

УДК 530.24:514.7:515.1 + 530.12

Автор: Максимов Максим Владимирович

Организация: частный исследовательский проект

E-mail: maksum.arakaev@yandex.ru

Телефон: +79046667422

Неабелева калибровочная модель на основе $SO(2,1)$: топологические дефекты и кривизна метрики при нулевой плотности энергии

Аннотация

В работе построена классическая калибровочная модель на основе некомпактной группы $SO(2,1)$ с формой Киллинга сигнатуры $(+, -, -)$. Группа содержит компактную подгруппу $U(1)$ (генератор K_3) и два некомпактных генератора K_1, K_2 . Рассматривается трёхмерная конфигурация — топологический дефект типа соленоида вдоль оси z , создающий многосвязность окружающей области и порождающий голономию, выходящую за пределы $U(1)$ -сектора. Базовая конфигурация использует цилиндрический соленоид с одним топологическим контуром; обсуждаются также конический и тороидальный дефекты, обладающие более богатой топологией (два независимых контура), что обеспечивает проекцию электромагнитного потенциала во все секторы некомпактной алгебры. Показано, что анзац для потенциалов, соответствующих некомпактным направлениям, порождает неабелеву самокривизну в K_3 -направлении через коммутатор. Материя, несущая $U(1)$ -заряд, взаимодействует только с электромагнитной (линейной) частью кривизны; тензор энергии-импульса калибровочного поля определяется полной неабелевой кривизной с учётом формы Киллинга. Сигнатура $(+, -, -)$ допускает конфигурации, лежащие на «световом конусе» внутреннего пространства: $(F^3)^2 = (F^1)^2 + (F^2)^2$, что приводит к нулевой плотности энергии $T_{tt} = 0$ при ненулевых пространственных напряжениях $T_{ij} \neq 0$. Получена оценка поправки к метрике $\Delta g_{ij} \sim G \cdot g^2 \cdot c^2 \cdot d_1^2 / (c^4 \cdot r^4)$. Показано, что вакуумные уравнения Янга–Миллса не допускают вещественных решений данного типа вследствие некомпактной сигнатуры; обсуждается интерпретация дефекта как источника. В динамическом режиме обсуждается возможность возбуждения электромагнитного отклика при

модуляции голономии внешним гравитационным возмущением. Работа носит теоретико-полевой характер и не претендует на квантовое описание.

1. Введение

Стандартная калибровочная теория электромагнетизма основана на абелевой группе $U(1)$. Обобщение на неабелевы группы (Янга–Миллса [1]) вводит самодействие через коммутатор потенциалов. Классические неабелевы модели ($SU(2)$, $SU(3)$) используют компактные группы с отрицательно определённой формой Киллинга, что гарантирует положительность кинетического члена и унитарность при квантовании [2].

Некомпактные калибровочные группы встречаются в теоретической физике прежде всего в контексте супергравитации, конформных теорий и теорий струн [3, 4]. Калибровочные модели на основе некомпактных групп в чистом виде (без механизма нарушения симметрии до компактной подгруппы) сталкиваются с проблемой неопределённости кинетического члена — так называемой проблемой «фантомов» (состояний с отрицательной нормой) [2, 5]. Тем не менее, изучение таких моделей на классическом уровне представляет интерес, как исследование структурных свойств неабелевых теорий с некомпактной сигнатурой. В частности, работы [5, 6] показывают, что $SU(1,1)$ -эквивариантные решения уравнений Янга–Миллса существуют, но имеют особенности, связанные с некомпактностью группы.

В данной работе рассматривается классическая калибровочная модель на основе $SO(2,1)$ — группы, сохраняющей квадратичную форму с сигнатурой $(+, -, -)$. Алгебра Ли $SO(2,1)$ изоморфна алгебре $SL(2, \mathbb{R})$ и содержит компактную подгруппу $SO(2) \cong U(1)$ (генератор K_3), а также два некомпактных генератора K_1 , K_2 (буста). Выбор сигнатуры $(+, -, -)$ формы Киллинга приводит к «световому конусу» во внутреннем пространстве: условие $(F^3)^2 - (F^1)^2 - (F^2)^2 = 0$ определяет нулевые направления, аналогичные светоподобным векторам в пространстве-времени. На таких направлениях плотность энергии калибровочного поля обращается в нуль, в то время как пространственные напряжения остаются ненулевыми.

Топологической основой модели служит соленоид — протяжённый объект, создающий многосвязность окружающей области. Эта конструкция прямо аналогична эффекту Ааронова–Бома [11], где соленоид создаёт нетривиальную голономию в $U(1)$ -секторе. В данной модели голономия

наклонена в плоскость некомпактных генераторов, что порождает потенциалы некомпактных секторов как «тень» электромагнитного потенциала.

Базовая конфигурация, подробно рассматриваемая в данной работе, использует цилиндрический соленоид вдоль оси z с одним топологическим контуром (азимутальным обходом) и одним углом наклона голономии α в плоскости (K_1, K_3) . В этой минимальной конфигурации компонента потенциала A^2 , соответствующая второму некомпактному генератору K_2 , не определяется голономией и добавляется как независимый анзац. Естественное разрешение этого ограничения состоит в переходе к дефектам с более сложной топологией. Конический соленоид, нарушающий трансляционную инвариантность вдоль оси, вводит второй (связанный) топологический контур вдоль наклонной образующей и второй угол наклона β в плоскости (K_1, K_2) . Тороидальный соленоид — цилиндр, свёрнутый в кольцо, — обладает двумя независимыми нестягиваемыми контурами (меридианом и параллелью) с фундаментальной группой $\pi_1 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ и обеспечивает два независимых угла наклона (α, β) , что позволяет выразить все три потенциала A^1, A^2, A^3 как проекции одного электромагнитного источника. Подробная проработка конической и тороидальной конфигураций вынесена в обсуждение (раздел 12); основной текст построен для цилиндрического случая, как минимальной модели.

Физическая природа дефекта может быть различной — от сверхпроводящего соленоида до любой области с нетривиальной топологией; существенны только топологические свойства — многосвязность области и нетривиальная фундаментальная группа π_1 .

Модель опирается на три структурных элемента: (1) топологический дефект (соленоид), создающий многосвязность области; (2) голономию, выходящую за пределы $U(1)$ -сектора; (3) неабелеву самокривизну, входящую в тензор энергии-импульса, но не взаимодействующую с $U(1)$ -заряженной материей. Работа носит теоретико-полевой характер; проблема унитарности некомпактного сектора отмечена как открытый вопрос.

2. Математический аппарат

2.1. Группа $SO(2,1)$ и её алгебра Ли

Группа $SO(2,1)$ — группа линейных преобразований трёхмерного пространства, сохраняющих квадратичную форму с сигнатурой $(+, -, -)$. Алгебра Ли $so(2,1)$ порождается тремя генераторами K_1, K_2, K_3 с коммутационными соотношениями:

$$[K_1, K_2] = -i \cdot K_3$$

$$[K_2, K_3] = +i \cdot K_1$$

$$[K_3, K_1] = +i \cdot K_2$$

Генератор K_3 соответствует вращению в плоскости (1, 2) — компактная подгруппа, изоморфная $U(1)$. Генераторы K_1 и K_2 соответствуют бустам — некомпактным преобразованиям.

Принципиальное отличие от $SU(2)$: в $SU(2)$ все три коммутатора имеют знак плюс: $[T_1, T_2] = +iT_3$. В $SO(2,1)$ первый коммутатор имеет знак минус: $[K_1, K_2] = -iK_3$. Этот знак — прямое следствие некомпактной сигнатуры и, как будет показано далее, имеет существенные физические следствия.

2.2. Структурные константы

Коммутаторы записываются через структурные константы ε^a_{bc} :

$$[K_a, K_b] = i \cdot \varepsilon^c_{ab} \cdot K_c$$

Для $SO(2,1)$:

Коммутатор	Структурная константа	Значение
$[K_1, K_2]$	ε^3_{12}	-1
$[K_2, K_3]$	ε^1_{23}	+1
$[K_3, K_1]$	ε^2_{31}	+1

Знак минус в ε^3_{12} — единственное отличие от $SU(2)$, где все $\varepsilon = +1$.

2.3. Форма Киллинга

Форма Киллинга — естественная метрика на алгебре Ли, определяемая через структурные константы:

$$\kappa_{ab} = \varepsilon^c_{ad} \cdot \varepsilon^d_{bc}$$

Для $SU(2)$: $\kappa_{ab} = \text{diag}(-1, -1, -1)$ — отрицательно определена (стандартное соглашение, при котором кинетический член положителен).

Для $SO(2,1)$: $\kappa_{ab} = \text{diag}(+1, -1, -1)$ — сигнатура (+, -, -).

Форма Киллинга для алгебры $SL(2, \mathbb{R}) \cong SO(2,1)$ имеет сигнатуру (2, 1) [7]. Это стандартный результат дифференциальной геометрии алгебр Ли: компактные алгебры имеют отрицательно определённую форму Киллинга, некомпактные — неопределённую.

Минусы перед K_1 и K_2 возникают потому, что эти генераторы — некомпактные (бусты), подобно тому, как бусты в группе Лоренца дают отрицательный вклад в норму. Компактный генератор K_3 даёт положительный вклад.

Физическое значение: форма Киллинга определяет, с какими знаками вклады различных секторов входят в тензор энергии-импульса. Выбор $SO(2,1)$ вместо $SU(2)$ — это выбор метрики внутреннего пространства, и именно он делает возможной компенсацию вкладов секторов.

3. Калибровочные потенциалы и напряжённости

3.1. Калибровочный потенциал

Калибровочный потенциал — это 1-форма на пространстве-времени со значениями в алгебре $SO(2,1)$:

$$A_\mu = A^1_\mu \cdot K_1 + A^2_\mu \cdot K_2 + A^3_\mu \cdot K_3$$

где $\mu = 0, 1, 2, 3$ — пространственно-временной индекс, $a = 1, 2, 3$ — внутренний индекс. Всего 12 компонент.

3.2. Ковариантная производная

Ковариантная производная — обычная производная плюс поправка на изменение базиса во внутреннем пространстве.

Для калибровочного поля (присоединённое представление):

$$(D_\mu V)^a = \partial_\mu V^a + g \cdot \varepsilon^a_{bc} \cdot A^b_\mu \cdot V^c$$

Все три потенциала A^1, A^2, A^3 действуют нетривиально.

3.3. Напряжённость поля

Полная неабелева напряжённость: $F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g \cdot \varepsilon^a_{bc} \cdot A^b_\mu \cdot A^c_\nu$

Для электромагнитного сектора ($a = 3$):

$$F^3_{\mu\nu} = (\partial_\mu A^3_\nu - \partial_\nu A^3_\mu) - g \cdot (A^1_\mu \cdot A^2_\nu - A^2_\mu \cdot A^1_\nu)$$

Два слагаемых — два разных физических объекта:

1. $F^3_{\text{обычн}} = \partial A^3 - \partial A^3$ — электромагнитная часть (видит материя)
2. $-g \cdot [A^1, A^2]$ — неабелева самокривизна (видит только гравитация)

Эти слагаемые имеют разное происхождение и по-разному взаимодействуют с миром, хотя оба лежат в K_3 -направлении внутреннего пространства.

3.4. Уравнения Янга–Миллса

Уравнения движения без источников: $D_\mu F^{a,\mu\nu} = 0$

Раскрывая ковариантную производную: $\partial_\mu F^{a,\mu\nu} + g \cdot \varepsilon^a_{bc} \cdot A^b_\mu \cdot F^{c,\mu\nu} = 0$

Уравнения движения содержат только структурные константы ε_{bc}^a , но не форму Киллинга κ_{ab} . Сигнатура $(+, -, -)$ влияет на тензор энергии-импульса (ТЭИ), но не на уравнения движения. Динамика полей в $SU(2)$ и $SO(2,1)$ одинакова по форме; разница — в знаке одной структурной константы и в том, как поля входят в гравитацию. Однако, как будет показано в разделе 5, некомпактная сигнатура накладывает нетривиальные ограничения на совместность вакуумных уравнений с анзацем данного типа.

4. Голономия и топологические дефекты

4.1. Многосвязность области

Рассмотрим цилиндрическую область пространства с топологическим дефектом — соленоидом радиуса R вдоль оси z . Область вне соленоида ($r > R$) многосвязна: контур C , обходящий соленоид, не может быть стянут в точку. Эта ситуация прямо аналогична эффекту Ааронова–Бома [11], где соленоид создаёт нетривиальную голономию для заряженной частицы, проходящей мимо него.

Под топологическим дефектом в данной модели понимается любой объект с цилиндрической симметрией, создающий многосвязность окружающей области. Конкретная физическая природа дефекта несущественна для модели: это может быть сверхпроводящий соленоид (как в эффекте Ааронова–Бома [11]), вырезанная область пространства, или иной объект, нарушающий односвязность. Существенны только топологические свойства — многосвязность области и нетривиальная фундаментальная группа π_1 .

4.2. Голономия

Голономия — результат параллельного переноса по замкнутому контуру C :

$$W[C] = P \cdot \exp(i \oint_C A_\mu dx^\mu)$$

Раскрывая через генераторы:

$$W[C] = \exp(i \oint_C (A^1_\mu \cdot K_1 + A^2_\mu \cdot K_2 + A^3_\mu \cdot K_3) dx^\mu)$$

4.3. Наклонённая голономия

В стандартном эффекте Ааронова–Бома [11] голономия порождается только K_3 :

$$W_{AB} = \exp(i \cdot \theta \cdot K_3)$$

где $\theta = e\Phi/\hbar$ — АВ-фаза, Φ — магнитный поток в соленоиде.

В нашей модели голономия наклонена в плоскость некомпактных генераторов:

$$W[C] = \exp(i \cdot \theta \cdot (\cos(\alpha) \cdot K_3 + \sin(\alpha) \cdot K_1))$$

где α — угол наклона голономии (топологический параметр дефекта).

Физический смысл: при обходе соленоида поле поворачивается не только вокруг K_3 (как в обычном АВ-эффекте), но и вокруг K_1 . Угол α определяет степень «замешивания» некомпактного направления в голономию. Возможность неабелевой голономии вокруг топологических дефектов обсуждается в работах [4, 9, 10, 12].

4.4. Топологическая природа дефекта

Дефект не входит в уравнения Янга–Миллса как источник (правая часть). Он входит через граничные условия. Уравнения $D_\mu F^{a,\mu\nu} = 0$ одни и те же везде, но решения различаются из-за многосвязности области.

	Заряд в Максвелле	Дефект в данной модели
Где живёт	В правой части уравнения	В граничных условиях
Что делает	Создаёт поле	Заставляет решение быть нетривиальным
Сохраняется?	Да (локальный закон)	Да (топологический инвариант)
Тип	Локальный	Глобальный (топология области)

5. Трёхмерный анзац для потенциалов

5.1. Постановка задачи

Рассмотрим цилиндрическую область пространства с топологическим дефектом — соленоидом радиуса R вдоль оси z . В отличие от плоского (2D) случая, где используются только координаты (r, φ) , трёхмерная конфигурация (координаты r, φ, z) позволяет получить нетривиальные напряжённости во всех трёх секторах F^1, F^2, F^3 , что необходимо для нетривиального светового конуса внутреннего пространства.

В двумерном случае (только плоскость r, φ) три калибровочных потенциала в двух направлениях неизбежно дают одну из компонент

напряжённости равной нулю, что обедняет структуру светового конуса. Добавление третьего направления z (вдоль оси соленоида) устраняет это ограничение.

5.2. Электромагнитный потенциал

$A^3_\varphi = c_3$ (в координатном базисе), где $c_3 = \theta/(2\pi)$, θ — фаза Ааронова–Бома. Это чистая калибровка: $A^3 = c_3 \cdot d\varphi = d(c_3 \cdot \varphi)$, следовательно $F^3_{\text{обычн}} = 0$ вне соленоида. Материя не фиксирует электромагнитное поле.

5.3. Потенциалы некомпактных секторов

Ангац:

$$A^1_\varphi = c_1 \quad A^1_z = d_1/r \quad A^2_r = c_2/r \quad A^3_\varphi = c_3$$

Все остальные компоненты — нули. Компоненты A^1_φ и A^3_φ — постоянные (чистая калибровка в φ -направлении, определяемая голономией). Компоненты A^1_z и A^2_r спадают как $1/r$, что обеспечивает конечность энергии и согласуется с цилиндрической симметрией.

Условие $\oint A^a_\varphi d\varphi = 2\pi \cdot c_a$ задаёт голономию $W = \exp(i \cdot \theta \cdot (\cos(\alpha) \cdot K_3 + \sin(\alpha) \cdot K_1))$, где $c_1/c_3 = \tan(\alpha)$.

Компонента $A^1_z = d_1/r$ вдоль оси соленоида — ключевое отличие от 2D-случая. Она порождает дополнительную напряжённость в K_2 -направлении через коммутатор $[K_3, K_1] = iK_2$. Физически эта компонента соответствует продольной структуре поля некомпактного сектора вдоль оси дефекта.

5.4. Напряжённости (ортонормированный базис)

В ортонормированном базисе $(\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{z})$ ненулевые компоненты напряжённости:

Плоскость	F^1	F^2	F^3
$(\hat{r}, \hat{\varphi})$	$g \cdot c_2 \cdot c_3 / r^2$	0	$g \cdot c_1 \cdot c_2 / r^2$
$(\hat{r}, \hat{z})$	$-d_1 / r^2$	0	$g \cdot c_2 \cdot d_1 / r^2$
$(\hat{\varphi}, \hat{z})$	0	$g \cdot c_3 \cdot d_1 / r^2$	0

Ключевое отличие от 2D-случая: $F^2_{\varphi z} = g \cdot c_3 \cdot d_1 / r^2 \neq 0$. Компонента $A^1_z = d_1/r$ вдоль оси соленоида порождает напряжённость в K_2 -направлении через коммутатор $[K_3, K_1] = iK_2$.

Все компоненты F^3 — чисто коммутаторные (линейная часть равна нулю, поскольку A^3 — чистая калибровка). Материя, взаимодействующая только с $F^3_{\text{обычн}}$, не фиксирует эти поля.

Компонента $F^1_{rz} = -d_1/r^2$ — линейная (от производной A^1_z), лежит в K_1 -направлении (некомпактный сектор) и не взаимодействует с $U(1)$ -заряженной материей.

5.5. Условие светового конуса

Свёртка с формой Киллинга:

$$\kappa_{ab} \cdot F^a_{\rho\sigma} \cdot F^{b,\rho\sigma} = (2/r^4) \cdot [g^2 \cdot c_2^2 \cdot (c_1^2 - c_3^2) + d_1^2 \cdot (g^2 \cdot c_2^2 - 1) - g^2 \cdot c_3^2 \cdot d_1^2]$$

Условие $T_{tt} = 0$ (световой конус):

$$g^2 \cdot c_2^2 \cdot (c_1^2 - c_3^2) + d_1^2 \cdot (g^2 \cdot c_2^2 - 1) - g^2 \cdot c_3^2 \cdot d_1^2 = 0$$

При $c_1 = c_3 = c$ (наклон голономии $\alpha = 45^\circ$): $g^2 \cdot (c_2^2 - c^2) = 1$

Откуда: $c_2 = \sqrt{(c^2 + 1/g^2)}$

Это условие всегда имеет вещественное решение для любых c и g , что обеспечивает существование конфигураций на световом конусе.

5.6. Проверка уравнений Янга–Миллса

Подстановка анзаца в вакуумные уравнения $D_\mu F^{a,\mu\nu} = 0$ даёт пять алгебраических условий:

1. $c_1 \cdot c_2 \cdot g = 2 \cdot c_3$ ($a = 1, \nu = \varphi$)
2. $c_2^2 \cdot g^2 - c_3^2 \cdot g^2 + 1 = 0$ ($a = 1, \nu = z$)
3. $c_1^2 - c_3^2 + d_1^2 = 0$ ($a = 2, \nu = r$)
4. $-2 \cdot c_1 \cdot c_2 + c_3 \cdot g \cdot (c_2^2 + d_1^2) = 0$ ($a = 3, \nu = \varphi$)
5. $c_1 \cdot c_3 \cdot g + 2 \cdot c_2 = 0$ ($a = 3, \nu = z$)

Из уравнений (1) и (5) непосредственно следует:

$$c_1^2 \cdot g^2 = -4$$

Это не имеет вещественных решений. Вакуумные уравнения Янга–Миллса не допускают вещественных статических конфигураций данного типа.

Причина — знак минус в структурной константе $\epsilon^3_{12} = -1$ (коммутатор $[K_1, K_2] = -iK_3$), что является прямым проявлением некомпактной сигнатуры $SO(2,1)$.

Для компактной группы $SU(2)$, где $\epsilon^3_{12} = +1$, знак в уравнении (5) меняется и система становится совместной. Это согласуется с известным результатом [2]: компактность калибровочной группы необходима для существования вещественных решений определённого типа.

5.7. Интерпретация: дефект как источник

Естественная интерпретация состоит в том, что топологический дефект (соленоид) выступает источником калибровочного поля:

$$D_\mu F^{a,\mu\nu} = J^{a,\nu}_{\text{дефект}}$$

где $J^{a,\nu}_{\text{дефект}}$ — ток, локализованный внутри соленоида ($r \lesssim R$). Вне соленоида ($r \gg R$) анзац представляет приближённое решение, определяемое топологией (голономией) и граничными условиями, а не вакуумными уравнениями. Аналогия: в эффекте Ааронова–Бома [11] векторный потенциал вне соленоида — чистая калибровка, определяемая топологией, а не вакуумным решением в строгом смысле. Потенциал вне соленоида удовлетворяет вакуумным уравнениям Максвелла, но его нетривиальность (ненулевая голономия) обусловлена топологией области и граничными условиями на соленоиде, а не локальным источником в правой части.

Световой конус и условие $T_{tt} = 0$ являются структурными свойствами формы Киллинга и не зависят от выполнения уравнений движения: любая конфигурация на световом конусе даёт $T_{tt} = 0$ при $T_{ij} \neq 0$, независимо от того, удовлетворяет ли она вакуумным уравнениям.

6. Коммутаторный механизм

6.1. Электромагнитный сектор

С учётом 3D-анзаца полная неабелева напряжённость в K_3 -направлении:

$$F^3_{r\varphi} = (\partial_r A^3_\varphi - \partial_\varphi A^3_r) - g \cdot (A^1_r \cdot A^2_\varphi - A^2_r \cdot A^1_\varphi)$$

Первый член (обычная производная) = 0 (чистая калибровка). Остаётся коммутаторная часть:

$$F^3_{r\varphi} = g \cdot c_1 \cdot c_2 / r^2 \neq 0$$

Аналогично:

$$F^3_{rz} = g \cdot c_2 \cdot d_1 / r^2 \neq 0$$

$$F^3_{\varphi z} = 0$$

Все компоненты F^3 — чисто коммутаторные. Приборы показывают $E = B = 0$ ($F^3_{\text{обычн}} = 0$), но полная неабелева кривизна $F^3_{\text{полн}} \neq 0$.

6.2. Напряжённости некомпактных секторов

$$F^1_{r\varphi} = g \cdot c_2 \cdot c_3 / r^2 \text{ (коммутаторная)}$$

$$F^1_{rz} = -d_1 / r^2 \text{ (линейная)}$$

$$F^2_{\varphi z} = g \cdot c_3 \cdot d_1 / r^2 \text{ (коммутаторная)}$$

Пять ненулевых компонент в трёх плоскостях — существенно более богатая структура, чем в 2D-случае.

6.3. Проверка условия конуса

При $c_1 = c_3 = c$:

$$(F^3)^2_{\text{сумма}} = g^2 \cdot c^2 \cdot c_2^2 / r^4 + g^2 \cdot c_2^2 \cdot d_1^2 / r^4 \quad (F^1)^2_{\text{сумма}} + (F^2)^2_{\text{сумма}} = g^2 \cdot c^2 \cdot c_2^2 / r^4 + d_1^2 / r^4 + g^2 \cdot c^2 \cdot d_1^2 / r^4$$

Условие $(F^3)^2 = (F^1)^2 + (F^2)^2$:

$$g^2 \cdot c_2^2 \cdot (c^2 + d_1^2) = g^2 \cdot c^2 \cdot c_2^2 + d_1^2 \cdot (1 + g^2 \cdot c^2)$$

Откуда: $g^2 \cdot c_2^2 = g^2 \cdot c^2 + 1$, что совпадает с результатом раздела 5.5. Конфигурация лежит на световом конусе.

7. Материя и гравитация: два представления

7.1. Ключевое различие

Модель основана на том, что материя и гравитация «смотрят» на неабелево соединение из разных представлений группы:

	Материя	Гравитация
Представление	$U(1) \subset SO(2,1)$	Присоединённое (adjoint)
Ковариантная производная	$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + ie \cdot A_\mu^3 \cdot \psi$	$(D_\mu V)^a = \partial_\mu V^a + g \cdot \epsilon^a_{bc} \cdot A_\mu^b \cdot V^c$
Что «видит»	Только A^3	Все три A^a
Коммутатор $[D, D]$	$ie \cdot F^3_{\text{обычн}} \cdot \psi$	$g \cdot \epsilon^a_{bc} \cdot F^b_{\text{полн}} \cdot V^c$

7.2. Явное вычисление для материи

Ковариантная производная материи ($U(1)$ -заряд, только K_3):

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + ie \cdot A_\mu^3 \cdot \psi$$

Коммутатор:

$$[D_\mu, D_\nu] \psi = ie \cdot (\partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3) \cdot \psi = ie \cdot F^3_{\text{обычн}, \mu\nu} \cdot \psi$$

A^1 и A^2 не входят в производную — коммутаторному члену неоткуда взяться.

При $A^3 = \partial\chi$:

$$[D_\mu, D_\nu] \psi = 0$$

Материя не чувствует ничего. Для прибора $E = B = 0$.

7.3. Явное вычисление для гравитации

В присоединённом представлении:

$$[D_\mu, D_\nu] V^a = g \cdot \varepsilon^a_{bc} \cdot F^b_{\text{полн}, \mu\nu} \cdot V^c$$

Здесь $F^b_{\text{полн}}$ — полная неабелева напряжённость со всеми коммутаторными членами. Для $b = 3$:

$$F^3_{\text{полн}, \mu\nu} = F^3_{\text{обычн}, \mu\nu} - g \cdot [A^1_\mu, A^2_\nu]$$

При $F^3_{\text{обычн}} = 0$ остаётся коммутаторная часть — гравитация её «видит».

7.4. Аналогия с КХД

Аналогичная структура существует в квантовой хромодинамике. Глюонное поле SU(3) имеет энергию и искривляет пространство-время. Адроны (протоны, нейтроны) — цветовые синглеты и не взаимодействуют с глюонным полем напрямую. Эта аналогия структурно корректна: материя в нашей модели несёт U(1)-заряд (аналог «синглета» относительно некомпактных секторов), а гравитация чувствует полную кривизну.

Однако важно отметить ключевое отличие. В КХД глюоны сами несут цветовой заряд (адьюнктное представление SU(3)), и цветовой сектор квантован и унитарен, поскольку SU(3) — компактная группа с отрицательно определённой формой Киллинга. В нашей модели некомпактный сектор (генераторы K_1, K_2) не унитарен: при квантовании он порождает состояния с отрицательной нормой [2, 5]. Таким образом, аналогия с конфайнментом в КХД является структурной, но не распространяется на квантовые свойства. Модель в её текущем виде — классическая конструкция; вопрос о квантовом статусе полей некомпактных секторов остаётся открытым.

8. Тензор энергии-импульса и искривление метрики

8.1. Построение ТЭИ

Тензор энергии-импульса калибровочного поля:

$$T_{\mu\nu} = \kappa_{ab} \cdot F^a_{\mu\rho} \cdot F^{b,\rho}_\nu - (1/4) \cdot g_{\mu\nu} \cdot \kappa_{ab} \cdot F^{a,\rho\sigma} \cdot F^{b,\rho\sigma}$$

Здесь F_a — полная неабелева напряжённость (с коммутатором), $\kappa_{ab} = \text{diag}(+1, -1, -1)$.

8.2. Плотность энергии

$$T_{tt} \propto (F^3)^2 - (F^1)^2 - (F^2)^2$$

На световом конусе SO(2,1): $(F^3)^2 = (F^1)^2 + (F^2)^2 \rightarrow T_{tt} = 0$

Нулевая плотность энергии при ненулевых полях. Это топологическая конфигурация напряжений без плотности энергии в данной системе отсчёта, аналогичная светоподобному вектору в СТО.

8.3. Пространственные напряжения (3D, $c_1 = c_3 = c$)

На световом конусе ($g^2 \cdot c^2 = g^2 \cdot c^2 + 1$):

$$T_{rr} = g^2 \cdot c^2 \cdot d_1^2 / r^4 \quad T_{\varphi\varphi} = -g^2 \cdot c^2 \cdot d_1^2 / r^4 = -T_{rr} \quad T_{zz} = 0$$

$$T_{\varphi z} = g \cdot c \cdot c_2 \cdot d_1 \cdot (g \cdot c_2 + 1) / r^4 \neq 0 \text{ (сдвиговое напряжение)}$$

Радиальное и азимутальное напряжения равны по модулю и противоположны по знаку — чистый сдвиг. Компонента $T_{zz} = 0$ согласуется с трансляционной инвариантностью вдоль оси соленоида. Ненулевое сдвиговое напряжение $T_{\varphi z}$ — специфическая особенность 3D-конфигурации, отсутствующая в 2D-случае.

8.4. Поправка к метрике

Из уравнений Эйнштейна: $\Delta g_{ij} \sim (G/c^4) \cdot T_{ij} \sim G \cdot g^2 \cdot c^2 \cdot d_1^2 \cdot \hbar c / (c^4 \cdot r^4)$

Множитель

Происхождение

$$c^2 = (\theta/2\pi)^2$$

АВ-фаза (параметр голономии)

$$d_1^2$$

Амплитуда продольной компоненты A_z^1

$$G/c^4$$

Гравитационная постоянная

$$1/r^4$$

Радиальное затухание

$$g^2$$

Константа связи

9. Статический режим: искривление без электромагнитного поля

9.1. Резюме статического режима

В статическом режиме модель даёт:

1. Для приборов: $E = B = 0$ ($F^3_{\text{обычн}} = 0$)
2. Для гравитации: $T_{tt} = 0$, $T_{ij} \neq 0$ (искривление метрики)
3. Механизм: коммутатор $[A^1, A^2] \rightarrow$ неабелева самокривизна $F^3_{\text{полн}} \neq 0$
4. Защита: световой конус SO(2,1) гарантирует $T_{tt} = 0$, как симметричный инвариант

9.2. Природа неабелевой самокривизны

Важно подчеркнуть: коммутаторная часть F^3 — не электромагнитное поле. Это неабелева самокривизна соединения, взаимодействующая с гравитацией через тензор энергии-импульса, но не взаимодействующая с $U(1)$ -заряженной материей. Электромагнитная часть (∂A^3) равна нулю; неабелева часть $(g \cdot [A^1, A^2])$ ненулевая, но это поле новой природы — самокривизна полей некомпактных секторов, спроецированная в K_3 -направление.

9.3. Сдвиговое напряжение

В 3D-конфигурации появляется дополнительная структура — сдвиговое напряжение $T_{\varphi z} \neq 0$. Это означает, что искривление метрики имеет не только радиально-азимутальный (как в 2D), но и спиральный характер. Сдвиговое напряжение пропорционально произведению $(g \cdot c_2 + 1)$ и обращается в нуль только при специальном выборе константы связи.

9.4. Концептуальная схема

Полная цепочка механизма в статическом режиме:

1. Соленоид создаёт многосвязность области $\rightarrow$ нетривиальная голономия.
2. Голономия наклонена в некомпактную плоскость $SO(2,1) \rightarrow$ потенциалы A^1, A^2 .
3. Коммутатор $[A^1, A^2] \rightarrow$ неабелева самокривизна $F^3_{\text{полн}} \neq 0$.
4. Материя видит только $F^3_{\text{обычн}} = 0 \rightarrow E = B = 0$.
5. Гравитация видит $F^3_{\text{полн}}$ через ТЭИ $\rightarrow T_{tt} = 0, T_{ij} \neq 0$.
6. Форма Киллинга $(+, -, -) \rightarrow$ световой конус $\rightarrow T_{tt} = 0$ при $T_{ij} \neq 0$.
7. Ненулевые напряжения $\rightarrow$ искривление метрики $\Delta g_{ij} \neq 0$.

Электромагнитный инвариант (чистая калибровка, $E = B = 0$) генерирует через некомпактную структуру $SO(2,1)$ потенциалов некомпактных секторов, которые без реальных полей создают «напряжённые» компоненты тензора энергии-импульса при нулевой плотности энергии и тем самым проявляют гравитационные эффекты.

10. Динамический режим: обратная проекция и реальные электромагнитные поля

10.1. Идея обратной проекции

Угол смешивания α — это угол вращения в плоскости (K_1, K_3) внутреннего пространства. Вращение обратимо: если прямая проекция $(K_3 \rightarrow K_1)$ идёт с коэффициентом $\sin(\alpha)$, то обратная $(K_1 \rightarrow K_3)$ — с тем же коэффициентом:

$$A^3_{\mu \text{ eff}} = \sin(\alpha) \cdot A^1_{\mu}$$

10.2. Когда обратная проекция даёт реальные E/B

В статическом случае $A^1 = \sin(\alpha) \cdot A^3 = \sin(\alpha) \cdot \partial\chi$ — проекция чистой калибровки. Обратная проекция:

$$A^3_{\text{eff}} = \sin(\alpha) \cdot A^1 = \sin^2(\alpha) \cdot \partial\chi$$

Это тоже чистая калибровка $\rightarrow F^3_{\text{обычн}} = 0$. Реального поля нет.

В динамическом случае поля некомпактных секторов A^1, A^2 возбуждены независимо — не как проекция $A^3 = \partial\chi$, а от внешнего возмущения. Тогда:

$$F^3_{\text{обычн},0i} = \sin(\alpha) \cdot (\partial_t A^1_i - \partial_i A^1_0) \neq 0 \rightarrow \text{реальное } E$$

$$F^3_{\text{обычн},ij} = \sin(\alpha) \cdot (\partial_i A^1_j - \partial_j A^1_i) \neq 0 \rightarrow \text{реальное } B$$

Обсуждается возможность того, что колеблющиеся поля некомпактных секторов могут порождать реальные электромагнитные волны через механизм обратной проекции.

10.3. Источники независимого возбуждения полей некомпактных секторов

Гравитационная волна через дефект. Гравитационная волна модулирует метрику $\rightarrow$ меняет эффективную геометрию контура голономии $\rightarrow$ потенциалы некомпактных секторов начинают колебаться $\rightarrow$ обратная проекция даёт электромагнитный сигнал.

Модуляция параметров соленоида. Изменение магнитного потока Φ в соленоиде или вращение соленоида меняет эффективную голономию со временем $\rightarrow$ колебания полей некомпактных секторов $\rightarrow$ переменный E/B.

10.4. Энергетический баланс

В статике $T_{tt} = 0$, $T_{ij} \neq 0$ — упругие напряжения без плотности энергии в данной системе отсчёта. При переходе в динамику часть T_{ij} конвертируется в T_{tt} (электромагнитная энергия). Система сходит со светового конуса — $T_{tt} > 0$, но полный $T_{\mu\nu}$ сохраняется.

Аналогия: натянутая струна (напряжения без массы покоя). Отпустил — колеблется, появляется кинетическая энергия. Энергия берётся из напряжений.

11. Обратная связь геометрии и калибровочной структуры

11.1. Замкнутый цикл

Модель реализует двустороннюю связь:

1. Топология $\rightarrow$ потенциалы некомпактных секторов: соленоид создаёт многосвязность $\rightarrow$ голономия $\rightarrow$ анзац для A^1, A^2 .
2. Потенциалы $\rightarrow$ геометрия: коммутатор $\rightarrow$ неабелева кривизна $\rightarrow T_{\mu\nu} \rightarrow$ искривление метрики.
3. Геометрия $\rightarrow$ потенциалы: искривление меняет допустимые голономии и граничные условия $\rightarrow$ стабилизация или подавление полей некомпактных секторов $\rightarrow$ в динамическом режиме — возбуждение реальных E/B .

11.2. Механизмы обратной связи

Изменение голономии: в искривлённом пространстве длины и углы контуров меняются, что меняет допустимую голономию.

Эффективные источники: ковариантная производная в искривлённом пространстве содержит связность Γ , что модифицирует структуру решений.

Топологические ограничения: кривизна может менять фундаментальную группу пространства, разрешая или запрещая определённые голономии.

11.3. Возможное направление экспериментальной проверки

Прохождение гравитационной волны через область с топологическим дефектом (соленоидом) может модулировать голономию $\rightarrow$ возбуждать колебания полей некомпактных секторов $\rightarrow$ через обратную проекцию порождать электромагнитный сигнал. Это возможное направление экспериментальной проверки, требующее количественной оценки чувствительности существующих детекторов.

12. Обсуждение

12.1. Что такое поля некомпактных секторов

Поля A^1, A^2 — неабелевы калибровочные поля, соответствующие некомпактным генераторам K_1, K_2 группы $SO(2,1)$. Они не являются электромагнитными полями и не взаимодействуют с $U(1)$ -заряженной материей. Их единственное проявление в статическом режиме — вклад в тензор энергии-импульса, искривляющий пространство-время. В динамическом режиме обсуждается возможность их обратной проекции в реальные электромагнитные поля.

12.2. Аналогия с КХД

Структура «материя не видит, гравитация видит» не является произвольной гипотезой. Это стандартная структура неабелевых калибровочных теорий: в КХД цветовые синглеты не взаимодействуют с глюонным полем напрямую, хотя глюонное поле имеет энергию и искривляет пространство (см. раздел 7.4 для обсуждения ограничений этой аналогии).

12.3. Роль формы Киллинга

Форма Киллинга $\kappa_{ab} = \text{diag}(+1, -1, -1)$ — не формальность. Она определяет знаки, с которыми вклады секторов входят в тензор энергии-импульса. Выбор $SO(2,1)$ вместо $SU(2)$ делает возможной компенсацию $(F^3)^2 = (F^1)^2 + (F^2)^2$ и, следовательно, $T_{tt} = 0$. В $SU(2)$ все знаки одинаковы, и компенсация невозможна.

12.4. Ограничения и перспективы

1. Уравнения движения. Показано, что вакуумные уравнения Янга–Миллса не допускают вещественных статических решений данного типа (раздел 5.6). Разрешение требует либо учёта источника (топологического дефекта), либо выхода за рамки статического анзаца. Поиск нестационарных решений является открытым направлением.
2. Источник A^2 и топология дефекта. В модели с цилиндрическим соленоидом (раздел 5) компонента $A^2_r = c_2/r$ добавлена как независимый анзац; её топологическое происхождение не определено голономией дефекта. Причина — цилиндрическая симметрия: осевая симметрия плюс трансляционная инвариантность вдоль z фиксируют плоскость наклона голономии в (K_1, K_3) и не предоставляют независимого топологического контура, способного генерировать проекцию в K_2 -направление. В рамках цилиндрической геометрии компонента A^2 не может быть выражена через электромагнитный потенциал A^3 и остаётся свободным параметром. Естественное разрешение состоит в усложнении топологии дефекта. Цилиндр обладает одним нестягиваемым контуром (азимутальным обходом вокруг оси) и фундаментальной группой $\pi_1 = \mathbb{Z}$. Переход к дефектам с более богатой топологией вводит дополнительные независимые контуры, каждый из которых может порождать свой угол наклона голономии во внутреннем пространстве.

Конический дефект. Замена цилиндра на конус нарушает трансляционную инвариантность вдоль оси: образующая конуса наклонена, связывая азимутальное и продольное направления. Это порождает второй

топологический контур — вдоль образующей — и, следовательно, второй угол наклона β в плоскости (K_1, K_2) . При этом A^2 выражается как проекция A^3 через β , и проблема источника снимается. Угол β определяется углом раствора конуса — геометрическим параметром, не независимым от α . Таким образом, конус — промежуточная топология: второй контур появляется, но связан с первым через геометрию.

Тороидальный дефект. Тор — цилиндрический соленоид, свёрнутый в кольцо (начало и конец соединены), — обладает двумя независимыми нестягиваемыми контурами и фундаментальной группой $\pi_1 = Z \times Z$. Меридиональный контур (обход вокруг сечения тора) аналогичен азимутальному контуру цилиндра и даёт угол α в плоскости (K_1, K_3) . Параллельный контур (обход через дырку тора) — второй независимый контур, дающий угол β в плоскости (K_1, K_2) . В отличие от конуса, углы α и β определяются двумя независимыми геометрическими параметрами — диаметром сечения тора и диаметром дырки, — что позволяет независимо настраивать проекции в K_1 и K_2 . Магнитный поток в тороидальном соленоиде, как и в цилиндрическом, полностью локализован внутри обмотки; снаружи магнитное поле равно нулю. Принципиальное отличие — не в источнике потока, а в топологии окружающей области: у цилиндра контур вдоль оси стягиваем, у тора — нет. Именно эта топологическая разница обеспечивает генерацию A^2 через голономию параллельного контура без введения дополнительных источников или обмоток.

Свойство	Цилиндр	Конус	Тор
π_1	Z	Z	$Z \times Z$
Независимые контуры	1 (азимутальный)	1 + 1 (связанные)	2 (независимые)
Углы голономии	A	α, β (связаны)	α, β (независимы)
A^2 из A^3	Нет	Да (через β)	Да (через β)
Управляющие параметры	R, θ	R, θ , угол раствора	$R_{\text{сеч}}, R_{\text{дырки}}, \theta$

Свойство	Цилиндр	Конус	Тор
Световой конус	Ручной подбор c_2	$\alpha = \pi/4$, любой β	$\alpha = \pi/4$, любой β

Цилиндрическая конфигурация, рассматриваемая в данной работе, является минимальным случаем — одним контуром и одним углом наклона. Тороидальная конфигурация представляет собой наиболее полное обобщение: два независимых контура, два независимых угла, и A^2 как проекция A^3 — без свободных параметров. Тороидальный соленоид — физически стандартный объект (тороидальный трансформатор), что делает эту конфигурацию привлекательной для экспериментальной реализации. Подробная проработка конической и тороидальной конфигураций — предмет отдельного исследования.

3. Квантование. Модель не квантована. Некомпактная сигнатура формы Киллинга приводит к состояниям с отрицательной нормой в некомпактном секторе [2, 5]. Вопрос о физическом статусе таких состояний — открытый.

Пути решения проблемы унитарности. Проблема состояний с отрицательной нормой в некомпактном секторе, отмеченная в п. 2, не является непреодолимой и допускает несколько подходов, каждый из которых требует отдельного исследования.

а) Ограничение на световой конус (аналог процедуры Гупты–Блейлера). В стандартной КЭД продольные и временные моды фотона обладают отрицательной нормой при ковариантном квантовании. Процедура Гупты–Блейлера [14] разрешает эту проблему наложением физического условия, выделяющего подпространство, на котором S -матрица унитарна. В нашей модели световой конус $k_{ab}F^aF^b=0$ является естественным кандидатом на такое условие: на нулевых направлениях формы Киллинга норма обращается в нуль, а не становится отрицательной. Нулевая норма интерпретируется как калибровочная эквивалентность (аналог продольного фотона), факторизация по которой оставляет физическое подпространство с неотрицательной нормой. Это наиболее естественный путь, поскольку световой конус уже встроен в структуру модели как условие $T_{tt}=0$.

б) BRST-квантование. Стандартный метод квантования калибровочных теорий [15] вводит духи Фаддеева–Попова — поля с отрицательной нормой и градиентной статистикой, компенсирующие нефизические моды. Полная теория неунитарна, но физическое подпространство (когомологии BRST) унитарно.

Некомпактные генераторы K_1, K_2 можно трактовать как калибровочные направления с фиктивной симметрией; BRST-процедура выделяет физическое подпространство, на котором работает только $U(1)$ -сектор. Некомпактный сектор факторизуется аналогично духовым модам.

с) Эффективная теория (интегрирование по некомпактным модам). Некомпактный сектор не наблюдаем: материя несёт только $U(1)$ -заряд и не взаимодействует с полями A^1, A^2 непосредственно. Это структурно аналогично скрытым секторам в моделях тёмной материи. В формализме функционального интеграла некомпактные моды можно проинтегрировать, получив эффективную $U(1)$ -теорию для наблюдаемого сектора. Поскольку $U(1)$ — компактная группа с отрицательно определённой формой Киллинга, эффективная теория унитарна на наблюдаемом секторе. Вклад некомпактного сектора проявляется исключительно через гравитационный отклик — искривление метрики от ненулевых напряжений $T_{ij} \neq 0$. Это аналогично тому, как тяжёлые моды электрослабой теории интегрируются с получением эффективной теории Ферми, унитарной при низких энергиях.

d) Переопределение скалярного произведения (аналог РТ-симметричного подхода). В РТ-симметричной квантовой механике [16] гамильтониан не эрмитов в стандартном смысле, но спектр веществен при сохранении РТ-симметрии. Положительность норм восстанавливается переопределением скалярного произведения через метрический оператор S . Некомпактная сигнатура формы Киллинга — структурный аналог неэрмитовости. Если спектр модели остаётся вещественным (а для конфигураций на световом конусе это именно так: $T_{tt}=0$, вклады вещественны), то переопределённая норма во внутреннем пространстве может быть положительно определена. Этот путь требует построения явного метрического оператора, согласованного с динамикой полей.

e) Отметим, что пути a) и c) представляются наиболее перспективными для данной модели, поскольку они опираются на уже существующие структурные элементы — световой конус (путь a) и ненаблюдаемость некомпактного сектора для материи (путь c). Пути b) и d) требуют существенно большего технического аппарата и вводят дополнительные структуры. Конкретный выбор механизма и его строгая реализация — предмет отдельного исследования.

12.5 Основные результаты

1. Общность анзаца. Анзац выбран минимальным. Возможны более общие конфигурации с дополнительными компонентами потенциалов.
2. Численные оценки. Эффективность искривления метрики зависит от константы связи g , параметра голономии $s = \theta/(2\pi)$ и параметра d_1 . Порядок величины поправки $\Delta g_{ij} \sim G \cdot g^2 \cdot c^2 \cdot d_1^2 / (c^4 \cdot r^4)$ требует оценки для конкретных физических сценариев.
3. Экспериментальная проверка. Конкретная схема эксперимента с соленоидом (параметры потока, геометрия, чувствительность детекторов) требует отдельной проработки.

13. Выводы

1. Построена трёхмерная калибровочная модель на основе $SO(2,1)$ с топологическим дефектом (соленоидом (цилиндрическим, коническим, тороидальным)), порождающим голономию, выходящую за пределы $U(1)$ -сектора. Анзац с компонентой $A_z^1 = d_1/r$ вдоль оси соленоида обеспечивает ненулевую напряжённость во всех трёх секторах F^1, F^2, F^3 , что невозможно в двумерном случае.
2. Все компоненты F^3 — чисто коммутаторные (линейная часть равна нулю). Материя, несущая $U(1)$ -заряд, не взаимодействует с этими полями. Гравитация чувствует полную неабелеву кривизну через тензор энергии-импульса.
3. Форма Киллинга $\text{diag}(+1, -1, -1)$ обеспечивает световой конус во внутреннем пространстве: $T_{tt} = 0$ при ненулевых пространственных напряжениях $T_{ij} \neq 0$. Радиальные и азимутальные напряжения равны по модулю с противоположными знаками; $T_{zz} = 0$; сдвиговое напряжение $T_{\varphi z} \neq 0$.
4. Показано, что вакуумные уравнения Янга–Миллса не допускают вещественных статических решений данного типа. Некомпактная сигнатура $SO(2,1)$ (знак минус в $[K_1, K_2] = -iK_3$) является причиной. Топологический дефект интерпретируется как источник: $D_\mu F^{a,\mu\nu} = J_{\text{дефект}}^{a,\nu}$.
5. В динамическом режиме обсуждается возможность возбуждения электромагнитного отклика при модуляции голономии внешним гравитационным возмущением. Количественная оценка амплитуды требует дальнейших исследований.

Список литературы:

1. Yang, C.N., Mills, R.L. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance // *Physical Review*. 1954. Vol. 96. P. 191–195.
2. Physics Stack Exchange: Why is the Yang-Mills gauge group assumed compact and semi-simple. physics.stackexchange.com/questions/52452.
3. Preskill, J. Do Cosmic Strings Have Non-Abelian Aharonov-Bohm Interactions. // *Nuclear Physics B*. 1992. Vol. B405. P. 117–143.
4. Björnsson, J., Hwang, S. On the unitarity of gauged non-compact world-sheet supersymmetric WZNW models // *arXiv: 0802.3578*, 2009.
5. Antoine, J.-P. et al. Classical Yang-Mills fields with non-compact symmetry and an arbitrary compact gauge group // *Journal of Mathematical Physics*. 1986.
6. Lechtenfeld, O. et al. $SU(1,1)$ -equivariant Yang-Mills solutions on Minkowski space // *arXiv:2312.17212*, 2023.
7. Cahn, R.N. *Semi-Simple Lie Algebras and Their Representations*. Benjamin/Cummings, 1984.
8. Nielsen, H.B., Olesen, P. Vortex-line models for dual strings // *Nuclear Physics B*. 1973. Vol. 61. P. 45–61.
9. Nakahara, M. *Geometry, Topology and Physics*. 2nd ed. Institute of Physics Publishing, 2003.
10. Aharonov, Y., Bohm, D. Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory // *Physical Review*. 1959. Vol. 115, No. 3. P. 485–491.
11. Wu, T.T., Yang, C.N. Concept of Nonintegrable Phase Factors and Global Formulation of Gauge Fields // *Journal of Mathematical Physics*. 1975. Vol. 12, No. 6. P. 964–968.
12. Rubakov, V.A. *Classical Theory of Gauge Fields*. Princeton University Press, 2002.
13. Wiesendanger, C. Conservation of Gravitational Energy-Momentum and Inner Diffeomorphism Group Gauge Invariance // *Classical and Quantum Gravity*. 2013.
14. Gupta, S.N. Theory of Longitudinal Photons in Quantum Electrodynamics // *Nuovo Cimento*. 1950. Vol. 4. P. 453–459. (или Bleuler, K. *Helv. Phys. Acta*. 1950. Vol. 23. P. 567.)
15. Kugo, T., Ojima, I. Manifestly Covariant Canonical Formalism of Yang–Mills Theories // *Progress of Theoretical Physics*. 1979. Vol. 60. P. 1869.
16. Bender, C.M., Boettcher, S. Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having PT Symmetry // *Physical Review Letters*. 1998. Vol. 80. P. 5243.