

Арифметика только по модулю

Предпосылка

В современной арифметике я вижу два парадокса – это восприятие нуля и проблема сравнения отрицательных чисел. Первая проблема вызвана тем, что изначально отрицательных чисел не существовало и ноль записывался без знака. После появления отрицательных чисел ноль визуально стал восприниматься как положительный (принадлежащий положительной оси чисел). Ноль – это вырожденная точка, принадлежащая сразу обоим числовым осям. Вторая проблема вызвана введением Рене Декартом единой направленной числовой оси направлением от $-\infty$ до $+\infty$. Это привело к тому, что ответ на вопрос о сравнении двух чисел отличается для положительных и отрицательных чисел. При сравнении двух положительных чисел ответ одинаков вне зависимости от того, оцениваем ли мы их по положению на оси, или по модулю. Если сравниваются два отрицательных числа, то ответ будет зависеть от дополнительного ответа на вопрос о том, как мы их сравниваем – по положению на числовой оси или по модулю. Это порождает известный парадокс – числа отсчитываются от нуля, но при этом $10 > 2$ и по положению на числовой оси, и по модулю, а $-10 < -2$ по положению на числовой оси, но $-10 > -2$ по модулю. Из этого следует также известный парадокс, что если мы из большего вычитаем меньшее, то для положительных чисел результат остаётся на положительной оси, а для отрицательных чисел результат тоже будет положительным, потому что вычитание производится по модулю. Такое положение приводит к дополнительной когнитивной нагрузке, потому что часто забывают, что науки используются не только учёными, но и школьниками для обучения.

Решение

На первый парадокс возможны два решения. Первое заключается в том, чтобы ноль записывать как ± 0 , подчёркивая его принадлежность обоим числовым осям. Второе решение заключается в введении отрицательного нуля, которое будет записываться как -0 . Решение второго парадокса заключается в отмене единой числовой прямой и замене её двумя независимыми числовыми осями, $(-\infty, -0]$ и $[0, \infty)$, имеющими общую точку в нуле (в геометрической интерпретации). Сравнение чисел осуществляется только по модулю, то есть по их расстояниям от нуля, поэтому $-16 > -10$, $-16 > 10$ и $-16 = 16$. В силу этого символ и вычисление модуля становятся ненужными, поскольку для чисел это подразумевается по умолчанию. Знаки чисел могут быть соотнесены с физическими явлениями, например тепло/холод, прибыль/убыток и тому подобное.

Следствие

Правила для сложения, вычитания, умножения и деления не меняются – в умножении «минус на минус даёт плюс» и «плюс на минус даёт минус».

Правила обработки нуля:

В первом случае просто записывается ± 0 и как операнд, и как результат.

Во втором случае – при умножении на ноль действуют правила для классической арифметики («минус на минус даёт плюс» и «плюс на минус даёт минус»). При сложении и вычитании в случае нулевого результата знак нуля совпадает со знаком первого операнда, то есть $-5 + 5 = -5 - (-5) = -0$, $5 - 5 = 5 + (-5) = 0$. Такое правило при сложении и вычитании означает, что результат находится на той же числовой оси, что и первый операнд.

В случае ненулевого результата все арифметические действия осуществляются как в классической арифметике.

Вычисление функций не меняется, потому что для их вычисления используется разложение в ряд Тейлора, а оно оперирует только со знаками и модулями чисел.

Работа с неравенствами и уравнениями. Неравенство $x \geq a$ автоматически означает и неравенство $x \geq -a$, где a может быть любым числом на числовой оси, включая ноль. Например, неравенство $x + 2 \geq 5$ имеет общее решение, соответствующее решению неравенства с модулями в классической арифметике (оно записывается как $|x| + 2 \geq 5$), – два интервала $[-7, -\infty)$ и $[3, +\infty)$. Такое же правило действует и для уравнений.

Работа с пределами:

В первом случае для записи односторонних пределов, стремящихся к нулю надо явно указывать, на какой числовой оси это происходит, например, $\rightarrow 0+$ или $\rightarrow 0-$.

Во втором случае это просто $\rightarrow 0$ или $\rightarrow -0$.

Преимущества

1. Снимается вопрос о знаке нуля и его принадлежности числовым осям.
2. Новые правила сравнения чисел более соответствуют здравому смыслу и убирают неоднозначность сравнения и вычитания из большего меньшее. Присвоение знакам чисел физических явлений придаёт смысл сравнению. Например, если положительные числа обозначают тепло, а отрицательные холод, то сравнение $-16 > -10$ вполне соответствуют ощущениям и здравому смыслу – холод -16 больше холода -10 . Сравнение $-16 > 10$ также логично, потому что если их сложить, результат будет отрицательным, то есть холод сильнее. Это снижает для учеников когнитивную нагрузку при усвоении науки.

3. Такая работа с числами прекрасно соответствует работе с прямым кодом в компьютерах. Также такой подход позволяет избавиться от парадокса целочисленного деления и нахождения остатка для положительных и отрицательных чисел, когда есть искусственное общепринятое условие, что остаток должен быть всегда положительным, из-за чего $15 \text{ DIV } 4 = 3$, $15 \text{ MOD } 4 = 3$, а $-15 \text{ DIV } 4 = -4$, $-15 \text{ MOD } 4 = 1$, что противоречит здравому смыслу, потому что в первом случае мы проходим точку 15 один раз, а во втором случае мы проходим точку -15 два раза.

4. Поскольку числовые оси теперь не связаны единой осью, геометрически любая числовая ось представляется линией, где нуль всегда слева, а цифры идут слева направо, то есть для оси положительных чисел все остаётся как и в классической арифметике $-0, 1, 2, \dots \infty$, а для оси отрицательных чисел будет так $-0, -1, -2, \dots -\infty$.

5. Усиливает связь арифметики с геометрией – если неравенство $|r| \leq 3$ в двухполярной системе координат описывает окружность, то неравенство $r \leq 3$ в однополярной системе координат описывает её диаметр.

6. Убирает неоднозначность восприятия производных, например, для чётной функции $\exp(x^2)$. На отрицательной числовой оси её производная отрицательная и в рамках классической арифметики с уменьшением аргумента x (x изменяется в сторону $-\infty$) значение производной уменьшается на единой числовой оси Декарта, но по модулю оно растёт (и это следует из графика функции). Это подтверждает сделанный в разделе «Предпосылка» вывод о том, что для отрицательной числовой оси уменьшение на единой числовой оси Декарта сопровождается увеличением по модулю и наоборот, увеличивая когнитивную нагрузку.

Особенности

К особенностям можно отнести более непривычную запись интервалов. Если мы записываем интервал в соответствии с правилами классической арифметики – от меньшего к большему (здесь меньшее и большее определяются в рамках арифметики только по модулю), то правильными являются следующие варианты записи интервалов $(-2, 3)$, $(2, -3)$, где слева стоит меньшее число, а справа большее. Если же левый предел равен правому, то обе эти записи являются равноценными $(-2, 2)$, $(2, -2)$.

Краткий словарь терминов

0 и -0 – нули, принадлежащие положительной и отрицательной числовой оси. При геометрической интерпретации числовых осей они совпадают в одной точке. Они используются в арифметических операциях, например, вычислении односторонних пределов. Их можно сравнивать между собой по следующим правилам $-0 = 0$ даёт истину, остальные сравнения дают ложь.

Итог

Изложенная здесь арифметика только по модулю предлагает альтернативный подход, где сравнение чисел становится единым и интуитивно понятным, а знак $-$ всего лишь указатель направления или индикатор физического явления. Поэтому знак модуля $||$ становится излишним.