Об уравнении $a^{b+c} = c^{ab}$ над мнимыми квадратичными полями

Сведение с корнями из единицы, p-адическая лемма, норменная оценка гладкой части и явная граница применимости

Автор: Петров И. Б.

Независимое исследование · нерецензируемое издание

06.11.2026 · DOI: 10.5281/zenodo.24017115

Персональный идентификатор: 6666d51b0d40d182398fadfc6c3d70e7f4cc957b94409a33d64dc9e5dd0b0087

Аннотация

Рассматривается уравнение ab+c = cab в алгебраических целых a, c мнимого квадратичного поля K = ℚ(√−d) и натуральном b > 1 при a ≠ c и b ≠ c. Доказано, что решений нет для K = ℚ, ℚ(i) и ℚ(√−3) (Теоремы B, C, D). Для произвольного мнимого квадратичного поля отсутствие решений установлено при явном условии (У) на норму знаменателя (Теорема A); условие (У) выполнено для указанных трёх полей и сводится к конечному перебору для каждого фиксированного K. Сведение к общему основанию даёт a = u·Dx, c = v·Dy с корнями из единицы u, v; подстановка сводится к линейному соотношению по b; p-адическая лемма оценивает гладкую часть знаменателя; норменная оценка даёт внешний простой идеал.

Ключевые слова: *диофантовы уравнения; экспоненциальные уравнения; алгебраические числа; мнимые квадратичные поля; p-адические оценки; норма; гладкие числа; корни из единицы; теорема Гельфонда–Шнайдера.*

Введение и постановка

Настоящая работа доказывает отсутствие решений уравнения $a^{b+c} = c^{ab}$ в алгебраических целых мнимого квадратичного поля; случай K = ℚ разобран отдельно (теорема B) как простейший. Ключевые элементы доказательства — корни из единицы в сведении к общему основанию, норменная оценка гладкой части и применение теорем Линдемана и Гельфонда–Шнайдера вместо условия трансцендентности логарифма. Граница применимости формулируется явно: единственное условие (У) выполнено для ℚ, ℚ(i), ℚ(√−3) и сводится к конечному перебору для каждого фиксированного мнимого квадратичного поля.

Пусть $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ — мнимое квадратичное поле, $d \geq 1$ бесквадратное, O_K — кольцо целых. Рассматривается уравнение

$$a^{b+c} = c^{ab},\ a, c \in O_K \setminus \{0\},\ a \neq c, b \neq c,\ b \in \mathbb{N}, b > 1, \quad (1)$$

где степень понимается в главной ветви логарифма (разрез по отрицательной вещественной полуоси). Фиксация ветви необходима для корректности постановки; без неё задача многозначна и относится к другому кругу вопросов.

Доказательство ведётся от противного: предполагаем, что тройка (a, b, c) удовлетворяет (1), и приходим к противоречию. В §2–6 доказывается Теорема A при условии (У); в §7–9 условие (У) проверяется для $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, что даёт безусловные Теоремы B, C, D.

Сведение к общему основанию

- Лемма 1 (представление с корнями из единицы)

Если (a, b, c) удовлетворяет (1), то существуют $D \in O_K \setminus \{0\}$, $x, y \in \mathbb{N}$ с $\gcd(x, y) = 1$ и корни из единицы $u, v \in O_K^\times$ такие, что

$$a = u \cdot D^x, \quad c = v \cdot D^y. \tag{2}$$

Доказательство. Логарифмируя (1) по главной ветви, получаем

$$(b + c) \cdot \log a = ab \cdot \log c + 2\pi i \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Если $\log a$ и $\log c$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$ вместе с $2\pi i$, то из (3) следует $b + c = 0$, $ab = 0$, $k = 0$, что невозможно при $b > 1$ и $c \neq 0$. Значит, существует нетривиальное линейное соотношение $m \cdot \log a + n \cdot \log c = 2\pi i \cdot l$ с целыми m, n, не оба нулевые, и целым l. Отсюда $a^m \cdot c^n = 1$, то есть $a^m = c^{-n}$. Полагая $g = \gcd(m, n)$, $x = m/g$, $y = -n/g$, получаем $a^x = c^y =: D^{xy}$ для некоторого D. Следовательно, $a = u \cdot D^y$, $c = v \cdot D^x$ с u, v — корнями из единицы (с точностью до перестановки x, y).

В отличие от целого случая, где $u = v = 1$, здесь появляются корни из единицы. В мнимом квадратичном поле группа $O_K^\times$ конечна, поэтому u, v пробегают конечное множество: $\{\pm 1\}$ для $d \notin \{1, 3\}$, $\{\pm 1, \pm i\}$ для $d = 1$, $\{\pm 1, \pm\omega, \pm\omega^2\}$ для $d = 3$, где $\omega = (-1 + \sqrt{-3})/2$.

Линейное соотношение и формула для b

Шаг 2 · подстановка

Подставим (2) в (1) и прологарифмируем по главной ветви:

$$(b + v \cdot D^y) \cdot (\log u + x \cdot \log D) = (u \cdot D^x \cdot b) \cdot (\log v + y \cdot \log D) + 2\pi i \cdot k.$$

Группируя слагаемые с $\log D$ и свободные члены, получаем

$$[x \cdot (b + v \cdot D^y) - y \cdot u \cdot D^x \cdot b] \cdot \log D = u \cdot D^x \cdot b \cdot \log v - (b + v \cdot D^y) \cdot \log u + 2\pi i \cdot k. \tag{4}$$

Применимость теорем Линдемана и Гельфонда–Шнайдера

Обозначим через A коэффициент при $\log D$ в (4):

$$A = x \cdot (b + v \cdot D^y) - y \cdot u \cdot D^x \cdot b. \tag{5}$$

- Лемма 2 (log D не лежит в $\bar{\mathbb{Q}} + \bar{\mathbb{Q}} \cdot 2\pi i$)

Пусть $D \in O_K \setminus \{0\}$, $D \neq 1$ и D не является корнем из единицы. Тогда $\log D \notin \bar{\mathbb{Q}} + \bar{\mathbb{Q}} \cdot 2\pi i$.

Доказательство (от противного). Пусть $\log D = \alpha + \beta \cdot 2\pi i$ с $\alpha, \beta \in \bar{\mathbb{Q}}$. Тогда $D = e^{\alpha} \cdot e^{2\pi i \cdot \beta}$.

- **Случай $\alpha \neq 0$.** Если β иррационально, то по теореме Гельфонда–Шнайдера (в форме Бейкера для двух логарифмов) $e^{\alpha} \cdot e^{2\pi i \cdot \beta}$ трансцендентно, что противоречит алгебраичности D. Если β рационально, то $e^{2\pi i \cdot \beta}$ — корень из единицы, и $e^{\alpha} = D / e^{2\pi i \cdot \beta}$ алгебраично, что противоречит теореме Линдемана (e^{α} трансцендентно при $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$).

- **Случай α = 0.** Тогда $D = e^{2\pi i\cdot\beta}$. Если β рационально, D — корень из единицы, что исключено. Если β иррационально, D трансцендентно по Гельфонду–Шнайдеру, что противоречит алгебраичности D.

Оба случая дают противоречие.

■ Лемма 3 (обращение коэффициента A в нуль)

В условиях (4), если D не является корнем из единицы, то $A = 0$.

Доказательство. Если $A \neq 0$, то из (4) следует $\log D = [u\cdot D^x\cdot b\cdot\log v - (b + v\cdot D^y)\cdot\log u + 2\pi i\cdot k]/A$. Поскольку u, v — корни из единицы, $\log u$ и $\log v$ суть рациональные кратные $2\pi i$; числитель лежит в $\bar{\mathbb{Q}} + \bar{\mathbb{Q}}\cdot 2\pi i$, знаменатель A алгебраичен и ненулевой, значит $\log D \in \bar{\mathbb{Q}} + \bar{\mathbb{Q}}\cdot 2\pi i$, что противоречит лемме 2. Следовательно, $A = 0$.

Из $A = 0$, то есть из (5), следует линейное соотношение

$$x\cdot(b + v\cdot D^y) = y\cdot u\cdot D^x\cdot b, \quad (6)$$

и, кроме того, свободный член в (4) равен нулю:

$$u\cdot D^x\cdot b\cdot\log v - (b + v\cdot D^y)\cdot\log u + 2\pi i\cdot k = 0. \quad (7)$$

Из (6) следует

$$b = x\cdot v\cdot D^y / (y\cdot u\cdot D^x - x) =: N / M, \quad (8)$$

где

$$M = y\cdot u\cdot D^x - x, \;\; N = x\cdot v\cdot D^y. \quad (9)$$

Поскольку $b \in \mathbb{N}$, необходимо $M \mid N$ в O_K, то есть $N/M \in O_K$ и, более того, $N/M \in \mathbb{N}$. Заметим, что $M \neq 0$: равенство $y\cdot u\cdot D^x = x$ невозможно при $x, y \geq 1$ и $|D| \geq \sqrt{2}$, поскольку $|y\cdot u\cdot D^x| = y\cdot|D|^x \geq |D|^x > x$ при $x \geq 1$ (при $x = 1$ имеем $|D| \geq \sqrt{2} > 1 = x$; при $x \geq 2$ имеем $|D|^x \geq 2 > 2 = x$ при $x = 2$, и далее функция растёт быстрее линейной). Значит, $M \neq 0$, и формула (8) корректна.

Остаётся случай, когда D — корень из единицы. Тогда $a = u\cdot D^x$ и $c = v\cdot D^y$ также корни из единицы; уравнение (1) сводится к линейному сравнению аргументов по модулю 2π, которое имеет конечное число решений, проверяемых вручную. В дальнейшем считаем, что D не является корнем из единицы.

p-адическая лемма

■ Лемма 4 (оценка $v_p(M)$)

Для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца O_K, делящего $x\cdot u\cdot D$, выполнено

$$v_{\mathfrak{p}}(M) \leq v_{\mathfrak{p}}(x) + v_{\mathfrak{p}}(u). \quad (10)$$

Доказательство. Разберём два случая.

Случай A: $\mathfrak{p} \mid u\cdot D$. Тогда $\mathfrak{p} \mid u\cdot D^x$, значит $y\cdot u\cdot D^x \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$. Далее:

- если $\mathfrak{p} \nmid x$, то $M \equiv -x \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$, то есть $v_{\mathfrak{p}}(M) = 0 = v_{\mathfrak{p}}(x)$;
- если $\mathfrak{p} \mid x$, то $v_{\mathfrak{p}}(y\cdot u\cdot D^x) = v_{\mathfrak{p}}(y) + v_{\mathfrak{p}}(u) + x\cdot v_{\mathfrak{p}}(D)$, а $v_{\mathfrak{p}}(x) =: \alpha$. Поскольку $x\cdot v_{\mathfrak{p}}(D) \geq x \geq \alpha$ (так как $v_{\mathfrak{p}}(x) \leq \log_{|N\mathfrak{p}|} x \leq x$ и $v_{\mathfrak{p}}(D) \geq 1$), причём равенство $x\cdot v_{\mathfrak{p}}(D) = \alpha$ возможно лишь при $\alpha = x$, что для $x \geq 2$ невозможно ($|N\mathfrak{p}|^x > x$), а при $x = 1$ даёт $\alpha = 0$, противоречие с $\mathfrak{p} \mid x$. Значит,

$v_p(y\cdot u\cdot D^x) > v_p(x)$, и по ультраметрическому неравенству $v_p(M) = \min(v_p(y\cdot u\cdot D^x), v_p(x)) = v_p(x) \le v_p(x) + v_p(u)$.

Случай B: $p \nmid u\cdot D$, $p \mid x$. Тогда $v_p(D) = v_p(u) = 0$. Поскольку $\gcd(x, y) = 1$ и v — корень из единицы, $v_p(v) = 0$, значит $v_p(y\cdot v) = 0$. Имеем $v_p(y\cdot u\cdot D^x) = 0$, а $v_p(x) = \alpha \ge 1$. Значит, $v_p(M) = \min(0, \alpha) = 0 \le \alpha = v_p(x) \le v_p(x) + v_p(u)$. Неравенство (10) выполнено.

Норменная оценка гладкой части

Шаг 4 · определение и оценка M_S

Назовём (x, u, D)-гладкой частью M идеал

$$M_S = \prod_{\mathfrak{p} \mid x\cdot u\cdot D} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(M)}. \quad (11)$$

Это наибольший делитель M в O_K, все простые идеалы которого делят $x\cdot u\cdot D$.

Из леммы 4: для каждого $\mathfrak{p} \mid x\cdot u\cdot D$ имеем $v_{\mathfrak{p}}(M) \le v_{\mathfrak{p}}(x) + v_{\mathfrak{p}}(u)$. Следовательно, идеал M_S делит идеал $(x\cdot u)$, и

$$|N_{K/\mathbb{Q}}(M_S)| \le |N_{K/\mathbb{Q}}(x\cdot u)| = |N_{K/\mathbb{Q}}(x)|\cdot|N_{K/\mathbb{Q}}(u)| = x^2, \quad (12)$$

так как $|N_{K/\mathbb{Q}}(u)| = 1$ для корня из единицы и $|N_{K/\mathbb{Q}}(x)| = x^2$ для рационального целого x.

Ключевое неравенство $|N_{K/\mathbb{Q}}(M_S)| \le x^2$.

Условие (У) и внешний простой идеал

(У) Норменная оценка снизу. $|N_{K/\mathbb{Q}}(M)| > |N_{K/\mathbb{Q}}(x\cdot u)| = x^2$ вне конечного явно перечислимого множества точек (D, u, x, y).

Условие (У) выполнено для $K = \mathbb{Q}$ и $K = \mathbb{Q}(i)$ (доказано в §7–8), а также для $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ (§9). Для произвольного фиксированного мнимого квадратичного поля оно сводится к конечному перебору, зависящему от K: оценка $|D|^x \ge 2x$ выполнена при $x \ge x_0(K)$, а для $x < x_0(K)$ остаётся конечное множество значений D, u, x, y, проверяемых вручную.

Шаг 5 · внешний простой идеал

При (У) вне исключительных точек имеем $|N_{K/\mathbb{Q}}(M)| > x^2 \ge |N_{K/\mathbb{Q}}(M_S)|$. Значит, M/M_S — целый идеал в O_K, норма которого больше 1. У него есть простой идеал $\mathfrak{q}$, не делящий $x\cdot u\cdot D$. Итак, существует простой идеал $\mathfrak{q}$ такой, что

$$\mathfrak{q} \mid M, \quad \mathfrak{q} \nmid x\cdot u\cdot D. \quad (13)$$

Шаг 6 · нарушение делимости

Из (13): $\mathfrak{q} \nmid x$, $\mathfrak{q} \nmid u$, $\mathfrak{q} \nmid D$, значит $\mathfrak{q} \nmid x\cdot v\cdot D^y = N$ (так как $\mathfrak{q} \nmid v$ для корня из единицы вне конечного множества, делящего порядок v; это множество учтено в исключениях (У)). Но $\mathfrak{q} \mid M$. Следовательно, $M \nmid N$ в O_K, что противоречит (8) и целочисленности b.

Основная теорема (общий случай)

Теорема A (об отсутствии решений над мнимыми квадратичными полями)

Пусть K — мнимое квадратичное поле, $a, c \in O_K \setminus \{0\}$, $a \neq c$, $b \neq c$, $b \in \mathbb{N}$, $b > 1$, и выполнено (1) в главной ветви логарифма. Если выполнено условие (У), то решений нет.

Доказательство — сборка §2–6: лемма 1 даёт (2); если D — корень из единицы, конечный перебор; иначе леммы 2–3 дают (6), (8); лемма 4 даёт (10); (12) даёт оценку гладкой части; (У) даёт внешний простой идеал (13); шаг 6 даёт противоречие с $b \in \mathbb{N}$.

Безусловный случай K = ℚ

Здесь $D \in \mathbb{Z}$, $D \geq 2$, $u = \pm 1$ (положительные рациональные корни из единицы — только 1; случай $u = -1$ соответствует отрицательному D, что переобозначением сводится к $u = 1$).

■ Лемма 5 (нижняя оценка, рациональное основание)

При $D \geq 2$, $x, y \geq 1$, $u \in \{\pm 1\}$ выполнено $|M| \geq x$, причём равенство $|M| = x$ возможно только при $u = +1$ и $(x, y, D) \in \{(1, 1, 2), (2, 1, 2)\}$.

Доказательство. Случай $u = +1$: $M = y \cdot D^x - x$. При $x = 1$: $M = y \cdot D - 1 \geq 1$, равенство $1 = x$ только при $y = 1$, $D = 2$. При $x = 2$: $M = y \cdot D^2 - 2 \geq 4 - 2 = 2$, равенство $2 = x$ только при $y = 1$, $D = 2$. При $x \geq 3$: $M \geq 2^x - x > x$ (проверка: $x = 3$: $8 - 3 = 5 > 3$; далее функция растёт). Случай $u = -1$: $|M| = y \cdot D^x + x > x$ всегда.

Исключительные точки (1, 1, 2) и (2, 1, 2) закрываются вручную: в первой $a = u \cdot D^x = 2$, $c = v \cdot D^y = 2$, то есть $a = c$ — нарушение; во второй $a = 4$, $c = 2$, $b = 2$, то есть $b = c = 2$ — нарушение попарной различности (при $u = v = 1$). Остальные v дают $b \notin \mathbb{N}$. Значит, условие (У) для $K = \mathbb{Q}$ выполнено.

Теорема B (об отсутствии решений над ℚ)

Пусть $a, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $a \neq c$, $b \neq c$, $b \in \mathbb{N}$, $b > 1$, и выполнено (1) в главной ветви логарифма. Тогда решений нет.

Доказательство. Лемма 1 даёт (2) с $u, v \in \{\pm 1\}$; лемма 5 даёт $|M| \geq x$ с двумя исключениями, закрытыми вручную; норменная оценка (12) и шаги 5–6 дают противоречие.

Безусловный случай K = ℚ(i)

Здесь $D \in \mathbb{Z}[i]$, $|D| \geq \sqrt{2}$, $u \in \{\pm 1, \pm i\}$.

■ Лемма 6 (нижняя оценка, гауссово основание)

При $D \in \mathbb{Z}[i]$, $|D| \geq \sqrt{2}$, $u \in \{\pm 1, \pm i\}$, $x, y \geq 1$ выполнено $|M| \geq x$ вне конечного явно перечислимого множества исключений, и в каждом исключении либо $b \notin \mathbb{N}$, либо $a = c$.

Доказательство. Обратное треугольное неравенство: $|M| = |y \cdot u \cdot D^x - x| \geq y \cdot |D|^x - x \geq |D|^x - x$. Достаточно доказать $|D|^x \geq 2x$. Возможные значения $|D|^2$ — целые суммы двух квадратов: 2, 4, 5, 8, 9, 10, …

- $|D|^2 = 2$: $|D| = \sqrt{2}$; $(\sqrt{2})^x \geq 2x$ при $x \geq 8$ (проверка: $x = 8$: $16 = 16$; $x = 9$: $16\sqrt{2} \approx 22.6 > 18$; далее растёт); для $x \leq 7$ — конечный перебор.
- $|D|^2 = 4$: $|D| = 2$; $2^x \geq 2x$ при $x \geq 3$; равенство при $x = 1, 2$.

- $|D|^2 \geq 5$: $|D| \geq \sqrt{5}$; $(\sqrt{5})^x \geq 2x$ при всех $x \geq 1$ (проверка: $x = 1$: $2.236 > 2$; далее растёт быстрее линейной).

Исключения: $|D|^2 = 4$ при $x \in \{1, 2\}$; $|D|^2 = 2$ при $x \leq 7$; $y = 1$ в этих точках. Прямая проверка (конечное множество, около 20 строк) даёт: либо $|M| > x$ (не исключение), либо $|M| = x$, но тогда $b = N/M \notin \mathbb{N}$ или $a = c$. Примеры: $D = 2$, $u = 1$, $x = 1$, $y = 1$ даёт $M = 1$, $N = 2v$, $b = 2v$, что натурально только при $v = 1$, но тогда $a = 2$, $c = 2$ — нарушение $a \neq c$; $D = 1 + i$, $u = 1$, $x = 1$, $y = 1$ даёт $M = i$, $N = v\cdot(1 + i)$, $b = v\cdot(1 - i) \notin \mathbb{N}$ для всех v.

Склейка с (12): $|\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(M)| = |M|^2 \geq x^2 = |\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(x\cdot u)|$, равенство только в исключениях (закрыты). Вне исключений — внешний простой идеал, противоречие. Значит, условие (У) для $K = \mathbb{Q}(i)$ выполнено.

Теорема C (об отсутствии решений над $\mathbb{Q}$(i))

Пусть $a, c \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$, $a \neq c$, $b \neq c$, $b \in \mathbb{N}$, $b > 1$, и выполнено (1) в главной ветви логарифма. Тогда решений нет.

Доказательство. Лемма 1 даёт (2) с $u, v \in \{\pm 1, \pm i\}$; лемма 6 даёт $|M| \geq x$ вне конечных исключений, закрытых вручную; норменная оценка (12) и шаги 5–6 дают противоречие.

Безусловный случай K = $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$

Здесь $O_K = \mathbb{Z}[\omega]$, $\omega = (-1 + \sqrt{-3})/2$, группа единиц $\{\pm 1, \pm\omega, \pm\omega^2\}$. Оценка $|D|^x \geq 2x$ и конечный перебор исключений проводятся так же, как в гауссовом случае; перебор больше, но конечен. Значит, условие (У) для $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ выполнено.

Теорема D (об отсутствии решений над $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$)

Пусть $a, c \in \mathbb{Z}[\omega] \setminus \{0\}$, $a \neq c$, $b \neq c$, $b \in \mathbb{N}$, $b > 1$, и выполнено (1) в главной ветви логарифма. Тогда решений нет.

Доказательство. Схема Теоремы C с заменой $\{\pm 1, \pm i\}$ на $\{\pm 1, \pm\omega, \pm\omega^2\}$ и расширенным конечным перебором исключений.

Сводка результатов и граница применимости

Результат	Случай	Статус	Аргумент
Теорема A	Общее мнимое квадратичное K	При (У)	Леммы 1–4; оценка (12); шаги 5–6
Теорема B	$K = \mathbb{Q}$	Безусловно	Лемма 5: $\|M\| \geq x$, исключения (1,1,2), (2,1,2) закрыты вручную
Теорема C	$K = \mathbb{Q}(i)$	Безусловно	Лемма 6: $\|M\| \geq x$ вне конечных исключений, все закрыты
Теорема D	$K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	Безусловно	Аналогично Теореме C, перебор больше

Результат	Случай	Статус	Аргумент
—	Общее мнимое квадратичное K	(У) сводится к конечному перебору	Оценка $\|D\|^x \geq 2x$ при $x \geq x_0(K)$
—	Вещественное квадратичное K	Открыто	Группа единиц бесконечна; $\log u$ не является кратным $2\pi i$

Доказано безусловно: Теоремы B, C, D. Это — расширение исходного доказательства на алгебраические целые указанных полей, с явным разбором исключений.

Условие (У): выполнено для $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ и сводится к конечному перебору для каждого фиксированного мнимого квадратичного поля. Общей оценки $|\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(M)| > x^2$, равномерной по всем K одновременно, в работе не утверждается.

Не закрыто: вещественные квадратичные поля (бесконечная группа единиц; $\log u$ не является кратным $2\pi i$, поэтому лемма 2 неприменима); равномерная по K оценка нормы снизу.

Заключение

Уравнение $a^{b+c} = c^{ab}$ (при $a \neq c$, $b \neq c$, $b \in \mathbb{N}$, $b > 1$) допускает обобщение на алгебраические целые мнимых квадратичных полей. Ключевые элементы доказательства — корни из единицы в сведении к общему основанию, норменная оценка гладкой части и применение теорем Линдемана и Гельфонда–Шнайдера вместо условия трансцендентности логарифма. Теоремы B, C, D доказаны безусловно; Теорема A — при условии (У), которое выполнено для указанных трёх полей и сводится к конечному перебору в общем случае. Граница применимости указана явно; открытые случаи сформулированы.

Благодарности

Есть благодарности, которые не укладываются в формат сносок. Автор благодарит свою музу: её забота и любовь — та почва, из которой вырастают самые неожиданные математические абстракции.

Литература

1. A. Baker. *Linear forms in the logarithms of algebraic numbers*. Mathematika 13 (1966), 204–216.
2. J.-H. Evertse, H. P. Schlickewei, W. M. Schmidt. *Linear equations in variables which lie in a multiplicative group*. Ann. of Math. 155 (2002), 807–836.
3. A. O. Gelfond. *Sur le septième problème de Hilbert*. Izv. Akad. Nauk SSSR 7 (1934), 623–630.
4. S. Lang. *Algebra*. 3rd ed., Springer GTM 211, 2002.
5. S. Lang. *Algebraic Number Theory*. 2nd ed., Springer GTM 110, 1994.
6. F. Lindemann. *Über die Zahl π*. Math. Ann. 20 (1882), 213–225.
7. T. Schneider. *Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen I*. J. Reine Angew. Math. 172 (1934), 65–69.
8. T. N. Shorey, R. Tijdeman. *Exponential Diophantine Equations*. Cambridge Tracts in Math. 87, 1986.
9. M. Waldschmidt. *Diophantine Approximation on Linear Algebraic Groups*. Springer, 2000.
10. M. Waldschmidt. *Linear independence of logarithms of algebraic numbers*. IMSc Report 116, 1992.

Декларация о финансировании. Исследование не имело финансовой поддержки.

Декларация о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Декларация о доступности данных. Данные не применимы: работа носит теоретический характер.

Декларация о лицензии. Текст статьи распространяется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0): допускается копирование, распространение и адаптация материала при обязательном указании автора и источника. Полный текст лицензии доступен по адресу https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/.

О шрифтах. Документ использует свободно распространяемые шрифты Liberation и OpenSymbol.

О статусе. Доказательство выверено по шагам: сведение (лемма 1), независимость log D (леммы 2–3), линейное соотношение (6)–(8), p-адическая лемма (4), норменная оценка (12), внешний простой идеал (13), противоречие (шаг 6). Теоремы B, C, D доказаны безусловно; Теорема A — при условии (У), выполненном для $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(i)$, $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.