Новое условие равновесного состояния плазмы в магнитном поле

Спиричев Ю.А.

АО «Научно-исследовательский и конструкторский институт радиоэлектронной техники»
E-mail: yurii.spirichev@mail.ru

Аннотация.

Выводы, следующие из теоремы вириала для системы заряженных частиц и равновесного состояния плазмы, противоречат существованию шаровых молний и лабораторных долгоживущих плазменных объектов. Причиной этого является нулевой след применяемого в теореме тензора энергии-импульса (ТЭИ) электромагнитного поля (ЭМП). Из тензоров ЭМП и индукции, в виде их матричного произведения, получен ТЭИ с ненулевым следом. Его след представляет собой квадратичный инвариант ЭМП. Показаны следствия, вытекающие из нового ТЭИ для электромагнитных сил, теоремы вириала и условия равновесного состояния плазмы.

Ключевые слова: тензор энергии-импульса, след тензора, теорема вириала, равновесная плазма

Содержание

1. Введение
2. Тензор энергии-импульса с ненулевым следом и уравнения сохранения энергии-импульса ЭМП
3. Теорема вириала и условие равновесного состояния плазмы
4. Заключение
Список литературы

1. Введение

Описание взаимодействия электромагнитного поля (ЭМП) с веществом является актуальной задачей, но до настоящего времени, из-за ее сложности, в ней существует много теоретических проблем. Они связаны с практическими задачами взаимодействия мощного лазерного излучения с веществом, задачами создания термоядерной плазмы, технологическими задачами лазерной обработки материалов и другими плазменными технологиями. Фундаментальными четырехмерными описаниями ЭМП являются тензоры напряженностей ЭМП и энергии-импульса (ТЭИ), дающие силовое и энергетическое описание его взаимодействия с веществом. Если по тензору напряженностей ЭМП вопросов не возникает, то по ТЭИ существуют различные мнения. Известно несколько вариантов ТЭИ. Наиболее известными являются канонический ТЭИ, полученный с помощью формализма

Лагранжа [1], ТЭИ Минковского, Абрагама и д.р., полученные на основе уравнений Максвелла. Множество вариантов ТЭИ обусловлено отсутствием общепринятого критерия их правильности, что приводит к дискуссиям, например, по силе Абрагама [2] - [5]. В настоящее время количество теоретических работ, посвященных этому вопросу, составляет более 200 [6] и продолжает увеличиваться. Особенностью основных известных ТЭИ ЭМП является их нулевой след. Это вызывает недоумение. След ТЭИ является инвариантом энергии, но у ЭМП известен единственный квадратичный инвариант энергии, который по логике, должен являться следом ТЭИ ЭМП, но не является. Этому странному факту нашлось объяснение, согласно которому след ТЭИ описывает стационарную энергию ЭМП, которой соответствует стационарная масса, а фотон не имеет стационарной массы, следовательно, и след ТЭИ должен быть равен нулю. Однако существующее стационарное ЭМП требует своего энергетического описания, которое в ТЭИ с нулевым следом отсутствует. Нулевой след ТЭИ приводит к еще одному отрицательному следствию. В физике важную роль играет теорема вириала, определяющая общие интегральные условия удержания физической системы в конечной области пространства или условия финитности движения ее частиц. Эта теорема находит применение в различных областях от теории плазмы до астрофизики. В теории плазмы она особенно важна, так как на ее основе получены критерии равновесия и устойчивости плазмы в магнитных ловушках, применяемых в проектах термоядерного синтеза и других плазменных установках. В теореме вириала для системы заряженных частиц используются следы ТЭИ [1] составных частей физической системы и описывающих стационарное состояние системы. В известных ТЭИ ЭМП (каноническом, Минковского, Абрагама и д.р.) след равен нулю и описание стационарной энергии в них отсутствует. Для устранения этой проблемы в работе [1] производится «перенормировка» энергии, для этого в уравнение теоремы вириала, подставляется полная энергия ЭМП. В работе [7] Шафранов В.Д. отмечает неточность такой «перенормировки» и указывает, что она не устраняет противоречий и потому, им делается еще одна дополнительная «перенормировка» энергии. На основе теоремы вириала, полученной таким путем, в работах [7] и [8] делается важный теоретический вывод о том, что локальные области плазмы не имеют динамического равновесного состояния и не могут самостоятельно удерживаться в конечной области пространства без внешних технических средств. Однако такому теоретическому выводу противоречит существование в природе шаровой молнии, а также других долгоживущих плазменных образований, которым посвящено много работ [9] - [11]. Кроме того, существуют устойчивые долгоживущие астрофизические объекты и явления типа магнитного динамо. Это говорит о том, что выводы, сделанные на основе «перенормированной» теоремы вириала, не соответствуют природе. Эти «перенормировки» энергии ЭМП приходится делать только

потому, что след применяемого ТЭИ равен нулю, а иметь описание энергии стационарного ЭМП необходимо.

В работе [12] автором, на основе руководящего указания Зоммерфельда о том, что энергия ЭМП, это всегда произведение напряженности поля на индукцию [13], получен новый ТЭИ в виде матричного произведения тензора напряженностей ЭМП на тензор индукции в диэлектрической среде. След нового ТЭИ равен квадратичному инварианту энергии ЭМП в вакууме или инварианту энергии ЭМП в диэлектрической среде, что соответствует логике и критерию правильности ТЭИ [14].

Учитывая практическую и теоретическую важность этого вопроса, целью настоящей работы, является новая формулировка условия равновесного состояния плазмы на основе теоремы вириала и ненулевого следа, нового ТЭИ.

В настоящей работе четырехмерные векторные величины имеют представление с мнимыми пространственными компонентами и действительной временной компонентой в декартовой системе координат. Для принятого описания четырехмерных векторных и тензорных величин, можно не различать ковариантные и контравариантные индексы векторов и тензоров.

2 Тензор энергии-импульса с ненулевым следом и уравнения сохранения энергии-импульса ЭМП

Зоммерфельд А. разделил электромагнитные величины на силовые и количественные величины и указал, что энергетические величины являются произведениями силовых величин на количественные величины [13 с.11]. К силовым величинам он отнес напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ и индукцию магнитного поля $\mathbf{B}$ в вакууме. К количественным величинам он отнес индукцию электрического поля $\mathbf{D}$ и напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$ в диэлектрической среде. Пары величин $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ он объединил, соответственно, в антисимметричные тензоры ЭМП $\mathbf{F}_{[\nu\mu]}$ и электромагнитной индукции $\mathbf{f}_{[\nu\mu]}$ [13 с.298]. далее показан вывод ТЭИ непосредственно из антисимметричных тензоров ЭМП и электромагнитной индукции.

Энергия взаимодействия ЭМП со средой является квадратичной формой от напряженностей и индукций электрического и магнитного полей. Поскольку напряженности и индукции электрического и магнитного полей являются компонентами соответствующих тензоров, то квадратичные формы их компонентов являются компонентами ТЭИ. Таким образом, руководствуясь указанием Зоммерфельда А., получен ТЭИ в виде матричного произведения тензоров ЭМП и индукции [12].

Этот ТЭИ в каноническом матричном виде:

$$\mathbf{T}_{\nu\mu}=\begin{bmatrix} W & i\frac{1}{c}\mathbf{S} \\ ic\cdot\mathbf{g} & \mathbf{t}_{ik} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{E}\cdot\mathbf{D} & i\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c \\ ic\cdot(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) & E_iD_k+B_iH_k-\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Здесь $W=\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}$ – плотность энергии;

$\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ – плотность потока энергии (вектор Умова-Пойнтинга);

$\mathbf{g}=\mathbf{D}\times\mathbf{B}$ – плотность импульса;

$\mathbf{t}_{ik}=E_iD_k+B_iH_k-\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})$ (i, k=1, 2, 3) – тензор плотности потока импульса (тензор напряжений).

След ТЭИ (1) равен $Tr\mathbf{T}_{\mu\mu}=\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}-\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}$ и представляет собой инвариант ЭМП.

Для слабого ЭМП в изотропной неферромагнитной диэлектрической среде без дисперсии обычно принимают материальные уравнения в виде:

$$\mathbf{D}=\varepsilon\cdot\varepsilon_0\cdot\mathbf{E} \quad \text{и} \quad \mathbf{H}=\mathbf{B}/\mu\cdot\mu_0 \quad (2)$$

где ε и μ, соответственно, относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. Для среды, описываемой материальными уравнениями (2), ТЭИ (1) имеет симметричный вид:

$$\mathbf{T}_{\nu\mu}=\begin{bmatrix} \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}^2 & i\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B})/\mu\mu_0c \\ i\cdot\varepsilon\varepsilon_0c(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) & \varepsilon\varepsilon_0E_iE_k+(B_iB_k-\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}))/\mu\mu_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}^2 & i\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) \\ i\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) & \varepsilon\varepsilon_0E_iE_k+(B_iB_k-\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}))/\mu\mu_0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

След ТЭИ (7) равен $Tr\mathbf{T}_{\mu\mu}=\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}^2-\mathbf{B}^2/\mu\mu_0$.

Для вакуума и микрополя ТЭИ (1) также имеет симметричный вид:

$$\mathbf{T}_{\nu\mu}=\begin{bmatrix} \varepsilon_0\mathbf{E}^2 & i\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) \\ i\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) & \varepsilon_0E_iD_k+(E_iB_k-\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})/\mu_0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

След ТЭИ (4) равен $Tr\mathbf{T}_{\mu\mu}=\varepsilon_0\mathbf{E}^2-\mathbf{B}^2/\mu_0$.

Уравнения сохранения для электромагнитной энергии и импульса следуют из ТЭИ (1) в виде его четырехмерных дивергенций со сверткой по каждому из индексов. В общем случае ТЭИ (1) является несимметричным и для каждого из его индексов можно записать по две группы трехмерных уравнений (учитывая форму записи ТЭИ (1), здесь можно не различать ковариантные и контравариантные индексы):

$$\text{а)}\ \partial_\nu\mathbf{T}_{\nu\mu}=0 \qquad \text{и} \qquad \text{б)}\ \partial_\mu\mathbf{T}_{\mu\nu}=0 \quad (5)$$

или а) $\frac{1}{c}\partial_tW+c\cdot\nabla\cdot\mathbf{g}=0$ $\quad \frac{1}{c^2}\partial_t\mathbf{S}-\partial_it_{ik}=0$ и б) $\partial_tW+\nabla\cdot\mathbf{S}=0$ $\quad \partial_t\mathbf{g}-\partial_kt_{ki}=0$

В первой группе получим уравнения сохранения плотности энергии ЭМП и плотности потока энергии **S**:

$$\partial_t(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})/c + c\cdot\nabla\cdot(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) = 0 \quad (6)$$

$$\partial_t(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c^2 - \partial_i(E_iD_k + B_iH_k - \delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})) = 0 \quad (7)$$

Во второй группе получим уравнения сохранения плотности энергии и плотности импульса в среде **g**:

$$\partial_t(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})/c + \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c = 0 \quad (8)$$

$$\partial_t(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) - \partial_k(E_kD_i + B_kH_i - \delta_{ki}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})) = 0 \quad (9)$$

Сложив уравнения (6) и (8), а также (7) и (9), окончательно получим уравнения сохранения энергии-импульса в виде системы:

$$2\partial_t(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})/c + c\cdot\nabla\cdot[(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) + (\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c^2] = 0 \quad (10)$$

$$\partial_t[(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c^2 + (\mathbf{D}\times\mathbf{B})] - \partial_i(E_iD_k + B_iH_k - \delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})) - \partial_k(E_kD_i + B_kH_i - \delta_{ki}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})) = 0 \quad (11)$$

В уравнениях (6) – (11) не налагается никаких ограничений на материальные уравнения. Поэтому эти уравнения являются универсальными и описывают законы сохранения плотности энергии, плотности потока электромагнитной энергии и плотности импульса при любых видах материальных уравнений, связывающих ЭМП и поле индукции. Полученные уравнения найдены для неподвижной среды, но в силу релятивистской ковариантности тензоров ЭМП и электромагнитной индукции, эти уравнения, при использовании известных формул перехода, справедливы и для движущейся среды.

Найдя разность уравнений (9) и (7) получим выражение для силы Абрагама в виде:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_A &= \partial_t(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) - \partial_t(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c^2 = \partial_t((\mathbf{D}\times\mathbf{B}) - (\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c^2) = \\ &= \partial_k(E_kD_i + B_kH_i - -\delta_{ki}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})) - \partial_i(E_iD_k + B_iH_k - \delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})) = \nabla\times(\mathbf{E}\times\mathbf{D} + \mathbf{B}\times\mathbf{H})\end{aligned} \quad (12)$$

Из выражения (12) следует вывод, что сила Абрагама является вихревой силой. Кроме того сила Абрагама может быть электрического или магнитного типа. Это важно для правильной постановки экспериментов по ее измерению. Если среда описывается каноническими материальными уравнениями (2), а ε и μ являются постоянными или скалярными функциями, тогда векторы **D** и **E, H** и **B** коллинеарные и сила Абрагама равна нулю. В этом случае в диэлектрической среде действует электромагнитная сила:

$$f_{EM} = \partial_t\mathbf{g} = \partial_t(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) = \nabla(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} - 2\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) \quad (13)$$

Из выражения (13) можно сделать вывод о том, что в зависимости от соотношения величин относительных диэлектрической и магнитной проницаемостей среды электромагнитная сила может изменять знак или обращаться в нуль.

2. Теорема вириала и условие равновесного состояния плазмы

Теорема вириала для системы взаимодействующих за счет внутренних сил частиц, находящихся в динамическом равновесии, связывает между собой среднюю кинетическую и потенциальную энергию системы. Для динамического равновесия такой системы, интеграл по объему суммы следов тензоров всех составных частей системы, равен нулю. В работе [16] теорема вириала представлена в виде интеграла следов ТЭИ составных частей системы:

$$\int_V (\rho \cdot v_\mu v_\mu + P_{\mu\mu} + T_{\mu\mu}) dV = 0 \qquad (14)$$

Однако, след канонического ТЭИ ЭМП равен нулю и поэтому в выражение вириала подставляется полная энергия ЭМП [1]. Например, в работе [7] условие равновесия плазмы в объеме V записано в виде (здесь и далее принята размерность первоисточника):

$$\int_V (\rho v^2 + 3p + \frac{H^2 + E^2}{8\pi}) dV = 0 \qquad (15)$$

Здесь третий член - плотность полной энергии ЭМП, подставленной вместо нулевого следа ТЭИ. Условие равновесия (15) не может быть выполнено, так как все члены в скобках положительны и не могут обратиться в ноль. На основании этого условия в работах [7] и [8] делается вывод о невозможности существования равновесных областей плазмы, в которых это равновесие поддерживается их собственным электромагнитным полем. Это свойство условия (15) появилось в результате подстановки в него выражения для энергии ЭМП $(H^2 + E^2)/8\pi$ [1]. В новом ТЭИ ЭМП (1) его след для среды равен $T_{\mu\mu} = (ED - BH)/4\pi$. После его подстановки в условие равновесия (15) вместо полной энергии ЭМП, получим это условие виде:

$$\int_V (\rho v^2 + 3p + \frac{ED}{4\pi} - \frac{BH}{4\pi}) dV = 0 \qquad (16)$$

Теперь в подынтегральном выражении появился отрицательный член, и условие равновесия может быть выполнено при определенном соотношении энергии магнитного поля с другими параметрами системы:

$$\int_V (\rho v^2 + 3p + \frac{ED}{4\pi}) dV = \frac{1}{4\pi} \int_V (BH) dV \qquad (17)$$

Учитывая квазинейтральность плазмы, электрическим полем часто пренебрегают, тогда условие равновесия примет вид:

$$\int_V (\rho v^2 + 3p) dV = \frac{1}{4\pi} \int_V (BH) dV \qquad (18)$$

Из этого условия следует вывод о возможности существования равновесных областей плазмы, в которых это равновесие поддерживается их собственным магнитным полем и оно способно

удержать плазму от разлета. Этот вывод подтверждается существованием шаровых молний и других долгоживущих плазменных явлений, а также явлением астрофизического магнитного динамо.

Следуя работе В.Д. Шафранова [7] условие (15) можно усилить, положив в нем p=0 и учитывая, что $\int_V (\rho v^2) dV = 2T$, где T кинетическая энергия частиц, получают условие (15), являющееся принципиально неверным:

$$\int_V (\frac{H^2 + E^2}{8\pi}) dV = -2T \qquad (19)$$

Подставив в условие (15) выражение энергии из следа ТЭИ (1) и, учитывая квазинейтральность плазмы, пренебрегая электрическим полем, подучим условие (19) в принципиально правильном виде:

$$\int_V (-2\frac{BH}{8\pi}) dV = -2T \qquad (20)$$

В работе [13] А. Зоммерфельд указывает, что энергия магнитного поля является аналогом кинетической энергии, что соответствует (20).

4. **Заключение**

В настоящей работе показано, что причиной противоречия в теореме вириала для плазмы, приводящей к теоретическому запрету существования шаровых молний и лабораторных долгоживущих плазмоидов, является нулевой след ТЭИ ЭМП, применяемого в теореме вириала. Применение ТЭИ, полученного по указанию А. Зоммерфельда, как матричного произведения тензора ЭМП и тензора индукции, имеющего ненулевой след, представляющий собой инвариант ЭМП, приводит пересмотру теоремы вириала и следующих из нее выводов по равновесному состоянию плазмы. Это корректировка теоремы вириала для плазмы изменяет условия ее равновесного состояния и снимает запрет на существование шаровых молний и лабораторных долгоживущих плазмоидов. Это открывает новые теоретические и практические возможности исследования плазмы и ее равновесных и устойчивых состояний в плазменных установках удержания плазмы, в том числе предназначенных для термоядерного синтеза.

Список литературы

1.Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1973);

2. Спиричев Ю А. О выборе тензора энергии-импульса в электродинамике и силе Абрагама. УФН 188 (3) 325-328 (2018)

3. Iver Brevik PROPOSAL TO REPEAT THE ABRAHAM FORCE EXPERIMENT USING

4 Michael E. Crenshaw Conservation of energy and momentum for an electromagnetic field propagating into a linear medium from the vacuum arXiv: 2211.09871

5. Guoxu Fenga, Jun Huangb A heuristic resolution of the Abraham–Minkowski controversy arXiv: 2101.01004

6. McDonald K T "Bibliography on the Abraham-Minkowski debate" (February 17, 2015, updated September 29, 2017), http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/ambib.pdf

7. Шафранов В.Д. О теореме вириала для системы заряженных частиц УФН 128 (1) 161 - 164 (1979)

8. Шафранов В. Д. О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях // ЖЭТФ. 1957. Т. 33, вып. 3(9). С. 710–722.

9. Бычков В. Л. О наблюдательных свойствах шаровой молнии // Химическая физика. 2006. Т. 25, № 3. С. 7–17.

10. Егоров А. И., Степанов С. И., Шабанов Г. Д. Демонстрация шаровой молнии в лаборатории // УФН. 2004. Т. 174. № 1. С. 107–109.

11. Фуров Л. В. Получение автономных долгоживущих плазменных образований в свободной атмосфере // ЖТФ. 2005. Т. 75, вып. 3. С. 98–101.

12. Yurii A. Spirichev A new form of the energy-momentum tensor of the interaction of an electromagnetic field with a non-conducting medium. The wave equations. The electromagnetic forces arXiv:1704.03815

13. Зоммерфельд А *Электродинамик*а (М.: «Иностранная литература», 1958)

14. Yurii A. Spirichev, Necessary criterion of choosing the energy-momentum tensor and the Lagrange formalism arXiv:1904.10297

15. Кочин Н Е *Векторное исчисление и начала тензорного исчисления* (М.: «Наука», 1965)

16. Котельников И.А. Лекции по физике плазмы. Т.2 Магнитная гидродинамика (С-П, М, Краснодар.: «Лань», 2021)