УДК 511.12+511.337+511.21

В. П. Воеводов

Глобальная теорема о n-кортежах

В работе демонстрируется новый подход к исследованию простых чисел через концепцию связанных множеств. Описан метод динамических сит. С помощью предложенной кинематической модели и концепции связанных множеств доказывается бесконечность множества простых чисел-близнецов, а также теорема о регулярных кортежах простых чисел произвольной длины и конфигурации. Концепция альтернативных множеств расширяет теорему до глобального уровня.

Ключевые слова: простые близнецы, простые кортежи, связанные множества, метод динамических сит.

§ 1. Введение

Знакомство с классическими гипотезами распределения простых чисел часто оставляет ощущение избыточной и искусственной сложности. Стремление анализировать бесконечные последовательности напрямую и вычислять их асимптотические плотности на всей протяженности числового ряда зачастую скрывает от исследователей простые, фундаментальные структурные связи.

Настоящая работа предлагает принципиально иной путь – конечные интервалы, конкретные комбинаторные методы и конкретные связи между множествами. Вместо абстрактных и исчезающих на бесконечности вероятностных оценок, предложенный метод динамических сит оперирует наглядными комбинаторными соотношениями на конечных интервалах. Но, используя факт бесконечности простых чисел, работа в ограниченных пределах получает безграничное расширение на весь натуральный ряд. Результатом проделанной работы стала данная теорема:

Теорема: для любого упорядоченного конечного кортежа из n произвольно выбранных простых чисел, удовлетворяющего условию $n < P_1 < P_2 < \cdots < P_n$, задаваемый им фиксированный шаблон расстояний повторяется в множестве простых чисел бесконечное число раз.

1.1. Содержание статьи. В разделе 2 подробно излагается главная идея концепции связанных множеств. Её суть заключается в том, что данные множества не могут существовать или исчезать поодиночке, поскольку они связаны инвариантными конечными отношениями локальных плотностей распределения. Предложенная концепция выступает в качестве универсального инструмента, позволяющего полностью обойти многостраничный численный анализ.

В разделе 3 с помощью метода динамических сит мы проводим комбинаторный анализ плотности распределения кортежей с фиксированным числом

© В. П. Воеводов, 2026

элементов, но с различной конфигурацией. Используется достаточно большой конечный интервал, который полностью удовлетворяет выбранный метод доказательства теоремы.

В конце этого раздела(3.1) делается заключение, что исследуемые кортежи принадлежат к связанным множествам, плотности распределения которых соотносятся фиксированным конечным коэффициентом.

Доказательство теоремы(раздел 4) ведётся от противного: допускается, что множество кортежей с фиксированным числом n и заданной конфигурацией конечно. Следовательно, конечны и все связанные с ним множества (множества кортежей с заданным числом n, но с различной локальной конфигурацией) (определение 1). Но, согласно классической теореме Евклида, за любой наперед заданной границей последовательность простых чисел бесконечна. Это утверждение позволяет нам выбрать первые n простых чисел, которые гарантированно принадлежат определённому связанному множеству кортежей(лемма 3.1). Признав, что наше допущение о конечности связанных множеств оказалось ложным, мы приходим к выводу, что множество кортежей с заданными начальными параметрами также бесконечно(определение 1).

§ 2. Концепция связанных множеств

Определение 1. (Связанные множества). Два подмножества натуральных чисел называются связанными, если для любого достаточно большого интервала их плотности соотносятся через постоянный конечный коэффициент $k > 0$:

$$\mu(A) = k \cdot \mu(B), \quad \text{где } k \in \mathbb{R}^+. \tag{2.1}$$

В рамках регулярных кортежей простых чисел свойства связанных множеств раскрываются следующим образом:

- **Стабильность при степенных сдвигах ($k = 1$):** Пары близнецов с интервалом в две единицы $(a, a+2)$ и пары с интервалом восемь $(a, a+8)$ имеют идентичную структуру вычетов по малым простым модулям. Они обладают равной плотностью ($k = 1$) и являются связанными.
- **Линейное масштабирование плотности ($k = 2$):** Пары с интервалом два $(a, a + 2)$ и пары с интервалом шесть $(a, a + 6)$ обладают различной плотностью. Модуль $p = 3$ блокирует два класса вычетов для интервала 2 (коэффициент выживания составляет $(3 - 2)/3 = 1/3$). Однако для интервала 6, поскольку его длина делится на 3, элементы кортежа попадают в один класс вычетов по модулю 3, освобождая дополнительную фазу. Коэффициент выживания возрастает до $(3 - 1)/3 = 2/3$. Таким образом, их локальные плотности отличаются ровно в конечное число раз ($k = 2$).
- **Обобщение на n-элементные кортежи произвольной конфигурации:** Произвольные n-элементные кортежи произвольной конфигурации могут иметь различные масштабирующие коэффициенты k. Однако коэффициент k всегда остаётся строго конечным. Поскольку любой

внутренний интервал кортежа раскладывается на конечное число простых множителей, а общее число элементов в n-элементном кортеже конечно, результирующий коэффициент комбинаторного совмещения рядов всегда выражается конечным числом. Следовательно, все подобные множества связаны через конечные коэффициенты.

§ 3. Метод динамических сит

Рассмотрим регулярное множество пар чисел $A_k = \{k, k+2\}$. Для математической формализации метода динамических сит построим геометрическую модель.

Сформируем систему из n вертикальных числовых прямых, имеющих фиксированные дискретные смещения друг относительно друга. При таком построении каждый исследуемый регулярный кортеж из множества A_k занимает строго горизонтальное положение, образуя поперечное сечение всей этой системы.

Вертикальные прямые синхронно движутся вниз, а луч детектора осуществляет мгновенную проверку пересекающих его элементов кортежа на делимость по последовательному базису простых чисел $2, 3, 5, 7, \ldots$.

Рассмотрим действие динамического сита (таб.1) на примере простого модуля $p = 7$ для пары $(x, x+2)$. Левый элемент кортежа не делится на 7 в 6 случаях из 7. В силу взаимно простого вертикального сдвига, элементы x и $x + 2$ не могут быть кратны 7 одновременно. Следовательно, класс вычетов, запрещенный для правого элемента, накладывается на один из разрешенных (благоприятных) классов вычетов левого элемента. Таким образом, из 6 благоприятных для левого элемента вариантов правый элемент сохраняет регулярность ровно в 5 случаях.

В итоге, точный локальный коэффициент выживания пары чисел сквозь фильтры луча детектора по простому модулю $p = 7$ составляет величину $5/7$. Для пары коэффициент «выживания» сквозь фильтры луча составляет:

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{9}{11} \cdots = \frac{1}{2} \prod_{i=2}^{i=m} \frac{p_i - 2}{p_i} \tag{3.1}$$

m–условное достаточно большое, но конечное число, удовлетворяющее длине интервала, который будет использоваться в будущем доказательстве теоремы. Метод доказательства теоремы не требует анализа плотности на всём протяжении натурального ряда.

Для квадруплетов (таб.2): при прохождении через фильтры простых чисел одна из 5 четвёрок просеивается через модуль 5, 3 из 7 четвёрок просеиваются через модуль 7, 7 из 11 – через модуль 11. Общий поток вычисляется произведением:

$$\Pi_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{9}{13} \cdot \cdots = \frac{1}{6} \prod_{i=3}^{i=m} \frac{p_i - 4}{p_i} \tag{3.2}$$

Подобный алгоритм применим и для кортежей с большим n. Нас не интересуют сами вычисления. Нас интересует коэффициент перед оператором произведения. Он будет отличаться для разных конфигураций и $n = const$(таб.3-4), но правая часть останется равной для всех конфигураций:

$$\Pi_n = \prod_{i=1}^{i=k-1} \frac{p_i - a(p_i)}{p_i} \cdot \prod_{i=k}^{i=m} \frac{p_i - n}{p_i} \tag{3.3}$$

где $a(p_i)$ – число вычетов, удаляемых на малых простых числах,
k – общий для всех конфигураций индекс, который разделяет индивидуальный начальный сегмент произведения от инвариантной остаточной части.

13		15
12		14
11		13
10		12
9		11
8		10
7		9
6		8
5		**7**
4		6
3		5

Таблица 1. Близнецы

104		106		110		112	
103		105		109		111	
102		104		108		110	
101		**103**		**107**		**109**	
15		17		21		23	
14		16		20		22	
13		15		19		21	
12		14		18		20	
11		**13**		**17**		**19**	
10		12		16		18	

Таблица 2. Квадруплеты

3.1. Инвариантность остаточных произведений. Рассмотрим подробнее механизм сопоставления на примере простых кортежей из двух простых чисел (пар близнецов). Произведения локальных плотностей для различных конфигураций отличаются исключительно своим начальным сегментом, структура числителей в котором детерминирована геометрией интервала. Длина этого начального сегмента находится в строгой функциональной зависимости только от простых делителей, на которые раскладывается данная величина сдвига.

Для математической формализации этого свойства применим метод матричной редукции:

1. Сформируем систему, содержащую все возможные конечные конфигурации пар простых чисел.
2. Сопоставим каждой конфигурации её характеристическое произведение локальной плотности распределения. Упорядочим эти алгебраические цепочки в виде структурированной матрицы, где строки соответствуют различным конфигурациям.
3. Заметим, что имеется общая часть произведений, которая полностью совпадает для всех строк данной матрицы, независимо от внутренней

конфигурации кортежа. То есть существует единый для всех конфигураций нижний индекс $i = k$ в операторе произведения, который отделяет индивидуальный коэффициент начального сегмента от инвариантной остаточной части. Даже при грубой оценке при $p_k > L$, где L – максимальная длина внутреннего интервала из всех возможных конфигураций, остаточная часть произведений обретает стабильность (так как величина внутреннего интервала уже не может быть кратной p_i). Даже при допущении какой-нибудь неопределённости – эта неопределённость будет отражаться инвариантно для всех конфигураций.

Выполним операцию нормирование, то есть сократим сопоставляемые произведения на их общую, неизменную остаточную компоненту. В результате редукции задача сводится к анализу конечной матрицы индивидуальных локальных коэффициентов. Для кортежей старших порядков (n-элементных кортежей) длина индивидуального начального сегмента также строго ограничена инвариантной структурой общего остаточного произведения. Ввиду конечной длины самого кортежа и конечного числа внутренних интервалов, общее число различных локальных конфигураций также является конечным.

Лемма 3.1. *Множества регулярных кортежей с фиксированным конечным числом простых чисел являются связанными независимо от локальной конфигурации самих кортежей*

Доказательство. Так как начальные сегменты в конечной матрице произведений плотностей для различных конфигураций конечны, то конечны и их отношения между собой. А это влечёт конечность отношений плотностей распределения кортежей с различной локальной конфигурацией. То есть, множества кортежей с заданным числом n, но с различной конфигурацией являются связанными(определение 1).

59		**67**		**71**		**79**
19		27		31		37
17		25		29		35
15		23		27		33
13		21		25		31
11		**19**		**23**		**29**

Таблица 3. интервал 8-4-8

41		**47**		**53**		**59**
17		23		29		35
11		**17**		**23**		**29**
9		15		21		27
7		13		19		25
5		**11**		**17**		**23**

Таблица 4. интервал 6

§ 4. Теорема о простых n-кортежах

Теорема 1. *(В. П. Воеводов). Для любого упорядоченного конечного кортежа из n произвольно выбранных простых чисел, удовлетворяющего условию $n < P_1 < P_2 < \cdots < P_n$, задаваемый им фиксированный шаблон расстояний повторяется в множестве простых чисел бесконечное число раз.*

Доказательство. Допустим, что для некоторого фиксированного числа элементов n заданный регулярный кортеж имеет лишь конечное число точных реализаций (сдвигов) в натуральном ряду. Следовательно, мощности всех связанных с ним множеств (множеств кортежей с различной локальной конфигурацией) также конечны (определение 1).

Конечность множеств указывает на их общую границу, за которой их элементы полностью отсутствуют.

Однако, согласно классической теореме Евклида, за любой наперед заданной границей последовательность простых чисел бесконечна. Следовательно, за пределами любой конечной области всегда существует возможность выбора начальных n простых чисел, которые согласно лемме 3.1 принадлежат конкретному связанному множеству.

Таким образом, предположение о конечности связанных множеств является ложным, а это значит, что и предположение о конечности множества кортежей с заданными изначально параметрами также является ложным(определение 1).

Следовательно, любой n-элементный кортеж произвольной конфигурации, удовлетворяющий условию $n < P_1 < P_2 < \cdots < P_n$, повторяется в множестве простых чисел бесконечное число раз.

§ 5. Концепция альтернативных множеств

Каждое натуральное число при своем вхождении в числовой ряд однозначно проецируется на бесконечную систему вычетов по всем натуральным модулям.

Определение 2. Связующим кодом (СК) натурального числа x называется бесконечная последовательность его вычетов по модулю всех натуральных чисел, взятых в порядке их возрастания:

$$\mathrm{СК}(x) = (r_1, r_2, r_3, \dots), \text{ где } r_n \equiv x \pmod{n},\ n \in \mathbb{N} \tag{5.1}$$

Определение 3. Пересечение двух связующих кодов $\mathrm{СК}(A) = (a_n)$ и $\mathrm{СК}(B) = (b_n)$ не является пустым тогда и только тогда, когда существует хотя бы один общий индекс $n \in \mathbb{N}$, для которого значения координат совпадают:

$$\mathrm{СК}(A) \cap \mathrm{СК}(B) \neq \emptyset \iff \exists n \in \mathbb{N} : (a_n = b_n) \tag{5.2}$$

Определение 4. Связующий код множества A представляет собой множество, состоящее из связующих кодов отдельных элементов этого множества:

$$CK(A) = \{CK(x) \mid x \in A\} \tag{5.3}$$

Определение 5. Связующий код множества A пересекается со связующим кодом конкретного числа k, если в множестве A существует по крайней мере один элемент a_n, индивидуальный связующий код которого имеет непустое пересечение с кодом числа k:

$$\mathrm{СК}(A) \cap \mathrm{СК}(k) \neq \emptyset \iff \exists a_n \in A : (\mathrm{СК}(a_n) \cap \mathrm{СК}(k) \neq \emptyset) \tag{5.4}$$

Определение 6. Альтернатива это связующий код, определяющий собственное альтернативное множество.

Определение 7. Числовые множества называются альтернативными, если их связующие коды определены в общей области СК, обладают равными пространствами вариантов, но ограничены индивидуальными для каждого множества СК-альтернативами. Если СК(k) является альтернативой множества A, то:

$$\forall a_i \in A : \begin{cases} |\mathrm{CK}(a_i) \cap \mathrm{CK}(k)| = 2 \\ \mathrm{CK}(a_i) \cap \mathrm{CK}(k) = \{r_1, r_{|a_i - k|}\} \end{cases} \tag{5.5}$$

Пример для множества простых чисел P:

$$\forall p_i \in P : \begin{cases} |\mathrm{CK}(p_i) \cap \mathrm{CK}(0)| = 2 \\ \mathrm{CK}(p_i) \cap \mathrm{CK}(0) = \{r_1, r_{|p_i - 0|}\} \end{cases}$$

Если $a_i = k + p_i$, то $\mathrm{CK}(a_i) \cap \mathrm{CK}(k) = \{r_1, r_{p_i}\}$
Простые числа отличаются лишь тем, что их альтернатива $CK(0)$ состоит только из начальных нулей. Если раньше все натуральные числа делились на «чёрные и белые» (простые и составные), то теперь мы получаем радужный спектр, в котором даже составные числа обретают статус простых, а часть простых этот статус теряет.

§ 6. Глобальная теорема о простых близнецах

Теорема 2. *(В. П. Воеводов). Для любого упорядоченного конечного кортежа из n произвольно выбранных чисел из альтернативного множества, определённого альтернативой $CK(a)$, удовлетворяющего условию*

$$n + a < P_1 < P_2 < \cdots < P_n \tag{6.1}$$

задаваемый им фиксированный шаблон расстояний повторяется в заданном альтернативном множестве бесконечное число раз.

Доказательство. Каждый сдвиг альтернативы на единицу

$$CK(t) \to CK(t+1)$$

синхронно прибавляет эту единицу по каждому модулю как для самой альтернативы, так и для каждого элемента альтернативного множества. Сдвиг (или трансформация) альтернативы вызывает синхронный сдвиг (или трансформацию) элементов альтернативного множества. В силу детерминированности арифметики вычетов и инвариантности мощностей, данный сдвиг влечет за собой синхронное отображение всего множества простых чисел в изоморфное ему альтернативное множество.

При сдвиге $CK(0) \to CK(30) : 2 \mapsto 32, 3 \mapsto 33, 5 \mapsto 35, 7 \mapsto 37 \ldots$

$$-29 \mapsto 1, -23 \mapsto 7, -19 \mapsto 11, -17 \mapsto 13, -13 \mapsto 17, \ldots - 3 \mapsto 27, -2 \mapsto 28$$

Следует отметить, что $CK(2)$, $CK(3)$ и $CK(5)$ пересекают $CK(30)$ по три раза (например, $CK(3)$ пересекает по модулям $1, 3, 27$). Поэтому числа $2, 3, 5$ не принадлежат альтернативному множеству с альтернативой $CK(30)$. А $CK(25)$, $CK(27), CK(28)$ пересекают $CK(30)$ только по два раза ($CK(25)$ – по модулям 1 и 5), поэтому числа $25, 27, 28$ являются альтернативными.

Поскольку операция сдвига $CK(0) \to CK(1)$ (и её обобщение на произвольный шаг $CK(a)$) представляет собой взаимно однозначное отображение, вся бесконечная структура распределения простых n-кортежей инвариантно проецируется на целевое альтернативное пространство. При этом полностью сохраняются как геометрическая конфигурация шаблона расстояний, так и асимптотическая плотность элементов.

В силу того, что множество простых кортежей бесконечно, их синхронный перенос (копирование) оператором сдвига гарантирует бесконечное число повторений заданного шаблона внутри любого альтернативного множества. Таким образом, свойство бесконечности исходной структуры транслируется на всю систему альтернативных пространств.

Список литературы

[1] Виноградов И. М. Основы теории чисел. – М.: Наука, 1981. – 176 с.

[2] Воеводов В. П. Глобальная теорема о n–мерных близнецах // Препринт. URL: https://arxivorg.ru

[3] *Евклид.* Начала. Книги VII–IX / Перевод с древнегреческого Д. Д. Мордухай-Болтовского. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. — С. 88–104.

[4] *Яковлев В. И., Скачкова Е. А.* Введение в комбинаторику и теорию множеств: Учебное пособие. — Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ), 2012. — 114 с.

В. П. Воеводов (V. P. Voevodov)
Кировский завод
E-mail: ***@***

Поступило в редакцию
7 ноября 2026 г.