

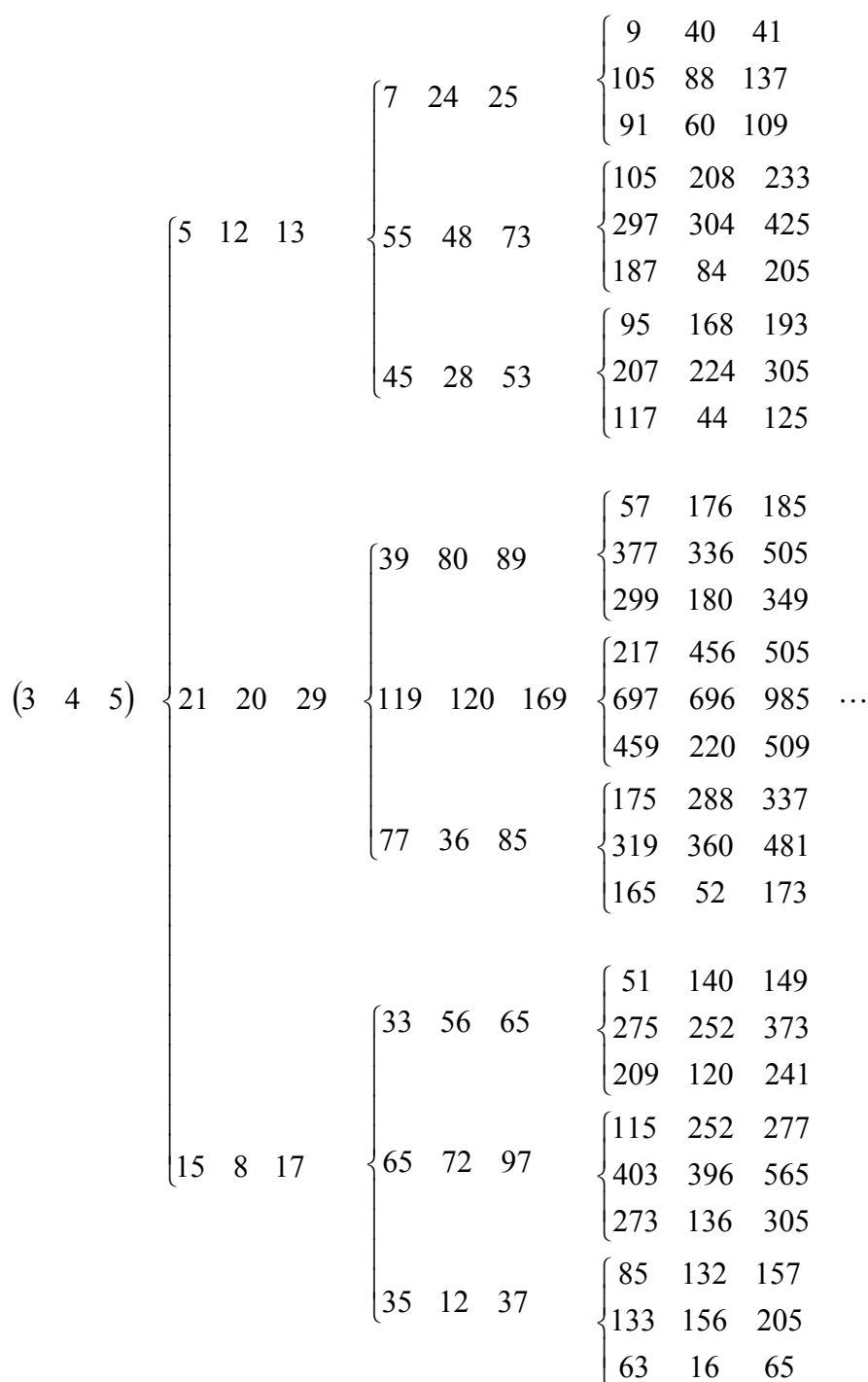
Квазипифагоровы тройки

[Владимир Браун](#)

22.07.2022, 2026

Пифагоровы тройки – это тройки натуральных чисел a, b, c , таких, что $a^2 + b^2 = c^2$. Тройка называется примитивной если числа a, b и c взаимно просты, то есть, не имеют общих делителей отличных от 1. Все другие тройки получаются из примитивных троек умножением на какой-либо натуральный множитель.

В 1934 году шведский математик Берггрэн открыл троичное дерево, граф, корнем которого служит тройка (3, 4, 5), содержащее все примитивные пифагоровы тройки:



В 1963 году датский математик Барнинг показал, что указанное дерево примитивных пифагоровых троек может быть получено умножением трех матриц:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

на вектор-столбец примитивной тройки, получая для каждой тройки, начиная с корневой тройки (3, 4, 5), три её потомка:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 20 \\ 29 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 8 \\ 17 \end{bmatrix}, \dots$$

Существование такого троичного дерева примитивных пифагоровых троек является интересным феноменом. Все пифагоровы тройки оказываются потомками одной-единственной корневой пифагоровой тройки (3, 4, 5). Не будь её – не было бы и никаких других пифагоровых троек.

Здесь, вероятно, каждому на ум приходит (большая) теорема Ферма, утверждающая, что троек натуральных чисел a, b, c , для которых верно равенство $a^n + b^n = c^n$, где n больше двух, не существует. Причину этого можно видеть как раз в том, что для степеней выше двух соответствующей корневой тройки "нет на месте".

А что же есть? Давайте посмотрим.

Посмотрим сначала, что такого особенного в "квадратной" корневой тройке (3, 4, 5). Кроме главного свойства: "сумма квадратов равна квадрату",

$$3^2 + 4^2 = 5^2,$$

другим очевидным ей свойством является то, что числа 3, 4, 5 – это последовательные натуральные числа. Других таких пифагоровых троек нет.

Обратимся теперь к рядам последовательных кубов, биквадратов, и других степеней. И здесь мы делаем интересное открытие. Оказывается, последовательные числа 5, 6, 7 образуют почти точную "кубическую пифагорову тройку":

$$\sqrt[3]{5^3 + 6^3} = 6,986.$$

То же верно и для других степеней:

$$\sqrt[4]{7^4 + 8^4} = 8,978,$$

$$\sqrt[5]{9^5 + 10^5} = 10,973,$$

$$\sqrt[6]{11^6 + 12^6} = 12,967,$$

...

$$\sqrt[100]{199^{100} + 200^{100}} = 200,949,$$

...

$$\sqrt[n]{(2n-1)^n + (2n)^n} \approx 2n + 1.$$

Разность $(2n+1) - \sqrt[n]{(2n-1)^n + (2n)^n}$ хотя и растёт с ростом n , но никогда не превышает значения 0,052:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left((2n+1) - \sqrt[n]{(2n-1)^n + (2n)^n} \right) = 2 - 2 \ln(\sqrt{e} + 1) = 0,051846.$$

Таким образом, при $n > 2$ существуют приближённые аналоги первой пифагоровой тройки. Но если такие тройки есть, то, может быть, они тоже являются корневыми и образуют троичные деревья таких, *квазипифагоровых*, троек?

Приглядимся к размножающим матрицам:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Бросается в глаза, что в них много 2-ек. Не связаны ли они со степенью 2?

Если это так, то для 3-ей степени, размножающие матрицы должны быть следующими:

$$M_{31} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad M_{32} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad M_{33} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Проверим это предположение:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 24 \\ 25 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 \\ 48 \\ 61 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 18 \\ 31 \end{bmatrix}.$$

$$\sqrt[3]{13^3 + 24^3} = 25,209 \approx 25, \quad \sqrt[3]{49^3 + 48^3} = 61,113 \approx 61, \quad \sqrt[3]{29^3 + 18^3} = 31,148 \approx 31.$$

Как ни удивительно, но это действительно работает.

Для 4-той степени, размножающие матрицы будут тогда такими:

$$M_{41} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad M_{42} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad M_{43} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 4 \\ -4 & 3 & 4 \\ -4 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

И так далее.

В общем, мы можем сделать следующее обобщение на произвольную натуральную степень. Для любого натурального показателя степени n , корневая (квази)пифагорова тройка равна $(2n-1, 2n, 2n+1)$, а размножающие матрицы равны:

$$M_{n1} = \begin{bmatrix} n-1 & -n & n \\ n & 1-n & n \\ n & -n & n+1 \end{bmatrix}, \quad M_{n2} = \begin{bmatrix} n-1 & n & n \\ n & n-1 & n \\ n & n & n+1 \end{bmatrix}, \quad M_{n3} = \begin{bmatrix} 1-n & n & n \\ -n & n-1 & n \\ -n & n & n+1 \end{bmatrix}.$$

С их помощью, начиная с корневой тройки, для любой натуральной степени n можно построить соответствующее дерево (квази)пифагоровых троек.

В частности, дерево кубических квазипифагоровых троек будет следующим:

$$\begin{array}{l}
 (5 \ 6 \ 7) \left\{ \begin{array}{l} 13 \ 24 \ 25 \\ 49 \ 48 \ 61 \\ 29 \ 18 \ 31 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 29 \ 66 \ 67 \\ 173 \ 162 \ 211 \\ 121 \ 84 \ 133 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 61 \ 156 \ 157 \\ 457 \ 420 \ 553 \\ 341 \ 246 \ 379 \\ 493 \ 828 \ 877 \\ 1465 \ 1476 \ 1849 \\ 773 \ 438 \ 811 \\ 389 \ 594 \ 643 \\ 893 \ 930 \ 1147 \\ 409 \ 204 \ 421 \\ 137 \ 234 \ 247 \\ 313 \ 684 \ 697 \\ 1717 \ 1620 \ 2101 \\ 1169 \ 798 \ 1279 \\ 425 \ 426 \ 535 \\ 1177 \ 2028 \ 2137 \\ 3733 \ 3732 \ 4693 \ \dots \\ 2033 \ 1182 \ 2143 \\ 229 \ 132 \ 241 \\ 785 \ 1146 \ 1255 \\ 1577 \ 1674 \ 2047 \\ 661 \ 300 \ 673 \\ 97 \ 144 \ 157 \\ 233 \ 474 \ 487 \\ 1097 \ 1050 \ 1351 \\ 709 \ 468 \ 769 \\ 205 \ 216 \ 265 \\ 557 \ 978 \ 1027 \\ 1853 \ 1842 \ 2323 \\ 1033 \ 612 \ 1093 \\ 89 \ 42 \ 91 \\ 325 \ 456 \ 505 \\ 577 \ 624 \ 757 \\ 221 \ 90 \ 223 \end{array} \right.
 \end{array}$$

В пользу сделанного обобщения есть ещё один аргумент. Как показал Н. Andres Lönnето, прародителем всех пифагоровых троек является тривиальная тройка (1, 0, 1).

С помощью размножающих матриц можно получать не только потомков пифагоровых троек, но и определять их предков. Действительно, если некоторая тройка получена умножением (слева) предка на какую-то из матриц, то определить этого предка можно разделив (опять слева) тройку на эту матрицу. Проблемой кажется то, что этих матриц три, и для произвольной тройки (взятой не с дерева), мы не знаем, с помощью какой из матриц данная тройка была получена. Удастся ли это определить?

Давайте просто посмотрим на примере, что получится. Возьмём первых потомков корневой пифагоровой тройки (3, 4, 5), т.е. тройки (5, 12, 13), (21, 20, 29), (15, 8, 17), и посмотрим, каким образом в каждом случае найдётся их общий предок.

В матричной арифметике деление производится умножением на обратную матрицу. Обратными для матриц M_1 , M_2 , M_3 будут матрицы:

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad M_3^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Умножим теперь (слева) каждую из троек на каждую из матриц:

$$M_1^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad M_2^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad M_3^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix};$$

$$M_1^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 21 \\ 20 \\ 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad M_2^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 21 \\ 20 \\ 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad M_3^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 21 \\ 20 \\ 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix};$$

$$M_1^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 8 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad M_2^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 8 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad M_3^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 8 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Как видим, настоящего предка даёт только правильная матрица – обратная той, с помощью которой данная тройка была получена. Но и другие матрицы дают почти правильный результат – стоит отбросить знаки, и мы получим настоящего предка. То есть, для определения предка можно использовать любую из обратных матриц, следует лишь отбросить в результате возможные знаки минус.

Давайте определим теперь прародителя кубической корневой тройки (5, 6, 7).

Обратными для матриц M_{31} , M_{32} , M_{33} будут матрицы:

$$M_{31}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 3 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad M_{32}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad M_{33}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Умножим тройку (5, 6, 7) на любую из них:

$$M_{31}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad M_{32}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad M_{33}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Как видим, это та же тривиальная тройка (1, 0, 1), что и для квадратной корневой тройки. Тот же результат получим и для любой другой степени.

То есть, тривиальная тройка (1, 0, 1) является прародителем, "LUCA", вообще всех (квази)пифагоровых троек. Поэтому, для построения троичного дерева (квази)-пифагоровых троек нам не нужно знать корневую тройку. Всегда можно начать с тройки (1, 0, 1). Первым её потомком будет только одна новая тройка – корневая.

Примеры для степеней 1, 2, 3, 4:

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
 2. \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
 3. \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
 4. \quad \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 4 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} -3 & 4 & 4 \\ -4 & 3 & 4 \\ -4 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.
 \end{array}$$

В заключение, простейшее троичное дерево квазипифагоровых троек, для первой степени, или попросту натуральных чисел:

$$(1 \ 2 \ 3) \left\{ \begin{array}{l} 1 \ 4 \ 5 \left\{ \begin{array}{l} 1 \ 6 \ 7 \\ 9 \ 6 \ 15 \\ 9 \ 4 \ 13 \end{array} \right. \\ \\ 5 \ 4 \ 9 \left\{ \begin{array}{l} 5 \ 14 \ 19 \\ 13 \ 14 \ 27 \ \dots \\ 13 \ 4 \ 17 \end{array} \right. \\ \\ 5 \ 2 \ 7 \left\{ \begin{array}{l} 5 \ 12 \ 17 \\ 9 \ 12 \ 21 \\ 9 \ 2 \ 11 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Эти тройки, сохраняя свойство "сумма первых степеней (точно) равна первой степени", потеряли свойство примитивности – тройки (9, 6, 15) и (9, 12, 21) сократимы.

Ссылка:

Н. Andres Lönnemo. [The Trinary Tree\(s\) underlying Primitive Pythagorean Triples](#)