt{1+\left(\gamma_{u_{\perp n}}^{-1}Wt - \gamma_{u_{\perp n}}^{-1}\gamma_u^2 W\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{r}_0 + \gamma_u\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{n}\right)^2} - \frac{\gamma_u}{\gamma_{u_{\perp n}}}\right] \tag{4.4}$$

Введем обозначение $\mathbf{r}_0^*$ для начального местоположения частицы, которое равно $\mathbf{r}_0^* = \mathbf{r}_0 + \gamma_u^2(\mathbf{u}_0\mathbf{r}_0)(\mathbf{u}_0\mathbf{n})\mathbf{n}$. Заменим в (4.4) вектор $\mathbf{r}_0$ на $\mathbf{r}_0^*$ и отбросив звездочки получим стандартную форму закона движения частицы

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + [\mathbf{u}_0 - (\mathbf{u}_0{\cdot}\mathbf{n})\mathbf{n}]\,t + \frac{\mathbf{n}}{W}\left[\sqrt{1 + \left(\gamma_{u_{\perp n}}^{-1}Wt - \gamma_{u_{\perp n}}W\mathbf{u}_0{\cdot}\mathbf{r}_0 + \gamma_u\mathbf{u}_0{\cdot}\mathbf{n}\right)^2} - \frac{\gamma_u}{\gamma_{u_{\perp n}}}\right] \tag{4.5}$$

Скорость и ускорение частицы

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 - (\mathbf{u}_0{\cdot}\mathbf{n})\mathbf{n} + \frac{\left(\gamma_{u_{\perp n}}^{-1}Wt - \gamma_{u_{\perp n}}W\mathbf{u}_0{\cdot}\mathbf{r}_0 + \gamma_u\mathbf{u}_0{\cdot}\mathbf{n}\right)\mathbf{n}}{\gamma_{u_{\perp n}}^2\sqrt{1 + \left(\gamma_{u_{\perp n}}^{-1}Wt - \gamma_{u_{\perp n}}W\mathbf{u}_0{\cdot}\mathbf{r}_0 + \gamma_u\mathbf{u}_0{\cdot}\mathbf{n}\right)^2}}$$

$$u^2 = 1 - \frac{1}{\gamma_{u_{\perp n}}^2\left[1 + \left(\gamma_{u_{\perp n}}^{-1}Wt - \gamma_{u_{\perp n}}W\mathbf{u}_0{\cdot}\mathbf{r}_0 + \gamma_u\mathbf{u}_0{\cdot}\mathbf{n}\right)^2\right]} < 1$$

$$\mathbf{a} = \frac{W\mathbf{n}}{\gamma_{u_{\perp n}}^2\left[1 + \left(\gamma_{u_{\perp n}}^{-1}Wt - \gamma_{u_{\perp n}}W\mathbf{u}_0{\cdot}\mathbf{r}_0 + \gamma_u\mathbf{u}_0{\cdot}\mathbf{n}\right)^2\right]^{3/2}}$$

При условии $[\mathbf{u}_0{\times}\mathbf{n}] = 0$ выражение (4.5) принимает вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{n}}{W}\left[\sqrt{1 + \left(Wt - W\mathbf{u}_0{\cdot}\mathbf{r}_0 + \gamma_u\mathbf{u}_0{\cdot}\mathbf{n}\right)^2} - \gamma_u\right]$$

а когда $(\mathbf{u}_0{\cdot}\mathbf{n}) = 0$ следующий

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0 t + \frac{\mathbf{n}}{W}\left[\sqrt{1 + W^2\left(\gamma_u^{-1}t - \gamma_u\mathbf{u}_0{\cdot}\mathbf{r}_0\right)^2} - 1\right]$$

Для равноускоренного движения функциональная зависимость от времени уменьшается на коэффициент $1/\gamma_{u_{\perp n}}$, то есть замедление зависит только от составляющей начальной скорости перпендикулярной к направлению ускоренного движения. Перпендикулярная к вектору $\mathbf{n}$ составляющая скорости частицы остается постоянной во времени, в то время как продольная составляющая изменяется. В уравнении (4.5) продольная составляющая начальной скорости $(\mathbf{u}_0\mathbf{n})\mathbf{n}$ оказывается включенной в подкоренное выражение описывающее равноускоренное движение. Это легко показать, если взять предел от этой функции при $W \to 0$

$$\lim_{W\to 0}\frac{\mathbf{n}}{W}\left[\sqrt{1 + \left(\gamma_{u_{\perp n}}^{-1}Wt - \gamma_{u_{\perp n}}W\mathbf{u}_0{\cdot}\mathbf{r}_0 + \gamma_u\mathbf{u}_0{\cdot}\mathbf{n}\right)^2} - \frac{\gamma_u}{\gamma_{u_{\perp n}}}\right] = (\mathbf{v}{\cdot}\mathbf{n})\mathbf{n}t - \gamma_{u_{\perp n}}^2(\mathbf{u}_0{\cdot}\mathbf{r}_0)\mathbf{n}$$

либо если перейти в начально-собственную систему S' , то есть в систему, которая движется относительно данной со скоростью $\mathbf{u}_0$, а не со скоростью $[\mathbf{u}_0 - (\mathbf{u}_0{\cdot}\mathbf{n})\mathbf{n}]$, как может показаться из уравнения (4.5). Закон движения частицы в системе S' имеет вид

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 + \gamma_{u_{\perp n}}^2(\mathbf{u}_0{\cdot}\mathbf{r}_0)\left[\frac{\mathbf{u}_0}{\gamma_u + 1} - (\mathbf{u}_0{\cdot}\mathbf{n})\mathbf{n}\right] + \frac{\gamma_{u_{\perp n}}}{\gamma_u W}\left[\mathbf{n} + \Gamma_u\mathbf{u}_0(\mathbf{u}_0{\cdot}\mathbf{n})\right]\left[\sqrt{1 + (Wt')^2} - 1\right]$$

4.2 Решение при не нулевой начальной скорости

Для обозначения начальной скорости используем символ $\mathbf{U}_b$. Скорость и закон движения частицы в системе S

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{U}_b + \mathbf{W}t}{\sqrt{1 + (\mathbf{U}_b + \mathbf{W}t)^2}}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{n}}{\gamma_{b_n} W}\left[\sqrt{1+\left(\gamma_{b_n} W t + \gamma_{b_n}\mathbf{U}_b{\cdot}\mathbf{n}\right)^2} - \gamma_{b_n}\gamma_b\right] + \\ + \frac{1}{W}\left[\mathbf{U}_b - (\mathbf{U}_b{\cdot}\mathbf{n})\,\mathbf{n}\right]\mathrm{ash}(\gamma_{b_n} W t + \gamma_{b_n}\mathbf{U}_b{\cdot}\mathbf{n}) \quad (4.6)$$

$$\text{где} \quad n = \frac{\mathbf{W}}{W} \quad , \quad \gamma_{b_n} = \frac{1}{\sqrt{1+U_b^2-(\mathbf{U}_b{\cdot}\mathbf{n})^2}} \quad , \quad \gamma_b = \sqrt{1+U_b^2}$$

Выполним переход в систему S' движущуюся со скоростью $\mathbf{v}$ относительно данной системы S . Получим уравнение движения частицы в системе S'

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v+1}(\mathbf{v}{\cdot}\mathbf{r}_0) - \mathbf{v}t' + \frac{1}{W}\left[\mathbf{U}_{b_{\perp n}} - \frac{\gamma_v\mathbf{v}}{\gamma_v+1}\left(\mathbf{v}{\cdot}\mathbf{U}_{b_{\perp n}}\right)\right]\mathrm{ash}\left(\frac{\gamma_{b_n}}{\gamma_v}Wt' + \gamma_{b_n}\mathbf{U}_b{\cdot}\mathbf{n} + \underline{\varphi'}\right) + \\ + \frac{1}{\gamma_{b_n}W}\left[\mathbf{n} - \frac{\gamma_v\mathbf{v}}{\gamma_v+1}(\mathbf{v}{\cdot}\mathbf{n})\right]\left[\sqrt{1+\left(\gamma_v^{-1}\gamma_{b_n}Wt' + \gamma_{b_n}\mathbf{U}_b{\cdot}\mathbf{n} + \underline{\varphi'}\right)^2} - \gamma_b\gamma_{b_n}\right] \quad (4.7)$$

$$\text{где} \quad \underline{\varphi'} = \underline{\gamma_{b_n}W\mathbf{v}{\cdot}\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}{\cdot}\mathbf{n}\left[\sqrt{1+\left(\gamma_v^{-1}\gamma_{b_n}Wt' + \gamma_{b_n}\mathbf{U}_b{\cdot}\mathbf{n} + (\,)\right)^2} - \gamma_b\gamma_{b_n}\right] + \\ + \gamma_{b_n}\mathbf{v}{\cdot}\mathbf{U}_{b_{\perp n}}\mathrm{ash}\left(\gamma_v^{-1}\gamma_{b_n}Wt' + \gamma_{b_n}\mathbf{U}_b{\cdot}\mathbf{n} + (\,)\right)} \quad , \quad \mathbf{U}_{b_{\perp n}} = \mathbf{U}_b - (\mathbf{U}_b{\cdot}\mathbf{n})\mathbf{n}$$

Скорость и ускорение частицы

$$\mathbf{u}' = \frac{\gamma_v\underline{\mathbf{U}} - \Gamma_v\mathbf{v}(\mathbf{v}{\cdot}\underline{\mathbf{U}})}{\gamma_v^2\left(1-\mathbf{v}{\cdot}\underline{\mathbf{U}}\right)} - \mathbf{v} \quad , \quad \text{где} \quad \underline{\mathbf{U}} = \frac{\gamma_{b_n}\mathbf{U}_b + \left(\gamma_v^{-1}\gamma_{b_n}Wt' + \underline{\varphi'}\right)\mathbf{n}}{\left[1+\left(\gamma_v^{-1}\gamma_{b_n}Wt' + \gamma_{b_n}\mathbf{U}_b{\cdot}\mathbf{n} + \underline{\varphi'}\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$\mathbf{a}' = \frac{\gamma_v\underline{\mathbf{U}} - \Gamma_v\mathbf{v}}{\gamma_v^3\left(1-\mathbf{v}{\cdot}\underline{\mathbf{U}}\right)^3}(\mathbf{v}{\cdot}\underline{\mathbf{A}}) + \frac{\underline{\mathbf{A}}}{\gamma_v^2\left(1-\mathbf{v}{\cdot}\underline{\mathbf{A}}\right)^2}$$

$$\text{где } \underline{\mathbf{A}} = \frac{\gamma_{b_n}\mathbf{W} - \gamma_{b_n}^2 W\left(\gamma_v^{-1}\gamma_{b_n}Wt' + \gamma_{b_n}\mathbf{U}_b{\cdot}\mathbf{n} + \underline{\varphi'}\right)\mathbf{U}_{b_{\perp n}}}{\left[1+\left(\gamma_v^{-1}\gamma_{b_n}Wt' + \gamma_{b_n}\mathbf{U}_b{\cdot}\mathbf{n} + \underline{\varphi'}\right)^2\right]^{3/2}}$$

При условии, что $[\mathbf{U}_b{\times}\mathbf{n}] = 0$ закон движения в системе S (4.6) преобразуется к виду

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{n}}{W}\left[\sqrt{1+(Wt+U_b)^2} - \gamma_b\right]$$

а в системе S' закон движения (4.7) имеет вид

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 - \frac{\gamma_v\mathbf{v}}{\gamma_v+1}(\mathbf{v}{\cdot}\mathbf{r}_0) - \mathbf{v}t' + \frac{1}{W}\left[\mathbf{n} - \frac{\gamma_v\mathbf{v}}{\gamma_v+1}(\mathbf{v}{\cdot}\mathbf{n})\right]\left[\sqrt{1+\left(\gamma_v^{-1}Wt' + U_b + \underline{\varphi'}\right)^2} - \gamma_b\right]$$

$$\text{где} \quad \underline{\varphi'} = \underline{W\mathbf{v}{\cdot}\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}{\cdot}\mathbf{n}\left[\sqrt{1+\left(\gamma_v^{-1}Wt' + U_b + (\,)\right)^2} - \gamma_b\right]}$$

При условии $(\mathbf{U}_b{\cdot}\mathbf{n}) = 0$ закон движения в системе S (4.6) равен

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{\gamma_b\mathbf{n}}{W}\left[\sqrt{1+(\gamma_b^{-1}Wt)^2} - 1\right]$$

а в системе S' закон движения (4.7) имеет вид

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_0) - \mathbf{v}t' + \frac{\gamma_b}{W}\left[\mathbf{n} - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\right]\left[\sqrt{1 + \left(\gamma_v^{-1}\gamma_b^{-1}Wt' + \underline{\varphi'}\right)^2} - 1\right] +$$

$$+ \frac{1}{W}\left[\mathbf{U}_b - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{U}_b)\right]\mathrm{ash}\left(\gamma_v^{-1}\gamma_b^{-1}Wt' + \underline{\varphi'}\right) \quad ,$$

где $\underline{\varphi'} = \underline{\dfrac{W}{\gamma_b}\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\left[\sqrt{1 + \left(\gamma_v^{-1}\gamma_b^{-1}Wt' + (\,)\right)^2} - 1\right] + \dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{U}_b}{\gamma_b}\mathrm{ash}\left(\gamma_v^{-1}\gamma_b^{-1}Wt' + (\,)\right)}$

Преобразуем переходную форму закона движения частицы (4.7) в стандартную, величины которой записываем без штрихов.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0 t + \frac{\gamma_{u_{\perp n}}\mathbf{n}}{\gamma_{b_{n^*}}\gamma_u W}\left[\sqrt{1 + \left(\gamma_u^{-1}\gamma_{b_{n^*}}Wt + \gamma_{b_{n^*}}\mathbf{U}_b\cdot\mathbf{n}^* - \underline{\varphi}\right)^2} - \gamma_b\gamma_{b_{n^*}}\right] +$$

$$+ \frac{1}{\gamma_u W}\left[\gamma_{u_{\perp m}}U_b\mathbf{m} - \gamma_{u_{\perp n}}(\mathbf{U}_b\cdot\mathbf{n}^*)\mathbf{n}\right]\mathrm{ash}\left(\gamma_u^{-1}\gamma_{b_{n^*}}Wt + \gamma_{b_{n^*}}\mathbf{U}_b\cdot\mathbf{n}^* - \underline{\varphi}\right) \qquad (4.8)$$

где $\underline{\varphi} = \underline{\gamma_{b_{n^*}}\gamma_u W\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{r}_0 + \gamma_{u_{\perp n}}\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{n}\left[\sqrt{1 + \left(\gamma_u^{-1}\gamma_{b_{n^*}}Wt + \gamma_{b_{n^*}}\mathbf{U}_b\cdot\mathbf{n}^* - (\,)\right)^2} - \gamma_b\gamma_{b_{n^*}}\right] +}$

$$\underline{+\gamma_{b_{n^*}}\left[\gamma_{u_{\perp m}}U_b\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{m} - \gamma_{u_{\perp n}}(\mathbf{U}_b\cdot\mathbf{n}^*)\mathbf{n}\right]\mathrm{ash}\left(\gamma_u^{-1}\gamma_{b_{n^*}}Wt + \gamma_{b_{n^*}}\mathbf{U}_b\cdot\mathbf{n}^* - (\,)\right)}$$

$\gamma_{b_{n^*}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + U_b^2 - (\mathbf{U}_b\cdot\mathbf{n}^*)^2}}$, $\mathbf{U}_b$, $\mathbf{n}^*$ – величины из начальной системы S^*.

5 Релятивистское периодическое движение

Дифференциальное уравнение для релятивистского эллипсоидального вращения имеет вид

$$M\frac{d}{dt}\frac{\mathbf{u}_f}{\sqrt{1 - u_f^2}} = q\mathbf{E}_1\cos\omega t + q\mathbf{E}_2\sin\omega t \quad , \quad (\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2) = 0 \quad , \quad |\mathbf{E}_1| \neq |\mathbf{E}_2|$$

Скорость и ускорение частицы в системе S при $\mathbf{u}_0 = 0$

$$\mathbf{u}_f = \frac{\mathbf{U}_1\sin\omega t - \mathbf{U}_2\cos\omega t}{\sqrt{1 + (U_1\sin\omega t)^2 + (U_2\cos\omega t)^2}} \quad , \quad \text{где} \quad \mathbf{U}_1 = \frac{q}{M\omega}\mathbf{E}_1 \quad , \quad \mathbf{U}_2 = \frac{q}{M\omega}\mathbf{E}_2$$

$$\mathbf{a}_f = \frac{\mathbf{U}_1\omega(1 + U_2^2)\cos\omega t + \mathbf{U}_2\omega(1 + U_1^2)\sin\omega t}{\left[1 + (U_1\sin\omega t)^2 + (U_2\cos\omega t)^2\right]^{3/2}}$$

Уравнение движения частицы в системе S

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 - \frac{\mathbf{U}_1}{\omega U_{12}}\arcsin\left(\frac{U_{12}}{\sqrt{1 + U_1^2}}\cos\omega t\right) - \frac{\mathbf{U}_2}{\omega U_{21}}\arcsin\left(\frac{U_{21}}{\sqrt{1 + U_2^1}}\sin\omega t\right)$$

где $U_{12} = \sqrt{U_1^2 - U_2^2}$, $U_{21} = \sqrt{U_2^2 - U_1^2}$, $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{U}_1}{U_1}$, $\mathbf{m} = \dfrac{\mathbf{U}_2}{U_2}$

Используя формулу (3.2), запишем переходную форму закона релятивистского вращения и равномерного перемещения

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_0) - \mathbf{v}t' - \frac{U_1}{\omega U_{12}}\left[\mathbf{n} - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\right]\arcsin\left[\frac{U_{12}}{\sqrt{1+U_1^2}}\cos\left(\frac{\omega t'}{\gamma_v} + \underline{\varphi'}\right)\right] -$$
$$- \frac{U_2}{\omega U_{21}}\left[\mathbf{m} - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{m})\right]\arcsin\left[\frac{U_{21}}{\sqrt{1+U_2^2}}\sin\left(\frac{\omega t'}{\gamma_v} + \underline{\varphi'}\right)\right] \qquad (5.1)$$

где $\underline{\varphi'} = \omega\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_0 - \underline{\frac{U_1}{\omega U_{12}}\arcsin\left[\frac{U_{12}}{\sqrt{1+U_1^2}}\cos\left(\frac{\omega t'}{\gamma_v} + (\,)\right)\right] -}$

$$\underline{- \frac{U_2}{\omega U_{21}}\arcsin\left[\frac{U_{21}}{\sqrt{1+U_2^2}}\sin\left(\frac{\omega t'}{\gamma_v} + (\,)\right)\right]}$$

Используя формулу (3.11) , запишем закон релятивистского вращения в стандартном виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0 t - \frac{\gamma_{u_{\perp n}} U_1 \mathbf{n}}{\gamma_u \omega U_{12}}\arcsin\left[\frac{U_{12}}{\sqrt{1+U_1^2}}\cos\left(\frac{\omega t}{\gamma_u} - \underline{\varphi}\right)\right] -$$
$$- \frac{\gamma_{u_{\perp m}} U_2 \mathbf{m}}{\gamma_u \omega U_{21}}\arcsin\left[\frac{U_{21}}{\sqrt{1+U_2^2}}\sin\left(\frac{\omega t'}{\gamma_u} - \underline{\varphi}\right)\right] \qquad (5.2)$$

где $\underline{\varphi} = \gamma_u \omega \mathbf{u}_0\cdot\mathbf{r}_0 - \underline{\gamma_{u_{\perp n}}\frac{U_1}{U_{12}}\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{n}\arcsin\left[\frac{U_{12}}{\sqrt{1+U_1^2}}\cos\left(\frac{\omega t}{\gamma_u} - (\,)\right)\right] -}$

$$\underline{- \gamma_{u_{\perp m}}\frac{U_2}{U_{21}}\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{m}\arcsin\left[\frac{U_{21}}{\sqrt{1+U_2^2}}\sin\left(\frac{\omega t}{\gamma_u} - (\,)\right)\right]}$$

Для векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ из (5.2) выполняется соотношение: $\mathbf{n}\cdot\mathbf{m} + \gamma_u^2(\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{n})(\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{m}) = 0$. Скорость частицы

$$\mathbf{u} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_f}{\gamma_u^2\left(1 + \mathbf{u}_0\cdot\underline{\mathbf{U}}_f\right)} + \mathbf{u}_0 \qquad , \qquad u^2 = 1 - \frac{1 - \gamma_u^{-2}\underline{U}_f^2 - \left(\mathbf{u}_0\cdot\underline{\mathbf{U}}_f\right)^2}{\gamma_u^2\left(1 + \mathbf{u}_0\cdot\underline{\mathbf{U}}_f\right)^2} < 1$$

$$\text{где} \quad \underline{\mathbf{U}}_f = \frac{\gamma_{u_{\perp n}} U_1 \sin\left(\gamma_u^{-1}\omega t - \underline{\varphi}\right)\mathbf{n} - \gamma_{u_{\perp m}} U_2 \cos\left(\gamma_u^{-1}\omega t - \underline{\varphi}\right)\mathbf{m}}{\sqrt{1 + \left[U_1 \sin\left(\gamma_u^{-1}\omega t - \underline{\varphi}\right)\right]^2 + \left[U_2 \cos\left(\gamma_u^{-1}\omega t - \underline{\varphi}\right)\right]^2}}$$

Ускорение частицы

$$\mathbf{a} = \frac{\underline{\mathbf{A}}_f}{\gamma_u^3\left(1 + \mathbf{u}_0\cdot\underline{\mathbf{U}}_f\right)^2} - \frac{\underline{\mathbf{U}}_f\left(\mathbf{u}_0\cdot\underline{\mathbf{A}}_f\right)}{\gamma_u^3\left(1 + \mathbf{u}_0\cdot\underline{\mathbf{U}}_f\right)^3}$$

$$\text{где} \quad \underline{\mathbf{A}}_f = \frac{\gamma_{u_{\perp n}}\omega U_1\left(1 + U_2^2\right)\cos\left(\gamma_u^{-1}\omega t - \underline{\varphi}\right)\mathbf{n} + \gamma_{u_{\perp m}}\omega U_2\left(1 + U_1^2\right)\sin\left(\gamma_u^{-1}\omega t - \underline{\varphi}\right)\mathbf{m}}{\left\{1 + \left[U_1 \sin\left(\gamma_u^{-1}\omega t - \underline{\varphi}\right)\right]^2 + \left[U_2 \cos\left(\gamma_u^{-1}\omega t - \underline{\varphi}\right)\right]^2\right\}^{3/2}}$$

В уравнение (5.2) время входит с замедляющим коэффициентом $1/\gamma_u$. Фрактальная фаза $\underline{\varphi}$ состоит из постоянной и периодической части. Последняя не превышает по модулю значение $\arcsin(0.5)$ и не влияет на величину основного периода колебаний, а приводит к искажению формы и появления бесконечного числа высших гармоник.

Релятивистский закон вращения частицы (5.2) можно преобразовать к виду с взаимно перпендикулярными векторами $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}_\perp$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0 t - \frac{\gamma_{u_{\perp n}} U_1 \mathbf{n}}{\gamma_u \omega U_{12}} \arcsin\left[\frac{U_{12}}{\sqrt{1+U_1^2}} \cos\left(\frac{\omega t}{\gamma_u} - \underline{\varphi}\right)\right] - \\ - \frac{\gamma_{u_{\perp m}} U_2}{\gamma_u \omega U_{21}} \{(\mathbf{m}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} - [\mathbf{n}\times[\mathbf{n}\times\mathbf{m}]]\} \arcsin\left[\frac{U_{21}}{\sqrt{1+U_2^2}} \sin\left(\frac{\omega t'}{\gamma_u} - \underline{\varphi}\right)\right] \tag{5.3}$$

В случае $(\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{n}) = u_0$ и $(\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{n}_\perp) = 0$ закон движения (5.3) принимает вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0 t - \frac{U_1 \mathbf{n}}{\gamma_u \omega U_{12}} \arcsin\left[\frac{U_{12}}{\sqrt{1+U_1^2}} \cos\left(\frac{\omega t}{\gamma_u} - \underline{\varphi}\right)\right] - \\ - \frac{U_2 \mathbf{n}_\perp}{\omega U_{21}} \arcsin\left[\frac{U_{21}}{\sqrt{1+U_2^2}} \sin\left(\frac{\omega t}{\gamma_u} - \underline{\varphi}\right)\right] \tag{5.4}$$

$$\text{где} \quad \underline{\varphi} = \gamma_u \omega \mathbf{u}_0\cdot\mathbf{r}_0 - \frac{u_0 U_1}{U_{12}} \arcsin\left[\frac{U_{12}}{\sqrt{1+U_1^2}} \cos\left(\frac{\omega t}{\gamma_u} - (\,)\right)\right]$$

То есть амплитуда колебаний частицы вдоль направления скорости $\mathbf{u}_0$ уменьшается на коэффициент $1/\gamma_u$.

В случае кругового вращения переходный закон движения (5.1) принимает вид

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_0) - \mathbf{v}t' - \frac{U_w}{\omega\sqrt{1+U_w^2}} \left[\mathbf{n} - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v+1}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\right] \cos\left(\frac{\omega t'}{\gamma_v} + \underline{\varphi}'\right) - \\ - \frac{U_w}{\omega\sqrt{1+U_w^2}} \left[\mathbf{m} - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v+1}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{m})\right] \sin\left(\frac{\omega t'}{\gamma_v} + \underline{\varphi}'\right)$$

$$\text{где} \quad \underline{\varphi}' = \omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_0 - \frac{U_w \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}}{\sqrt{1+U_w^2}} \cos\left(\frac{\omega t'}{\gamma_v} + (\,)\right) - \frac{U_w \mathbf{v}\cdot\mathbf{m}}{\sqrt{1+U_w^2}} \sin\left(\frac{\omega t'}{\gamma_v} + (\,)\right)$$

Стандартная форма закона релятивистского кругового вращения и равномерного перемещения

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0 t - \frac{\gamma_{u_{\perp n}} U_w \mathbf{n}}{\gamma_u \omega\sqrt{1+U_w^2}} \cos\left(\frac{\omega t}{\gamma_u} - \underline{\varphi}\right) - \frac{\gamma_{u_{\perp m}} U_w \mathbf{m}}{\gamma_u \omega\sqrt{1+U_w^2}} \sin\left(\frac{\omega t}{\gamma_u} - \underline{\varphi}\right)$$

$$\text{где} \quad \underline{\varphi} = \gamma_u \mathbf{u}_0\cdot\mathbf{r}_0 - \frac{\gamma_{u_{\perp n}} U_w}{\sqrt{1+U_w^2}} \mathbf{u}_0\cdot\mathbf{n} \cos\left(\frac{\omega t}{\gamma_u} - (\,)\right) - \frac{\gamma_{u_{\perp m}} U_w}{\sqrt{1+U_w^2}} \mathbf{u}_0\cdot\mathbf{m} \sin\left(\frac{\omega t}{\gamma_u} - (\,)\right)$$

6 Преобразование импульса, энергии и силы при переходе в новую систему отсчета

Пусть закон движения частицы в системе S имеет вид .

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_0 + \int \mathbf{u} dt \quad , \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}_w + \mathbf{U}_b}{\sqrt{1 + (\mathbf{u}_w + \mathbf{U}_b)^2}} \quad , \quad \text{где} \quad \mathbf{U}_b = const \quad , \quad \mathbf{u}_w = \mathbf{u}_w(t)$$

Импульс $\mathbf{p}$ и энергия E в системе S равны

$$\mathbf{p}(t) = M(\mathbf{u}_w + \mathbf{U}_b) = \mathbf{p}_w + \mathbf{p}_b \quad , \quad E(t) = M\sqrt{1 + (\mathbf{u}_w + \mathbf{U}_b)^2}$$

Известные уравнения преобразования импульса, энергии и силы

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \Gamma_v \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{p}) - \gamma_v E\mathbf{v} \quad , \quad E' = \gamma_v(E - \mathbf{v}\cdot\mathbf{p}) \tag{6.1}$$

$$\mathbf{F}' = \frac{\mathbf{F} - \gamma_v\,(\mathbf{F}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v} + \Gamma_v \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{F})}{\gamma_v(1 - \mathbf{v}\cdot\mathbf{u})} \tag{6.2}$$

и формулы преобразования для электрического и магнитного полей

$$\mathbf{E}' = \gamma_v\mathbf{E} - \Gamma_v \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}) + \gamma_v[\mathbf{v}\times\mathbf{B}] \quad , \quad \mathbf{B} = \gamma_v\mathbf{B} - \Gamma_v \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}) - \gamma_v[\mathbf{v}\times\mathbf{E}] \tag{6.3}$$

Беспроблемное применение этих преобразований возможно только в случае если в них не входит время. То есть частицы в системе S движутся с постоянными скоростями и силы их взаимодействия неизменны во времени. Если же скорости частиц изменяются во времени и их взаимодействие не стационарно, то в результате преобразований (6.1) - (6.3) для системы S' получаются величины являющиеся функциями от времени t из системы S. Чтобы получить функции от времени t' уравнения (6.1) - (6.3) необходимо дополнить прямым преобразованием Лоренца для времени $t' = \gamma_v\,[t - \mathbf{v}\cdot\mathbf{R}(t)]$. Из прямого преобразования времени находим обратную функцию $t' = t'(t)$, которая почти всегда является фракталом

$$t = \underline{t'/\gamma_v + \mathbf{v}\cdot\mathbf{R}(\,)} = t'/\gamma_v + \underline{\varphi'} \qquad , \qquad \text{где} \qquad \underline{\varphi'} = \underline{\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}[t'/\gamma_v + (\,)]} \tag{6.4}$$

Подставляя (6.4) в уравнения (6.1) - (6.3) получим искомые преобразования импульса, энергии и силы

$$\underline{\mathbf{p}}'(t') = \underline{\mathbf{p}} + \Gamma_v \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\underline{\mathbf{p}}) - \gamma_v\underline{E}\mathbf{v} \quad , \quad \underline{E}'(t') = \gamma_v\big(\underline{E} - \mathbf{v}\cdot\underline{\mathbf{p}}\big) \tag{6.5}$$

$$\underline{\mathbf{F}}'(t') = \frac{\underline{\mathbf{F}} - \gamma_v\,(\underline{\mathbf{F}}\cdot\underline{\mathbf{u}})\,\mathbf{v} + \Gamma_v \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\underline{\mathbf{F}})}{\gamma_v(1 - \mathbf{v}\cdot\underline{\mathbf{u}})} = \gamma_v\underline{\mathbf{F}} - \Gamma_v \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\underline{\mathbf{F}}) - \gamma_v\,[\underline{\mathbf{u}}'\times[\mathbf{v}\times\underline{\mathbf{F}}]] \tag{6.6}$$

где $\underline{\mathbf{p}} = \mathbf{p}_w\left(t'/\gamma_v + \underline{\varphi'}\right) + \mathbf{p}_b \quad , \quad \underline{E} = M\sqrt{1 + \left[\mathbf{u}_w\left(t'/\gamma_v + \underline{\varphi'}\right) + \mathbf{U}_b\right]^2} \quad , \quad \underline{\mathbf{F}} = \mathbf{F}\left(t'/\gamma_v + \underline{\varphi'}\right)$

и уравнения преобразования для векторов электрического и магнитного полей

$$\underline{\mathbf{E}}'(t') = \gamma_v\underline{\mathbf{E}} - \Gamma_v \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\underline{\mathbf{E}}) + \gamma_v[\mathbf{v}\times\underline{\mathbf{B}}] \quad , \quad \underline{\mathbf{B}}'(t') = \gamma_v\underline{\mathbf{B}} - \Gamma_v \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\underline{\mathbf{B}}) - \gamma_v[\mathbf{v}\times\underline{\mathbf{E}}] \tag{6.7}$$

$$\text{где} \qquad \underline{\mathbf{E}} = \mathbf{E}\left(t'/\gamma_v + \underline{\varphi'}\right) \qquad , \qquad \underline{\mathbf{B}} = \mathbf{B}\left(t'/\gamma_v + \underline{\varphi'}\right)$$

При переходе из системы S в систему S' вектора меняют свое направление и модуль. Если записать уравнения (6.5) - (6.7) с учетом нового направления векторов в системе S' , то они принимают более простой вид. Возьмем единичные вектора $\mathbf{n}'$ и $\mathbf{m}'$ в системе S'

$$\mathbf{n}' = \frac{\gamma_{v_{\perp n}}}{\gamma_v}\,[\mathbf{n} + \Gamma_v(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathbf{v}] \quad , \quad \text{где} \quad \gamma_{v_{\perp n}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v)^2 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})^2}} \quad , \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{u}_w}{u_w}$$

$$\mathbf{m}' = \frac{\gamma_{v_{\perp m}}}{\gamma_v}\,[\mathbf{m} + \Gamma_v(\mathbf{v}\cdot\mathbf{m})\mathbf{v}] \quad , \quad \text{где} \quad \gamma_{v_{\perp m}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v)^2 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{m})^2}} \quad , \quad \mathbf{m} = \frac{\mathbf{U}_b}{U_b}$$

Тогда уравнения (6.5) перепишутся в виде

$$\underline{\mathbf{p}}'(t') = \gamma_{v_{n'}}\underline{p}_w\mathbf{n}' + \gamma_{v_{m'}}\underline{p}_b\mathbf{m}' - \gamma_v\mathbf{v}\underline{E} \quad , \quad \underline{E}'(t') = \gamma_v\underline{E} - \gamma_{v_{n'}}\underline{p}_w\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}' - \gamma_{v_{m'}}\underline{p}_b\mathbf{v}\cdot\mathbf{m}'$$

$$\text{где} \quad \gamma_{v_{n'}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}')^2}} \quad , \quad \gamma_{v_{m'}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{m}')^2}}$$

Возьмем единичные вектора $\mathbf{n}^*$ и $\mathbf{m}^*$ в системе S'

$$\mathbf{n}^* = \gamma_{v_n}\left[\mathbf{n} - \frac{\gamma_v\mathbf{v}}{\gamma_v+1}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\right] \quad , \quad \mathbf{m}^* = \gamma_{v_m}\left[\mathbf{m} - \frac{\gamma_v\mathbf{v}}{\gamma_v+1}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{m})\right]$$

Тогда уравнения (6.6) – (6.7) принимают вид

$$\underline{\mathbf{F}}'(t') = \gamma_{v_{\perp n^*}}\underline{F}\left\{\mathbf{n}^* - [\underline{\mathbf{u}}'\times[\mathbf{v}\times\mathbf{n}^*]]\right\} \quad , \quad \underline{\mathbf{u}}'(t') = \frac{\underline{\mathbf{p}}'}{\underline{E}'}$$

$$\underline{\mathbf{E}}'(t') = \gamma_{v_{\perp n^*}}\underline{E}\mathbf{n}^* + \gamma_{v_{\perp m^*}}\underline{B}\left[\mathbf{v}\times\mathbf{m}^*\right] \quad , \quad \underline{\mathbf{B}}'(t') = \gamma_{v_{\perp m^*}}\underline{B}\mathbf{m}^* + \gamma_{v_{\perp n^*}}\underline{E}\left[\mathbf{v}\times\mathbf{n}^*\right]$$

7 Преобразование сил при равномерном движении

Пусть в системе отсчета S частицы 1 и 2 движутся равномерно: $\mathbf{R}_1 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{u}_1 t$, $\mathbf{R}_2 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{u}_2 t$. Расстояние между частицами $\mathbf{R}_{21} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$. Система S' движется относительно системы S со скоростью $\mathbf{v}$. Закон движения частицы 1 в системе S'

$$\mathbf{R}'_1 = \mathbf{r}_1 + \frac{\gamma_v\mathbf{u}_1 - \Gamma_v\mathbf{v}}{\gamma_v(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_1)}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}_1) + \mathbf{u}'_1 t' \quad , \quad \mathbf{u}'_1 = \frac{\mathbf{u}_1 - \gamma_v\mathbf{v} + \Gamma_v\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_1)}{\gamma_v(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_1)} \tag{7.1}$$

Закон движения частицы 2 в системе S' задается аналогичным уравнением. Сила действия частицы 2 на частицу 1 в системе S равна

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{\alpha\left(1-u_2^2\right)}{\left[R_{21}^2\left(1-u_2^2\right) + \left(\mathbf{R}_{21}\cdot\mathbf{u}_2\right)^2\right]^{3/2}}\left\{\mathbf{R}_{21} + [\mathbf{u}_1\times[\mathbf{u}_2\times\mathbf{R}_{21}]]\right\} \tag{7.2}$$

где α - зарядовый коэффициент.

В момент времени t в системе S частица 2 действует на частицу 1 , а частица 1 действует на частицу 2. В системе S' первое событие происходит в момент времени $t'_1 = \gamma_v\left[t - \mathbf{v}\cdot\mathbf{R}_1(t)\right]$, а второе в момент времени $t'_2 = \gamma_v\left[t - \mathbf{v}\cdot\mathbf{R}_2(t)\right]$. При этом событие действия частицы 2 на частицу 1 в системе S' в момент t'_1 является Лоренц-инвариантным для частицы 1 , но не Лоренц-инвариантно для частицы 2. Расстояние от частицы 2 до частицы 1 в системе S' в момент t'_1 равно

$$\mathbf{R}'_{21} = \mathbf{R}'_1(t'_1) - \mathbf{R}'_2(t'_1) = \mathbf{R}_{21} + \frac{\gamma_v\mathbf{u}_2 - \Gamma_v\mathbf{v}}{\gamma_v(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_2)}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}_{21})$$

Аналогично, событие действия частицы 1 на частицу 2 происходит в момент времени t'_2 , когда расстояние между частицами $\mathbf{R}'_{12}(t'_2)$. Найдем силу действия частицы 2 на частицу 1 в системе S' . Выразим величины из системы S через величины из системы S'

$$\mathbf{R}_{21} = \mathbf{R}'_{21} - \frac{\gamma_v\mathbf{u}'_2 + \Gamma_v\mathbf{v}}{\gamma_v(1+\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'_2)}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}'_{21}) \quad , \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{u}'_2 + \gamma_v\mathbf{v} + \Gamma_v\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'_2)}{\gamma_v(1+\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'_2)} \quad ,$$

$$R_{21}^2 = (R'_{21})^2 - \frac{2\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}'_{21}}{1+\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'_2}(\mathbf{u}'_2\cdot\mathbf{R}'_{21}) - \frac{1-(u'_2)^2}{(1+\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'_2)^2}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}'_{21})^2 \quad , \quad \mathbf{v}\cdot\mathbf{R}_{21} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{R}'_{21}}{\gamma_v(1+\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'_2)}$$

и подставим их в преобразования Лоренца для силы $\mathbf{F}'_{21}$ (7.3)

$$\mathbf{F}'_{21} = \frac{\mathbf{F}_{21} - \gamma_v\mathbf{v}(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{F}_{21}) + \Gamma_v\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{F}_{21})}{\gamma_v(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_1)} \tag{7.3}$$

В результате получим уравнение (7.2) в штрихованных величинах.То есть результат, подтверждаемый как теоретической электродинамикой, так и опытными данными.

Расчет преобразования сил выполнен для произвольного момента времени t. То есть, в результате проведенного расчета мы получаем возможность, зная значения сил взаимодействия в произвольный момент времени t в системе S , находить соответствующие значения сил в системе S'. Выполненный расчет показывает, что сила действия заряда q_1 на заряд q_2 и сила действия заряда q_2 на заряд q_1 одновременные в одной системе отсчета S становятся разновременными во второй системе S'.

8 Вычисление запаздывающих расстояний

Пусть закон движения частицы задан функцией $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}(t)$, а $\mathbf{r}$ – расстояние от этой частицы до произвольной частицы пространства. Тогда запаздывающее расстояние $\mathbf{r}_p$ задается уравнением $\mathbf{r}_p = \mathbf{r} + \mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(t - r_p)$.

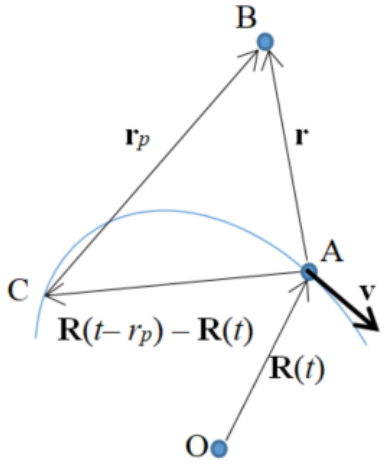

Рис. 1: Вычисление запаздывающего расстояния

Модуль r_p вычисляется с помощью фрактальной функции

$$\underline{r_p = \sqrt{r^2 + 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{R}(t) + R^2(t) - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{R}(t-(\,)) - 2\mathbf{R}(t)\cdot\mathbf{R}(t-(\,)) + R^2(t-(\,))}} \tag{8.1}$$

при $r \gg |\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(t - r_p)|$ получим $\underline{r_p \cong r + \frac{\mathbf{r}}{r}[\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(t-(\,))]}$

Если функция движения $\mathbf{R}(t)$, в момент времени t нахождения запаздывающего расстояния $\mathbf{r}_p$, соответствует условию $\mathbf{R}(t) = 0$,то выражение (8.1) существенно упростится

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r} - \mathbf{R}(t - r_p) \quad , \quad \underline{r_p = \sqrt{r^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{R}(t-(\,)) + R^2(t-(\,))}} \tag{8.2}$$

Таким образом, функции с запаздывающим временем можно преобразовывать к фрактальному виду и с помощью вычислительной техники находить их значения.
Рассмотрим простейший пример нахождения запаздывающего расстояния, когда частица движется равномерно. По формуле (8.2) запишем фрактальную функцию для $\underline{r}_p$

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r} + r_p \mathbf{u}_0 \quad , \quad r_p = \underline{\sqrt{r^2 + 2\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{r} \cdot (\,) + u_0^2 \cdot (\,)^2}}$$

которая суммируется к функции (8.3), являющейся решением квадратного уравнения для r_p

$$r_p = \frac{1}{1 - u_0^2} \left[\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{r} + \sqrt{r^2 (1 - u_0^2) + (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{r})^2} \right] \tag{8.3}$$

9 Преобразование сил при релятивистском равноускоренном движении

При ускоренном движении электромагнитные силы зависят от запаздывающих расстояний, а также скорости и ускорения в запаздывающие моменты времени. Метод вычисления запаздывающих расстояний был рассмотрен в предыдущем параграфе.
Пусть в системе отсчета S частица 1 движется с постоянной скоростью $\mathbf{u}_1$, а частица 2 движется релятивистски равноускорено. Система S' движется относительно системы S со скоростью $\mathbf{v}$. Закон движения частицы 1 в системе S : $\mathbf{R}_1 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{u}_1 t$. Закон движения частицы 2 в системе S :

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{r}_2 + \frac{\mathbf{n}}{W} \left(\sqrt{1 + W^2 t^2} - 1 \right)$$

Сила действия частицы 1 на частицу 2 в системе S находится по формуле (7.2) , а силу действия частицы 2 на частицу 1 в системе S получаем, используя формулу из электродинамики для электромагнитного поля произвольно движущегося заряда, в которой модуль запаздывающего расстояния вычисляем по формуле (8.2) .
В системе S' закон движения частицы 1 задается уравнением (7.1) , а закон движения частицы 2 равен

$$\mathbf{R}'_2 = \mathbf{r}_2 - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_2) + \gamma_{v_n} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_2)\, (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, \mathbf{n}' - \left[\mathbf{v} - \frac{\gamma_{v_n}}{\gamma_v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}' \right] t' +$$
$$+ \frac{\mathbf{n}'}{W} \left[\sqrt{1 + \gamma_{v_n}^2 (\gamma_v^{-1} W t' + W \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^2} - \gamma_{v_n} \right]$$

Силе действия частицы 2 на частицу 1 в системе S соответствует сила в системе S' в момент времени $t'_1 = \gamma_v \left[t - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}_1(t) \right]$. Расстояние между частицами равно $R'_{21} = R'_1 (t'_1) - R_2 (t'_1)$. Для данного расстояния силу действия частицы 2 на частицу 1 в системе S' находим по формулам из электродинамики (решение Лиенара-Вихерта уравнений Максвелла). Значение силы $\mathbf{F}'_{21}(t)$ совпадает со значением силы $\mathbf{F}'_{21}(t)$ рассчитанной из преобразований Лоренца для сил (7.3). Аналогичное вычисление силы $\mathbf{F}'_{12}(t)$ в системе S' в момент времени $t'_2 = \gamma_v \left[t - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}_2(t) \right]$ совпадает со значением вычисленным по формуле лоренцевого преобразования сил.

10 Метрологический смысл преобразований Лоренца

Для математического описания физических явлений вводится система отсчета, в которой выбираются эталоны длины и времени. С каждой системой отсчета связано свое координатное пространство, состоящее из неподвижных в данной системе отсчета точек. Координатные точки не взаимодействуют как друг с другом, так и со всеми другими движущимися в системе отсчета частицами. Это является идеализацией для реальных материальных точек, но она принимается в качестве одного из основных положений при введении системы отсчета и координатного пространства. Измерение расстояния до движущейся частицы в произвольный момент времени происходит методом проецирования положения частицы на координатное пространство и отождествления расстояния до координатной точки с расстоянием до движущейся частицы. Расстояние между двумя движущимися частицами получается аналогично – проецированием и отождествлением проекции с реальным расстоянием.

Возьмем две инерциальные системы отсчета. Пусть система S' движется со скоростью $\mathbf{v}$ вдоль оси X системы S . Каждая из систем отсчета имеет свое координатное пространство. В системе S собственные координатные точки неподвижны, а координатные точки из системы S' движутся со скоростью $\mathbf{v}$. Расстояние между движущимися координатными точками x'_1 и x'_2 из системы S' можно измерить найдя проекцию этих точек на координатное пространство системы S. Длина проекции $(x'_1x'_2)_p$ отождествляется с расстоянием между движущимися точками x'_1 и x'_2 . Второй метод измерения это использование движущегося со скоростью $\mathbf{v}$ эталона длины. Неподвижный эталон больше движущегося на величину γ_v . Следовательно, расстояние $x'_1x'_2$ измеренное с помощью движущегося эталона будет в γ_v – раз больше его проекции на координатное пространство системы S . Этот факт отображается в преобразованиях Лоренца для x - координаты: $x' = \gamma_v(x - vt)$, где $(x - vt)$ - это координата частицы в системе S' с точки зрения наблюдателя из системы S . Соотношение между эталонами длины систем S и S' различно для различных направлений. В данном случае вдоль оси x эталон длины системы S' меньше в γ_v - раз, а вдоль осей y и z эталоны из S и S' совпадают.

Скорость хода опорных часов (часы в начале координат) в системе S' замедляется по сравнению с системой S на коэффициент $1/\gamma_v$. Это можно рассматривать как переход к новому эталону времени в системе S' . В преобразованиях Лоренца для времени

$$t'(t) = \frac{t}{\gamma_v} - v\gamma_v(x - vt) = \gamma_v(t - vx)$$

слагаемое t/γ_v отражает этот факт, а слагаемое $v\gamma_v(x - vt) = vx'(t)$ - факт возникновения рассогласования времени событий при переходе в систему S' . Чтобы увидеть, что происходит в системе S' в момент времени t' необходимо собрать "пазл" из различных моментов времени и соответствующих событий из системы S . В результате такой сборки метрологический эффект от перехода в системе S' к эталону длины в γ_v - раз меньшему чем в системе S существенно изменяется. В общем, изменение скоростей хода часов, величин и направления расстояний при переходе в другую систему отсчета является метрологическим эффектом. В определенном смысле это не физический, а идеальный эффект, эффект связанный с использованием новых эталонов времени и длины вместо старых. При этом взаимосвязь и соотношение старых и новых

эталонов строго физически обусловлена.

Наблюдатель в системе S' не фиксирует замедление хода опорных часов, так же он ни какими физическими измерениями не сможет обнаружить различие эталонов длины по разным направлениям. Для него эталоны длины и скорость хода времени вводятся по тем же соглашениям и численно будут такими же, как и для наблюдателя из системы S. Различие эталонов возникает только когда рассматриваются две движущиеся друг относительно друга системы.

11 Следствия преобразований Лоренца

11.1 Динамическое сжатие тел

Пусть вдоль оси X из состояния покоя начинают ускоренно двигаться две частицы. Через какой-то промежуток времени их скорости достигают порогового значения u_0, на котором стабилизируются. Из-за синхронности движения точек и вследствие отсутствия их взаимодействия расстояния между ними сохраняется неизменным все время. То есть эффекта сокращения расстояния между независимыми частицами при их одновременном движении с релятивистскими скоростями не существует. Запишем далее закон релятивистского вращения и перемещения с постоянной скоростью, когда скорость $\mathbf{u}_0$ параллельна орту $\mathbf{n}_1$ (5.4) . Из закона движения следует, что по линии постоянной скорости $\mathbf{u}_0$ траектория вращения сжимается на коэффициент $1/\gamma_u$. Это происходит вследствие того, что источник силы вызывающий вращение в начально-собственной системе отсчета, в текущей системе движется с постоянной скоростью $\mathbf{u}_0$ и соответственно по-другому взаимодействует с так же движущимся зарядом. А именно таким образом, что траектория его вращения сжимается. Аналогичный вывод можно сделать и из общего уравнения движения частицы с постоянной скоростью $\mathbf{u}_0$ (3.12) - (3.13) . Таким образом, можно предполагать, что твердое тело будет сжиматься по линии движения с постоянной скоростью $\mathbf{u}_0$ в γ_u - раз. То есть сжатие движущихся твердых тел это динамический, определяемый изменением взаимодействия зарядов, эффект. В свое время Г.Лоренц [1] делал аналогичный вывод, исходя из превращения шаровой эквипотенциальной поверхности электростатического поля неподвижного электрона в эллипсообразную у движущегося.

11.2 Динамическое замедление времени движущихся тел

Собственное время движущейся частицы характеризует скорость протекания внутренних процессов. Собственное время движущейся частицы показывают часы, связанные с ней. В качестве часов можно использовать любое периодическое движение сопутствующее основному движению частицы. Например, закон движения (5.2) можно рассматривать, как равномерное движение частицы и описание хода связанных с ней часов. Если записать закон движения частицы, состоящий из произвольного движения ее центра масс $\mathbf{r}_f$ и периодических колебаний относительно центра масс, то колебания будут характеризовать течение собственного времени при движении частицы по закону $\mathbf{r}_f$. Замедление хода движущихся часов по сравнению с координатными часами является следствием изменения характера внутренних взаимодействий у движущейся

частицы. Это такой же динамический эффект, как и сокращение длины движущегося с постоянной скоростью тела. Аналогичное объяснение замедления собственного времени у движущихся частиц давал в свое время А.Эйнштейн [2]. Он при этом опирался на экспериментальные данные об уменьшении частоты излучения, связанного с внутренними процессами, у движущихся частиц. В данной статье математически доказано существование такого замедления (3.11) .

11.3 Метрологическое изменение расстояния при равномерном движении

Рассмотрим теперь изменение расстояния между синхронно равномерно движущимися частицами из системы S при переходе в систему S' , движущуюся вдоль оси X с постоянной скоростью $\mathbf{v}$. Пусть в системе S две частицы движутся вдоль оси X с постоянной скоростью u : $X_1 = x_1 + ut$, $X_2 = x_2 + ut$. В системе S' законы их движения имеют вид

$$X'_1 = \frac{x_1}{\gamma_v(1-vu)} + \frac{u-v}{1-vu}t' \quad , \quad X'_2 = \frac{x_2}{\gamma_v(1-vu)} + \frac{u-v}{1-vu}t' \quad , \quad X'_{12} = \frac{x_{12}}{\gamma_v(1-vu)} \qquad (11.1)$$

Следовательно, можно сделать вывод, что расстояние между частицами 1 и 2 наибольшее, когда они неподвижны в системе отсчета, а движущееся расстояние всегда имеет меньшую длину. При переходе из системы S в систему S' , в зависимости от того как изменяется модуль скорости движения расстояния, само расстояние может либо увеличиваться либо уменьшаться.

В случае если в системе S со скоростью $\mathbf{u}$ движется твердое тело, то изменение его размеров при переходе в систему S' описывается той же формулой (11.1). Но как следует из (5.4) в системе S тело испытало Лоренцево сжатие. Это произошло ввиду того, что движущиеся со скоростью $\mathbf{u}$ элементы структуры твердого тела начинают по-другому взаимодействовать друг с другом. В результате возникает сжатие тела вдоль направления скорости $\mathbf{u}$ на коэффициент γ_u . В данном случае это чисто динамический эффект. При переходе из системы S в систему S' в результате преобразования сил взаимодействия элементы структуры твердого тела по-новому взаимодействуют друг с другом. С другой стороны, из принципа равноправия всех ИСО следует, что физическое состояние тела в них должно быть одним и тем же. При переходе в другую систему отсчета не должно возникать никаких напряжений и деформаций. Разрешение этого противоречия в том, что эталоны длин и времени в системах S и S' , хотя и вводятся по одинаковым правилам, но не равны друг другу из-за взаимного движения систем отсчета. Поэтому изменение характера взаимодействия элементов структуры твердого тела и его размеров при переходе в систему S' является чисто метрологическим, а не динамическим эффектом. Любое изменение расстояний, времени, сил при переходе в другую систему отсчета не связаны с какими-то физическими процессами – это чисто метрологический эффект, эффект перехода к другим эталонам длины и времени. Формула (11.1) , описывающая изменение модуля расстояния между частицами 1 и 2 при переходе из системы S в систему S' , исходя из преобразований Лоренца, связывает два разных расстояния. По преобразованиям Лоренца расстоянию из системы S соответствует расстояние в системе S' , у которого, в общем случае, разновременные начало и конец. Однако физический смысл имеют только расстояния начало и конец которых существуют в один общий момент времени. Поэтому формула описывающая

изменение модуля расстояния должна включать расстояние r_{12} в момент времени t в системе S и расстояние r'_{12} в синхронный момент времени $t' = t/\gamma_v$ в системе S'. Выполняя преобразования по переходу от разновременного расстояния к единовременному получаем стандартную формулу преобразования модуля расстояний (11.1) .

11.4 Метрологическое изменение расстояния при равноускоренном движении

Рассмотрим изменение расстояния между синхронно ускоряющимися частицами. Пусть в системе S две независимые (невзаимодействующие) частицы начинают синхронно двигаться по закону

$$X_1 = x_1 + \frac{1}{W}\left(\sqrt{1+W^2t^2} - 1\right) \quad , \quad X_2 = x_2 + \frac{1}{W}\left(\sqrt{1+W^2t^2} - 1\right)$$

Так как движение синхронное, то расстояние между частицами в системе S сохраняется постоянным в любой момент времени и при любой их общей скорости. Выполним переход в движущуюся вдоль оси X со скоростью $\mathbf{v}$ систему S' . Закон движения частицы 1 в системе S' имеет вид

$$X'_1 = \gamma_v x_1 + \frac{1}{W}\left\{\sqrt{1+(Wt' + \gamma W v x_1 - \gamma v)^2} - \gamma_v\right\} \qquad , \qquad U'_1 = \frac{Wt' + \gamma W v x_1 - \gamma v}{\sqrt{1+(Wt' + \gamma W v x_1 - \gamma v)^2}}$$

Аналогичный вид имеет закон движения частицы 2 . Тогда расстояние между частицами в системе S' задается уравнением

$$X'_{12} = \gamma_v x_{12} + \frac{1}{W}\left(\sqrt{1+(Wt' + \gamma_v W v x_2 - \gamma_v v)^2} - \sqrt{1+(Wt' + \gamma_v W v x_1 - \gamma_v v)^2}\right) \quad , \qquad (11.2)$$

$$\lim_{W\to 0} X'_{12} = \frac{x_{12}}{\gamma_v} \qquad , \qquad \lim_{t\to+\infty} X'_{12} = \frac{x_{12}}{\gamma_v(1-v)} \qquad , \qquad \lim_{t\to-\infty} X'_{12} = \frac{x_{12}}{\gamma_v(1+v)}$$

График зависимости $X'_{12}(t')$ построен для следующих значений:
$W = 0,1$; $v = 0,4$ $x_1 = 1$; $x_2 = 4$.

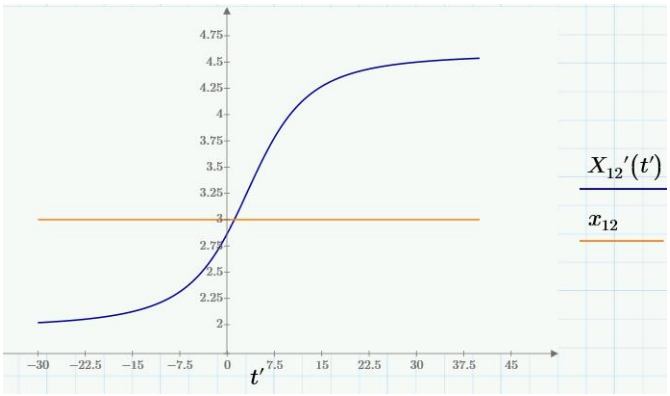

Рис. 2: Изменение расстояния при переходе в систему S'

Данный случай интересен двумя особенностями. Во-первых, скорости U'_1 и U'_2 изменяются во времени и $U'_2 > U'_1$. В системе S на частицы 1 и 2 действуют одинаковые силы и $u_2 = u_1$, а в системе S' на частицу 2 действует сила $F'_2 > F'_1$. Таким образом, при преобразовании сил, в

общем случае, значение имеет и *начальное местоположение частицы* $(x_2 > x_1)$, что явно не видно из уравнения преобразования сил. Во-вторых, при $t \to +\infty$ скорости $u_2 = u_1 \to c$ $(c = 1)$, а при $t \to -\infty$ скорости $u_2 = u_1 \to -c$. Тогда значение X'_{12} (11.2) совпадает со значением из формулы (11.1) .

12 Заключение

В статье получено общее выражение для релятивистского закона движения частицы (3.11) и (3.16) . Рассмотрены частные случаи релятивистского движения частицы: равноускоренное с равномерным перемещением и периодическое с равномерным перемещением. Релятивистские выражения для закона движения, импульса, энергии, силы в общем случае имеют фрактальный вид. Очевидно, что внутренние процессы в частице, определяемые электромагнитным взаимодействием элементов структуры, изменяются при изменении характеристик движения частицы. Уравнения движения, полученные в параграфе 5 показывают, что возникают два релятивистских эффекта. Во-первых, периодическое движение замедляется на коэффициент $1/\gamma_u$ или можно сказать, что движущиеся с постоянной скоростью $\mathbf{u}_0$ часы начинают идти медленнее. Во-вторых, движущееся с постоянной скоростью $\mathbf{u}_0$ тело сплющивается (сокращается) в γ_u - раз по направлению скорости $\mathbf{u}_0$ (5.4) . С другой стороны существует метрологический эффект изменения расстояния и замедления времени, существующий только при переходе из одной ИСО в другую.

В статье применен метод вычисления запаздывающих расстояний (электродинамика) с использованием фрактальных функций.

В математике и физике широко используются бесконечные ряды. Фракталы как определенный аналог бесконечных рядов также имеют большие перспективы их применения во многих разделах физики и математики. Результат использования фракталов в СТО показал перспективность и целесообразность этого направления.

Метрологическое понимание преобразований Лоренца позволяет приступить к созданию теории неинерциальных систем отсчета. Общая теория относительности А.Эйнштейна является теорией гравитации.

Список литературы

[1] *Г. А. Лоренц, Теория электронов, ГИТТЛ, Москва (1956)*

[2] *А. Эйнштейн, Сборник научных трудов, т.1, стр.138-164, Наука, Москва (1965)*

[3] *S. S. Stepanov, Relativistic world, Berlin, Boston: De Gruyter (2018), http://synset.com*