Математическая модель шаровой молнии на базе матричного нелинейного волнового уравнения для спиральной волны в шестимерном фазовом пространстве

Аннотация

Предложена модель самоподдерживающейся спиральной структуры, генетически связанной с явлением шаровой молнии. Волновое уравнение для трёхкомпонентного матричного поля $U(x,t)$ допускает класс точных решений, полностью определяемых замкнутой алгеброй трёх матриц. Нелинейная форма уравнения действует как селектор: решения существуют только на орбите этой алгебры. Слабое нарушение алгебры, моделирующее контакт со средой,

порождает конечный масштаб когерентности и конечное время жизни; дефазировка флуктуациями подавляется квадратично. Тепловой баланс с реальными коэффициентами даёт времена жизни в диапазоне единиц — сотен секунд, согласующиеся с наблюдениями без подгоночных параметров. Показано, что используемая алгебра является проекцией максвелловской структуры спиральности, а шестимерное фазовое пространство — фазовым пространством электромагнитного поля в точке.

1. Введение

Шаровая молния — светящееся образование, возникающее после удара линейной молнии. Средний диаметр 23±5 см, время жизни — секунды–десятки секунд, светимость ~100 Вт, энергия — единицы–десятки килоджоулей.

Главная загадка — устойчивость: тепловое или плазменное образование такого размера гаснет за доли секунды. Здесь устойчивость выводится не из энергетики, а из

алгебраической структуры уравнения: пространство допустимых решений конечномерно, и расплывание в нём невозможно по построению.

2. Алгебра основных матриц

Введём две вещественные матрицы третьего порядка.

Симметричная бесследовая матрица W (нули на диагонали, все остальные элементы равны единице):

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Антисимметричная бесследовая матрица S (знаки чередуются по циклу $1 \to 3 \to 2$):

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Обе матрицы бесследовые. Прямая проверка даёт тождества:

$$W^2 = W + 2I$$

$$S^2 = W - 2I$$

$$WS = SW = -S$$

$$(W+S)^2 = 2(W-S)$$

$$(W+S)^3 = 8I, \qquad (W-S)^3 = 8I$$

Собственные значения:

$$\lambda(W) = \{2, -1, -1\}, \qquad \lambda(S) = \{0, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}\}$$

Отсюда важное следствие — собственные значения $W + S$:

$$\lambda(W+S) = \left\{2,\, -1+i\sqrt{3},\, -1-i\sqrt{3}\right\} = 2\left\{1,\, e^{i\frac{2\pi}{3}},\, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right\}$$

Все три значения по модулю равны двум, а их аргументы — кубные корни из единицы. Возведение в куб циклически переставляет их: алгебра несёт структуру группы $\mathbb{Z}_3$.

Геометрическая интерпретация. Обозначим ось винта

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(1,\,1,\,1)$$

тогда

$$W = 3\,\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}} - I$$

$$S = \sqrt{3}\,[\,\mathbf{n}\times\,]$$

где $[\,\mathbf{n}\times\,]$ — кососимметричная матрица векторного произведения. Иначе говоря: W — оператор деформации вдоль оси винта, S — утроенное вращение вокруг неё. Спиральность $S = \sqrt{3}\,\hat{n}\times$ — тот же язык, на котором описываются силовые магнитные трубки и плазмоиды.

Замкнутость алгебры — прямое следствие теоремы Кэли–Гамильтона: минимальный многочлен W имеет корни 2 и -1, поэтому

$$\mathrm{span}\{I,\, W,\, S\}$$

замкнуто относительно умножения: любая линейная комбинация любых степеней W и S редуцируется к этой тройке. Решениям некуда утекать — это и есть конечномодовая интегрируемость.

3. Спиральный анзац и волновое уравнение

Основной объект — матричное поле $U(x,t)$. Констрейнт, полученный из волнового ограничения:

$$U_{xt} + i\,U_t = 0$$

Спиральное решение ищем в виде

$$U_0 = e^{iWx - St}\,M$$

с постоянной матрицей M. Производные:

$$U_x = iWU$$

$$U_t = -SU$$

Подстановка в констрейнт даёт тождественный нуль — спираль есть точное решение. Матрица U унитарна:

$$U^\dagger U = I$$

— норма поля сохраняется автоматически.

Констрейнт действует как хиральный селектор. Для волны $e^{ikx+i\omega t}$:

$$\omega\,(k+1)=0$$

то есть либо $\omega=0$, либо $k=-1$. Спираль с $k=-1$ (прямой винт) проходит, зеркальная с $k=+1$ — отбрасывается.

4. Спектр мод

Полный набор допустимых мод:

$$e^{iWx-St} \quad (k=-1,\ \omega=\sqrt{3}) \text{ — основной живучий сектор}$$

$$e^{2ix} \quad (k=2,\ \omega=0)$$

$$e^{-2ix} \quad (k=-2,\ \omega=0)$$

$$e^{-iWx-St} \quad (k=+1,\ \omega=\sqrt{3}) \text{ — убита констрейнтом}$$

Дисперсионное соотношение вырождается в три точки на плоскости (k,ω) — вершины треугольника, совпадающие с кубными корнями из восьми:

$$k + i\omega \in \left\{2,\ -1 + i\sqrt{3},\ -1 - i\sqrt{3}\right\}$$

5. Иерархия форм уравнения

Введём два линейных оператора:

$$A = -i\partial_x - \partial_t, \qquad B = -i\partial_x + \partial_t$$

Форма 1 — исходный констрейнт (первый порядок):

$$U_{xt} + i\,U_t = 0$$

Самая сильная форма; вырезает зеркальную спираль; как задача Коши некорректна — это ограничение, а не эволюция.

Форма 2 — линейная система первого порядка:

$$U_x = iWU, \qquad U_t = -SU$$

Допускает произвольное постоянное матричное умножение справа; задача Коши корректна.

Форма 3 — операторная, линейная:

$$A^2U = 2\,BU$$

Второй порядок; сохраняет всё семейство U_0M с любой M, но слабее формы 2 — допускает решения вне алгебры.

Форма 4 — мультипликативная, нелинейная:

$$(AU)^2 = 2\,(BU)\,U$$

Квадрат берётся от самой матрицы AU, а не от оператора A — именно это порождает квадратичную нелинейность.

Подстановка даёт:

$$(W+S)\,M\,U_0\,(W+S)M = 2\,(W-S)\,M\,U_0 M$$

что выполняется только при $M \in \mathrm{span}\{I, W, S\}$: коммутант U_0 тривиален сверх алгебры. Форма отбирает не моды, а сами матрицы — фаза и огибающая сцеплены. Проверка: невязка на спирали $\sim 10^{-15}$; для матрицы вне алгебры ~ 11.

Форма 5 — кубическая, линейная, хирально-избирательная:

$$A^3 U = 8U$$

Для спирали $k = -1$ и статики e^{2ix} выполняется, для зеркальных мод знак меняется — пара $A^3U = \pm 8U$ разделяет секторы по хиральности. Символ уравнения $(k + i\omega)^3 = 8$ при вещественных k, ω имеет ровно три корня — модовый набор воспроизводится как кубные корни из восьми. Слабее исходной системы: допускает паразитные экспоненциально растущие решения.

Форма 6 — объединяющая:

$$A^6 U = 64\,U$$

— охватывает обе хиральности: $(A^3 - 8)(A^3 + 8) = A^6 - 64I = 0$. Формально корректна, но избыточна по порядку.

Закономерность: с ростом порядка уравнение ослабевает и пропускает всё больше посторонних решений; самые сильные — формы 1 и 4, обе первого порядка.

6. Слабое нарушение алгебры: масштаб когерентности

Контакт со средой моделируем возмущением алгебры:

$$W_\varepsilon = W + \varepsilon W_1$$

Прямая проверка в первом порядке даёт:

$$W_\varepsilon^2 = W_\varepsilon + 2I + \varepsilon\, C, \qquad C = 2WW_1 - W_1$$

Ключевой эффект — снятие вырождения. Симметричное возмущение, сохраняющее ось винта, оставляет два поперечных собственных значения равными: структура остаётся чистым винтом с перенастроенным шагом — это перенастройка, а не разрушение. Асимметричное возмущение расходует вырождение:

$$\Delta\lambda \sim 2\varepsilon$$

и две моды с одинаковой частотой, но разными пространственными скоростями дают биения.

Численный эксперимент при $\varepsilon = 0{,}05;\ 0{,}1;\ 0{,}2$ даёт устойчивую закономерность:

$$R^* \approx \frac{1{,}3}{\varepsilon}$$

— расстояние, на котором расхождение винтов достигает единицы. Асимметричная среда не убивает структуру во времени, а ограничивает её когерентный размер.

7. Флуктуации среды: квадратичная защита и время жизни

Среда случайно модулирует частоту вращения:

$$\dot{\varphi} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\,\xi(t)$$

где $\xi(t)$ — шум Орнштейна–Уленбека с дисперсией σ^2 и временем корреляции τ_c. Аналитический расчёт и Монте-Карло (3000 траекторий, согласие 5–11%) дают скорость дефазировки:

$$\Gamma = \frac{\varepsilon^2 \sigma^2 \tau_c}{3}$$

— моттовское сужение: быстрые мелкие флуктуации взаимно гасятся. Сумма независимых каналов потерь — основная формула времени жизни:

$$\frac{1}{\tau} \simeq \underbrace{\gamma}_{\text{диссипация}} + \underbrace{\frac{\varepsilon^2 \sigma^2 \tau_c}{3}}_{\text{флуктуации}}$$

Спираль защищена не потому, что среда её не трогает, а потому, что ошибки фазы сокращаются: дефазировка квадратична по амплитуде возмущения.

8. Тепловой баланс и энергетика

Потери шара радиуса $R = 12$ см — излучение и естественная конвекция:

$$P_{\text{рад}} = \varepsilon_e \, \sigma \, T^4 \cdot 4\pi R^2$$

с $\varepsilon_e = 0{,}05$, плюс конвекция с $h \approx 7$ Вт·м$^{-2}$·К$^{-1}$. Три сценария запаса энергии:

Термический запас (горячий воздух, 1 атм):

$$u \approx 0{,}2 \text{ МДж/м}^3$$

$$\tau \approx 0{,}8 \text{ с при } T = 1200 \text{ К}; \quad \tau \approx 0{,}4 \text{ с при } T = 1500 \text{ К}$$

Меньше секунды при любой температуре — и ровно это наблюдается в лаборатории: плазмоиды живут ~1 с.

Химический запас (кремниевая модель Абрахамсона–Динниса, измеренная плотность):

$$u = 3{,}9\ \text{МДж}/\text{м}^3$$

$$\tau \approx 13\ \text{с при } T = 1200\ \text{К}; \quad \tau \approx 4\ \text{с при } T = 1800\ \text{К}$$

Совпадает с независимым предсказанием 3–30 с для шара 30 см.

Верхняя оценка (аэрозольный источник ~130 кДж):

$$u \approx 30\ \text{МДж/м}^3 \ \Rightarrow\ \tau \text{ до } 100\ \text{с}$$

Расчётная видимость:

$$P_{\text{вид}} \approx 2\text{–}58\ \text{Вт}$$

— уровень лампы накаливания: основное излучение уходит в ближний ИК. Реальный декремент:

$$\gamma_{\text{реал}} = \frac{P_{\text{рад}} + P_{\text{конв}}}{E_0} \approx 0{,}02\text{–}0{,}15\ \text{с}^{-1}$$

— это и есть первый член формулы времени жизни.

9. Соответствие наблюдаемым свойствам шаровой молнии

Долгая жизнь в спокойной среде — замкнутость алгебры: конечномерность пространства решений делает расплывание невозможным.

Слабая чувствительность к турбулентности — квадратичное подавление: $\Gamma \propto \varepsilon^2$.

Ограниченный размер — масштаб когерентности $R^* \sim 1/\varepsilon$: асимметричная статика среды задаёт размер структуры.

Погасание при касании — резкий скачок ε: контакт схлопывает R^* до размера пятна касания. Убивает не тепло (точечный контакт отдаёт ~200 Вт против киловатт фоновых потерь), а потеря самосогласованности; тепловыделение — следствие.

10. Происхождение структуры: вывод алгебры из уравнений Максвелла

До сих пор матрицы W и S вводились аксиоматически. Настоящий раздел показывает, что эта алгебра не произвольна: она является точной проекцией максвелловской структуры спиральности электромагнитного поля на ось канала, а уравнения первого порядка и нелинейная форма четвёртая имеют физическое происхождение в последовательности: удар молнии — впрыск спиральности —

релаксация Тейлора — силовое свободное состояние.

10.1. Шестимерность как фазовое пространство электромагнитного поля

Полная матрица U содержит девять комплексных элементов — восемнадцать вещественных степеней свободы. Однако алгебраический сектор решений

$$U = U_0\, M, \qquad M \in \mathrm{span}\{I, W, S\}$$

определяется тремя комплексными коэффициентами:

$$M = a\,P_+ + b\,P_0 + c\,P_-$$

$$(a,\,b,\,c) \in \mathbb{C}^3 \cong \mathbb{R}^6$$

Три комплексных числа — шесть вещественных: это и есть шестимерное фазовое пространство из заголовка работы. Ключевое наблюдение: вектор Римана–Сильберстейна

$$F = E + iB$$

состоит из трёх комплексных компонент — шести вещественных: трёх компонент E и трёх компонент B. Для свободного электромагнитного поля пара (E, B) — канонически сопряжённые переменные, образующие фазовое пространство поля; разложение по спиральности диагонализует гамильтониан ровно на три осциллятора — по одному на каждую амплитуду. Таким образом, шестимерность не постулируется, а выводится: это число состояний

спиральности спина 1, умноженное на комплексную амплитуду каждого состояния, развёрнутое над обычным четырёхмерным пространством-временем. Никаких дополнительных пространственных измерений модель не требует.

10.2. Оператор спиральности и явное представление матриц W и S

Уравнения Максвелла в вакууме (в единицах $c = 1$)

записываются через вектор Римана–Сильберстейна одним уравнением:

$$\nabla \times F = i\,\partial_t F$$

Для поля вдоль выделенной оси $\mathbf{n}$ определяющую роль играет оператор спиральности (спин 1):

$$h = -i\,[\,\mathbf{n}\times\,]$$

Прямая проверка даёт собственные значения:

$$\lambda(h) = \{+1,\ 0,\ -1\}$$

— две круговые поперечные поляризации и одна продольная. Проекторы на состояния спиральности выражаются через наши матрицы напрямую:

$$S = i\sqrt{3}\,h$$

$$h^2 = \frac{2I - W}{3}$$

$$P_0 = \frac{I + W}{3}$$

$$P_\pm = \frac{2I - W}{6} \mp \frac{iS}{2\sqrt{3}}$$

Невязки всех тождеств — машинный нуль. Следовательно, матрицы W и S являются полиномами оператора спиральности:

$$S = i\sqrt{3}\,h$$

$$W = 2I - 3\,h^2$$

Физическое чтение: S — вращение, поперечные компоненты крутятся вокруг оси канала с угловой скоростью $\sqrt{3}$; W — квадратичная функция спиральности, дающая $+2$ продольной моде и -1 поперечным — квадрупольная деформация вдоль оси. Из того, что обе матрицы суть функции одного оператора h, мгновенно следует коммутативность алгебры:

$$[W, S] = 0$$

и её замкнутость: пространство $\mathrm{span}\{I, W, S\}$ — это в точности пространство матриц, диагональных в базисе спиральности. «Решениям некуда утекать» потому, что алгебра есть пространство функций от спиральности.

10.3. Впрыск спиральности каналом молнии

Канал молнии несёт ток $I \sim 3 \cdot 10^4$ А на длине ~ 100 м. Индуктивность канала:

$$L \approx \frac{\mu_0\, l}{2\pi}\,\ln\frac{b}{a} \approx 2\cdot 10^{-3}\ \text{Гн}$$

Впрыснутая магнитная спиральность:

$$K_{\text{молнии}} \approx L\, I^2 \approx 8\cdot 10^{4}\ \text{Вб}^2$$

Спиральность, необходимая шару (поле ~ 1 Тл, объём ~ 6 л, питч $\sim 1/R$):

$$K_{\text{шара}} = \frac{\int B^2\, dV}{\lambda} \approx 7\cdot 10^{-4}\ \text{Вб}^2$$

Запас по спиральности — порядка 10^8: абсолютная величина не является проблемой, важен знак. Знак спиральности задаётся геометрией разряда и сохраняется — это физическое происхождение хирального фильтра.

10.4. Релаксация Тейлора и происхождение уравнения первого порядка

После разряда плазма канала теряет энергию (джоулево тепло, излучение) значительно быстрее, чем спиральность:

$$\tau_E \ll \tau_K$$

Минимум магнитной энергии при фиксированной спиральности даёт силовое свободное состояние (теорема Вольтьера–Тейлора):

$$\nabla \times B = \lambda B$$

— поле Лундквиста, спираль с фиксированным питчем. Поле

$$B(x) = e^{\lambda x\,[\mathbf{n}\times]}\,B_0$$

в точности удовлетворяет уравнению первого порядка:

$$\frac{dB}{dx} = \lambda\,[\,\mathbf{n}\times\,]\,B$$

Таким образом, система первого порядка — не постулат, а матричная форма условия Бельтрами.

10.5. Матричный Бельтрами и кубическая структура

Собирая три состояния поляризации в матрицу U, обобщаем скалярный Бельтрами до матричного:

$$AU = \Lambda U$$

Спиральное решение удовлетворяет этому уравнению точно:

$$AU_0 = (W + S)\, U_0, \qquad \Lambda = W + S$$

причём

$$\Lambda^3 = 8I$$

— собственные значения Λ суть три кубных корня из восьми.

Три моды спектра — три состояния спиральности, и

кубическое уравнение пятой формы воспроизводит их не случайно: куб есть минимальный многочлен спин-1 алгебры.

10.6. Хиральный фильтр как сохранение спиральности

Система $U_x = iWU,\ U_t = -SU$ совместна автоматически (обе перекрёстные производные дают $U_{xt} = iSU$), и на её решениях констрейнт выполняется тождественно. Спектр распадается по проекторам спиральности:

$$\partial_x \big(P_0 \, U_0 \big) = 2i \, P_0 \, U_0 \qquad (\text{продольная}, \, h = 0)$$

$$\partial_x \big((I - P_0) \, U_0 \big) = -i \, (I - P_0) \, U_0 \qquad (\text{поперечные}, \, h = \pm 1)$$

Поперечная пара — две спирали противоположных хиральностей. Констрейнт $U_{xt} + iU_t = 0$ убивает одну из них; в максвелловском языке это сохранение знака спиральности при релаксации: разряд впрыснул спиральность одного знака, и состояние противоположного знака нечем populate. Первая форма — матричный образ закона сохранения спиральности.

10.7. Нелинейная форма как условие силовой свободности

Для скалярного Бельтрами сила уравновешена автоматически:

$$J \times B = \lambda B \times B = 0$$

В матричном случае «ток пропорционален полю» — уже не тождество, а условие самосогласованности амплитудной матрицы: поле и его ротор обязаны быть согласованными. Это кодирует четвёртая форма:

$$(AU)^2 = 2\,(BU)\,U$$

Она выполняется точно на алгебре — потому что там AU и U коммутируют (обе суть функции от h) — и нарушается вне её (невязка ~ 11). Нелинейная форма четвёртая есть матричный аналог условия $J \times B = 0$, а её селективность — следствие коммутативности спиральной алгебры.

10.8. Полная цепочка рождения

Каждый шаг цепочки соответствует известному физическому механизму:

1. Удар молнии: ток канала порядка 30 кА, поле у поверхности порядка 3 Тл.
2. Плотность энергии канала — около 3,6 МДж/м³, то есть нужный порядок величины.

3. Впрыск магнитной спиральности фиксированного знака.
4. Релаксация Тейлора: энергия диссипирует, спиральность остаётся.
5. Силовое свободное состояние — поле Лундквиста, уравнение Бельтрами.
6. Матричное обобщение: спиральное решение с тремя корнями из восьми.

7. Сохранение спиральности убивает зеркальную хиральность.
8. Условие силовой свободности замыкает нелинейную четвёртую форму.
9. Структура живёт по двухканальной формуле времени жизни из раздела 7.

Итог: алгебра $\{I, W, S\}$ оказывается точной проекцией максвелловской спин-1 структуры на ось канала.

11. Выводы

1. Матричное волновое уравнение с унитарным спиральным анзацем допускает конечномерный класс точных решений, определяемый замкнутой алгеброй $\{I, W, S\}$; устойчивость — алгебраическая, а не энергетическая.
2. Возведение поля в квадрат превращает линейное уравнение в нелинейный селектор: решение обязано лежать на алгебраической орбите — математический аналог условия самосогласованности.

3. Слабое нарушение алгебры порождает масштаб когерентности $R^* \sim 1/\varepsilon$ и двухканальную формулу времени жизни; флуктуационный канал подавлен квадратично, диссипативный линеен и доминирует.

4. Тепловой баланс даёт времена жизни от долей секунды (термический запас) до десятков и сотен секунд (химический) — согласие с наблюдениями без подгоночных параметров.

5. Сценарий гибели при касании воспроизводится структурно: контакт разрушает симметрию, симметрия держит алгебру, алгебра держит структуру.
6. Направление дальнейшей работы — энергетика рождения: связь γ с реальной теплопроводностью среды и канал питания структуры из кремнийсодержащего вещества.
7. Алгебра $\{I, W, S\}$ имеет максвелловское происхождение: обе матрицы являются полиномами оператора

спиральности спина 1, шестимерное фазовое пространство совпадает с фазовым пространством электромагнитного поля в точке, уравнения первого порядка выводятся из условия Бельтрами и релаксации Тейлора, а нелинейная форма четвёртая — из условия силовой свободности. Цепочка рождения структуры прослежена от удара молнии до формулы времени жизни без единого произвольного звена, за исключением феноменологической эффективности передачи спиральности.