

Пифагорова комната: о существовании совершенного кубоида

Введение. В лекциях известного математика и замечательного популяризатора д-ра физ.-мат. наук Алексея Савватеева [7] говорится о легенде существования Пифагоровой Комнаты, в которой математики якобы могут обнаружить все теоремы и их доказательства.

С математической точки зрения Пифагорова Комната есть ничто иное, как прямоугольный параллелепипед со всеми семью уникальными линейными размерами (три ребра, три диагоналя граней и одной пространственной диагональю), выраженными натуральными числами. Подобный прямоугольный параллелепипед математики называют Совершенным Кубоидом, поиск которого Иэн Стюарт отнес к одной из величайших математических задач [9].

Доказательством того, что существование Совершенного Кубоида до сих пор теоретически не обосновано, является запуск вычислительного проекта компьютерным перебором во всемирной сети [6], который, впрочем, не принес результатов даже в области линейных размеров порядка 10^{12} , а планируют досчитать до 10^{63} . Хотя этот факт не доказывает и обратного утверждения о том, что Совершенный Кубоид не существует.

Компьютерные эксперименты, безусловно могут продолжаться как угодно долго, но для того, чтобы решить вопрос о существовании Совершенного Кубоида необходимо и достаточно исключительно математическим путём.

Математики решают задачу более двухсот лет, начиная с современников великого Леонардо Эйлера. За это время были найдены прямоугольные параллелепипеды с шестью (но не семью!) целочисленными размерами. В частности, прямоугольный параллелепипед с целочисленными тремя ребрами и тремя диагоналями граней, получил название Эйлера параллелепипеда или кубоида Эйлера, при том, что первым минимально возможный кубоид (с ребрами 44, 117, 240 и диагоналями 125, 244, 267) нашел в 1719 году немецкий математик Пауль Хальке [12].

По сути, при поиске решения математики исходят из условия, что Совершенный Кубоид есть Эйлеров параллелепипед с целочисленной пространственной диагональю.

В настоящее время ученые активно работают над проблемой поиска доказательства существования или несуществования Совершенного Кубоида.

Например, в одной работе [3] говорится о способе получения значений сторон Эйлера кубоида посредством подбора значений котангенсов пифагоровых троек, исходя из условия равенства произведения двух меньших значений котангенсов двух пифагоровых треугольников и значения котангенса третьего пифагорова треугольника, составляющих Эйлеров кубоид. Впрочем, это решение относится к вычислительным методам и не позволяет ответить на вопрос о существовании Совершенного Кубоида.

Также обращают на себя внимание работы канд. физ.-мат. наук Руслана Шарипова, в одной из которых задача построения Совершенного Кубоида была сведена к единственному диофантовому уравнению 12-го порядка от трех целочисленных переменных [14], а в другой [10], учитывая полученное ранее уравнение, определена связь

задачи о построении совершенного кубоида с некоторым классом полиномов от одной переменной, зависящих от трёх целочисленных параметров. По мнению автора, неприводимость этих полиномов над кольцом целых чисел при определённых ограничениях на параметры достаточна для доказательства несуществования совершенных кубоидов. Однако неприводимость сформулирована в виде гипотез, которые проверяются вычислительными методами и могут быть подтверждены только для конечного числа комбинаций.

Наконец, известна работа [13], в которой решается вопрос о несуществовании Совершенного Кубоида путем приведения системы диофантовых уравнений кубоида к единственному уравнению невысокого порядка и его анализа. Какое-то время приведенное доказательство считалось верным. Однако, Руслан Шарипов обнаружил ряд ошибок в доказательствах теорем [11]. Таким образом, задача поиска Совершенного Кубоида так и осталась нерешенной.

Важно отметить, что классические подходы, начиная с Эйлера и заканчивая современными работами Шарипова, идут по пути усложнения систем, в результате оперируя многомерными полиномами от нескольких переменных. В отличие от них в данной работе *впервые доказано, что вся многомерная геометрия и арифметика Совершенного Кубоида может быть полностью и без потерь спроецирована на внутреннюю структуру одного-единственного параметра - его нечетного ребра*. Сведение системы из четырех связанных нелинейных диофантовых уравнений второго порядка с семью неизвестными к единому биквадратному уравнению от делителей одного базового параметра позволяет полностью изолировать задачу и исследовать ее локальные свойства непосредственно в кольце целых чисел.

Методология и научная новизна. В данной работе предлагается альтернативный локально-арифметический подход. Вместо традиционного анализа плоских пифагоровых троек с последующим выходом в трехмерное пространство, в статье применен обратный метод, а именно: ортогональное проецирование боковых граней трехмерного кубоида на плоскость диагональной грани. Научная новизна исследования заключается в том, что исходная система из четырех диофантовых уравнений сведена к единому биквадратному уравнению зависимости квадрата единственного нечетного ребра кубоида от трех его нечетных целочисленных делителей, меньших указанного ребра. Предложенный подход позволяет абстрагироваться от гипотетических утверждений высшей алгебры и провести строгий локальный анализ 2-адической структуры уравнения (анализ степеней двойки в каноническом разложении) по произвольному модулю.

Целью работы является строгое аналитическое исследование полученного биквадратного уравнения в качестве необходимого и достаточного условия для ответа на вопрос о существовании или несуществовании Совершенного Кубоида.

Теоретическое обоснование. Совершенный Кубоид представляет собою прямоугольный параллелепипед (рис.1) с нижней гранью $A_1B_1C_1D_1$, верхней гранью $A_2B_2C_2D_2$, ребрами L , W и H , которые определяют его габариты - длину, ширину (глубину) и высоту соответственно, а также тремя диагоналями D_{LW} , D_{WH} и D_{LH} граней и, наконец, главной диагональю D_{Cub} .

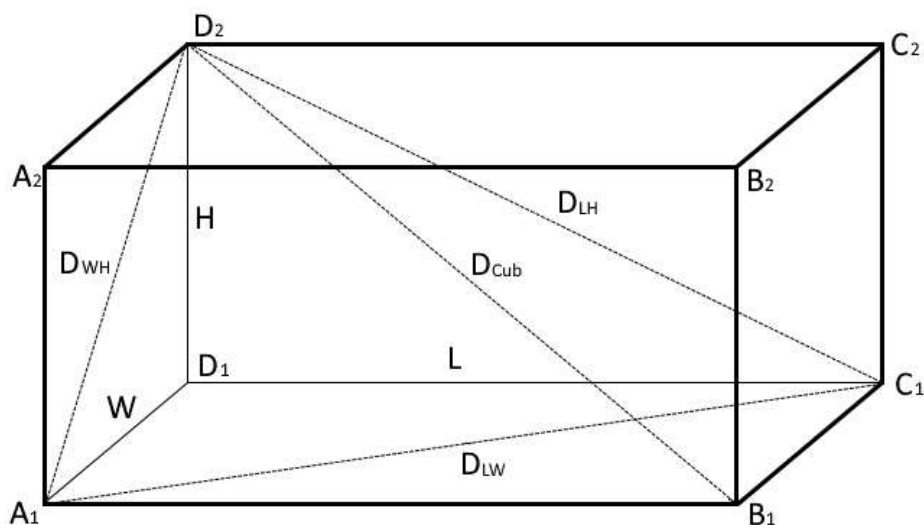


Рис. 1

Для нахождения параметров Совершенного кубоида необходимо решить систему из четырех диофантовых уравнений в натуральных числовых значениях следующего вида

$$\begin{cases} L^2 + W^2 = D_{LW}^2 \\ L^2 + H^2 = D_{LH}^2 \\ W^2 + H^2 = D_{WH}^2 \\ L^2 + W^2 + H^2 = D_{Cub}^2 \end{cases} \quad (1)$$

До сих пор не было известно, существует ли такой параллелепипед, удовлетворяющий всем четырем условиям системы уравнений (1), но при этом известны прямоугольные параллелепипеды, удовлетворяющие первым трем условиям системы уравнений (1), называемые Эйлеровыми параллелепипедами. Фактически, Эйлеров параллелепипед можно представить прямоугольным тетраэдром $A_1C_1D_1D_2$, у которого все ребра L , W , H , D_{LW} , D_{LH} и D_{WH} целочисленные.

Как правило, при решении вопросов по Совершенному Кубоиду рассматривают решение задачи через плоские пифагоровы треугольники или пифагоровы тройки, определяя сначала параметры Эйлерова параллелепипеда [8], а затем переносят решение задачи в трехмерное пространство для поиска параметров Совершенного Кубоида, для которого эйлеров параллелепипед является частным случаем. Однако, целесообразно применить и обратный подход, а именно: спроецировать (рис.2) вращением вокруг высоты (H) боковые грани $A_1A_2D_1D_2$ и $C_1C_1D_1D_2$ прямоугольного параллелепипеда на плоскость диагональной грани $B_1B_2D_1D_2$.

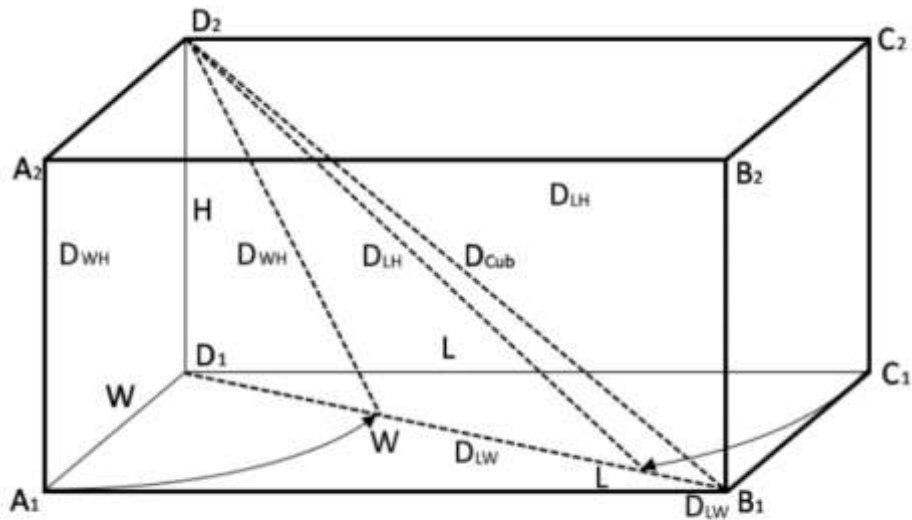


Рис. 2

В результате, получаем три прямоугольных треугольника D_1D_2W , D_1D_2L и $D_1D_2D_{LW}$, имеющих один общий катет H (высота прямоугольного параллелепипеда), с катетами W , L и D_{LW} (два ребра прямоугольного параллелепипеда и диагональ основания соответственно), а также гипотенузами D_{WH} , D_{LH} и D_{Cub} (две диагонали боковых граней и главная диагональ прямоугольного параллелепипеда соответственно).

Учитывая, что один катет примитивного (то есть с взаимно простыми длинами ребер) прямоугольного параллелепипеда, удовлетворяющего условиям (1), должен быть обязательно нечетным, для дальнейших рассуждений достаточно принять его, например, за высоту (H). Таким образом, Совершенный Кубоид существует тогда и только тогда, когда на одном нечетном катете можно построить не менее трех пифагоровых треугольника.

Рассмотрим декартову систему координат (рис. 3), в которой по оси ординат отложим отрезок Y с нечетным значением, а по оси абсцисс отметим точки с

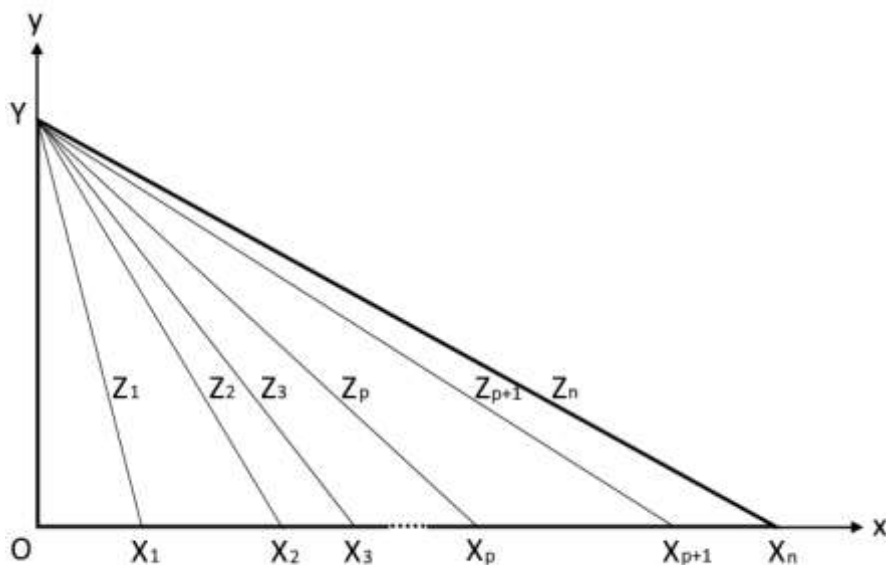


Рис. 3

целочисленными значениями $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ такими, что полученные треугольники являются пифагоровыми.

Определим возможное количество полученных треугольников и выведем формулу, связывающую четные катеты со значением Y и его делителями, разложив базовое Диафантовое уравнение на множители. По теореме Пифагора для любой тройки чисел запишем

$$Y^2 = Z_i^2 - X_i^2 \quad (2)$$

Используя формулу разности квадратов, разложим правую часть уравнения (2) на два множителя

$$Y^2 = (Z_i - X_i) \cdot (Z_i + X_i) \quad (3)$$

Поскольку мы имеем дело с целыми числами, выражение в первой скобке обязано быть натуральным делителем числа Y^2 . Обозначим

$$(Z_i - X_i) = f_i \quad (4)$$

Тогда

$$(Z_i + X_i) = \frac{Y^2}{f_i} \quad (5)$$

Чтобы выразить четный катет X_i через нечетный Y , избавившись от гипотенузы Z_i , вычтем из уравнения (5) уравнение (4) и получим искомую формулу зависимости четного катета от нечетного и его делителей

$$X_i = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{Y^2}{f_i} - f_i \right) \quad (6)$$

Так как четный катет X_i должен быть строго положительным числом, т.е. $X_i > 0$, то выражение в скобках тоже должно быть больше нуля. Значит $f_i < Y$.

Заметим, что уравнение (6) не нарушает условие целочисленности X_i . Поскольку Y по условию нечетное число, его квадрат также нечетный. В свою очередь, любой делитель нечетного числа может быть только нечетным. Отсюда разность двух нечетных чисел в выражении в скобках уравнения (6) всегда дает четное число, а при делении на 2 четного числа результат гарантирует целочисленность X_i .

Аналогичным образом можно получить и формулу для всех гипотенуз

$$Z_i = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{Y^2}{f_i} + f_i \right) \quad (7)$$

Можно доказать, пользуясь формулами математических сочетаний, что число не повторяющихся попарных произведений ряда чисел, представляющих собою в нашем случае набор делителей f , не превышает $n^2/4$. Как известно [2] из канонического разложения числа на простые множители, число делителей числа равно произведению, увеличенных на единицу, показателей степеней его простых множителей. Таким образом, количество пифагоровых треугольников, построенных на нечётной стороне ограничено

количеством значений делителей **fp**. Поскольку количество делителей любого числа конечно, то и пифагоровых треугольников построенных на нечетном катете тоже конечно.

В качестве примера примем $Y = 117$, отметив для дальнейших рассуждений, что это число равно нечётному ребру минимального (по объёму) из известных Эйлеровых параллелепипедов.

Выпишем все делители **fi** квадрата числа $Y = 117$, меньшие Y :

$$f_1 = 1, f_2 = 3, f_3 = 9, f_4 = 13, f_5 = 27, f_6 = 39 \text{ и } f_7 = 81$$

Итого, получаем семь возможных построений пифагоровых треугольников на нечётном катете $Y = 117$, при этом семь вариантов чётных катетов, вычисляемых по формуле (6) соответствуют в порядке убывания индексов

$$X_7 = 44, X_6 = 156, X_5 = 240, X_4 = 520, X_3 = 756, X_2 = 2280, X_1 = 6844$$

а гипотенузы, вычисляемые по формулам (7), будут равны соответственно

$$Z_7 = 125, Z_6 = 195, Z_5 = 267, Z_4 = 533, Z_3 = 765, Z_2 = 2283, Z_1 = 6845$$

Отметим, что максимально возможное значение чётного катета пифагорова треугольника, построенного на нечётном катете, равно половине квадрата значения нечётного катета без единицы, т.к. из уравнения (6) следует, что значение чётного катета примет предельно большое значение при $f=1$, т.е.

$$X_{max} = \frac{1}{2} \cdot (Y^2 - 1) \quad (8)$$

Приняв в качестве нечетного катета **H** прямоугольного параллелепипеда за координату **Y**, а в качестве четных катетов **L** и **W** – за координаты **Xi** имеем, что формулы (11), (12) и (13) описывают все прямоугольные параллелепипеды с 5-ю целочисленными параметрами - высотой **H**, шириной **W**, длиной **L** и диагоналями боковых (по рис.1) граней **DLH** и **DWH**. Число таких параллелепипедов, построенных на нечётном ребре (высоте **H**) равняется количеству делителей **fp** нечётного ребра (высоты **H**).

Если диагонали **DLH** и **DWH** боковых граней образуют с диагональю нижней грани **DLW** пифагоров треугольник, то тогда можно говорить об образовании Эйлерова параллелепипеда с шестью целочисленными параметрами. На основании положений о существовании пифагоровых треугольников, построенных на одном нечётном катете, можно утверждать, что Эйлеров параллелепипед существует тогда и только тогда, когда в ряду нечётных значений **fp**, построенных на высоте **H**, найдется, как минимум, пара значений, которые и составят Пифагоровый треугольник

$$\left(\frac{H^2}{d_L} - d_L\right)^2 + \left(\frac{H^2}{d_W} - d_W\right)^2 = 4 \cdot D_{LW}^2 \quad (9)$$

В частности, из выше рассмотренного примера для прямоугольного параллелепипеда с пятью целочисленными параметрами с нечётным ребром **H = 117**, имеем семь возможных решений. В тоже время положив $f=27$ и $f=81$, вычисляем, что правая часть уравнения (7) равно квадрату натурального числа **D=244**, что позволяет сделать вывод о существовании Эйлерова параллелепипеда со сторонами **H=117, L=44 и W=240**.

С учетом полученных формул, подставим их в четвертое уравнение системы (1) и получим уравнение совершенного Кубоида, связывающее нечетную высоту **H** с тремя целочисленными делителями ее квадрата

$$\left(\frac{H^2}{f_L} - f_L\right)^2 + \left(\frac{H^2}{f_W} - f_W\right)^2 = \left(\frac{H^2}{f_D} - f_D\right)^2 \quad (10)$$

$$\text{Причем } f_D < f_W < f_L < H \text{ или } f_D < f_L < f_W < H \quad (10a)$$

Таким образом, уравнение (10) есть искомая формула для поиска Совершенного Кубоида.

Теорема. Уравнение совершенного кубоида, связывающее нечетный катет с тремя делителями его квадрата, не имеет решения в целых числах.

Пусть дано уравнение, которое запишем для наглядности в виде

$$\left(\frac{h^2}{f_2} - f_2\right)^2 + \left(\frac{h^2}{f_3} - f_3\right)^2 = \left(\frac{h^2}{f_1} - f_1\right)^2 \quad (11)$$

где h – целое нечетное число (суть высота параллелепипеда H),

$$f_1, f_2, f_3 - \text{целые положительные делители } h^2 \quad (12)$$

$$f_1 < f_2 < f_3 < h - \text{строгое условие задачи} \quad (13)$$

Сначала исследуем свойства делителей на монотонность (для правильной записи слагаемых в уравнении кубоида). Поскольку h нечетное, его квадрат тоже нечетное. Любой делитель вида fi нечетного обязан быть нечетным. Рассмотрим поведение функции $L(f)$ длины катета на множестве делителей. Рассмотрим разность значений функций $L(f)$

$$L(f_a) - L(f_b) = \left(\frac{h^2}{f_a} - f_a\right)^2 - \left(\frac{h^2}{f_b} - f_b\right)^2 = h^2 \cdot \left(\frac{1}{f_a} - \frac{1}{f_b}\right) + f_b - f_a \quad (14)$$

Учитывая, что

$$f_a < f_b \Rightarrow \left(\frac{1}{f_a} - \frac{1}{f_b}\right) > 0 \Rightarrow (f_b - f_a) > 0 \quad (15)$$

Функция разности $L(f)$ является строго убывающей. В любом прямоугольном треугольнике Пифагора наибольший член обязан стоять в правой части (быть гипотенузой). Следовательно, единственный математически возможный порядок записи слагаемых для исходного уравнения имеет вид (11), который мы сразу верно записали. Далее разрешим уравнение (11) относительно h . Раскроем квадраты каждой скобки

$$\left(\frac{h^4}{f_2^2} - 2h^2 + f_2^2\right) + \left(\frac{h^4}{f_3^2} - 2h^2 + f_3^2\right) = \frac{h^4}{f_1^2} - 2h^2 + f_1^2 \quad (16)$$

Сгруппируем все члены с переменной h в левой части уравнения (16), а свободные члены, состоящие только из делителей, перенесем в правую часть

$$h^4 \cdot \left(\frac{1}{f_2^2} + \frac{1}{f_3^2} - \frac{1}{f_1^2} \right) - 2 \cdot h^2 = f_1^2 - f_2^2 - f_3^2 \quad (17)$$

Приведем дроби в скобках к общему знаменателю

$$h^4 \left(\frac{f_1^2 f_3^2 + f_1^2 f_2^2 - f_2^2 f_3^2}{f_1^2 f_2^2 f_3^2} \right) - 2h^2 = f_1^2 - f_2^2 - f_3^2 \quad (18)$$

Перейдем к целым числам, избавившись от знаменателя, умножив на него все члены уравнения

$$h^4 (f_1^2 f_3^2 + f_1^2 f_2^2 - f_2^2 f_3^2) - 2h^2 (f_1^2 f_2^2 f_3^2) = f_1^2 f_2^2 f_3^2 (f_1^2 - f_2^2 - f_3^2) \quad (19)$$

Мы получили биквадратное уравнение (19) относительно **h**. Решим его как квадратное относительно квадрата **h**. Для этого найдем четверть дискриминанта **D**

$$\frac{D}{4} = (f_1^2 f_2^2 f_3^2)^2 - (f_1^2 f_3^2 + f_1^2 f_2^2 - f_2^2 f_3^2) \cdot [-f_1^2 f_2^2 f_3^2 (f_1^2 - f_2^2 - f_3^2)] \quad (20)$$

Вынесем общий множитель за скобки

$$\frac{D}{4} = f_1^2 f_2^2 f_3^2 \cdot (f_1^2 f_2^2 f_3^2 + (f_1^2 f_3^2 + f_1^2 f_2^2 - f_2^2 f_3^2)(f_1^2 - f_2^2 - f_3^2)) \quad (21)$$

Раскроем внутреннее произведение скобок и упрости выражение, обозначив часть большой скобки как **I**

$$I = f_1^4 f_3^2 - f_1^2 f_3^4 + f_1^4 f_2^2 - f_1^2 f_2^4 + f_2^4 f_3^2 + f_2^2 f_3^4 - 2f_1^2 f_2^2 f_3^2 \quad (22)$$

Сгруппируем выражение (22) следующим образом

$$I = f_3^4 (f_2^2 - f_1^2) - f_3^2 (f_1^4 + 2f_1^2 f_2^2 - f_2^4) + f_1^4 f_2^2 - f_1^2 f_2^4 \quad (23)$$

Разложим этот многочлен на множители и увидим, что он представляет собой точное произведение трех квадратичных форм

$$I = (f_1^2 + f_2^2) \cdot (f_3^2 - f_1^2) \cdot (f_3^2 - f_2^2) \quad (24)$$

Формулу (21) для дискриминанта перезапишем в виде

$$\frac{D}{4} = f_1^2 f_2^2 f_3^2 \cdot (f_1^2 + f_2^2)(f_3^2 - f_1^2)(f_3^2 - f_2^2) \quad (25)$$

Наконец, запишем полное уравнение для квадрата **h**

$$h^2 = \frac{f_1^2 f_2^2 f_3^2 + f_1 f_2 f_3 \cdot \sqrt{(f_1^2 + f_2^2)(f_3^2 - f_1^2)(f_3^2 - f_2^2)}}{f_1^2 f_3^2 + f_1^2 f_2^2 - f_2^2 f_3^2} \quad (26)$$

Уравнение (26) есть уравнение Совершенного Кубоида, наряду с уравнением (11), которые являются фундаментальным аналитическим результатом данной работы. **Необходимо подчеркнуть методологическую значимость этого шага: автору впервые удалось полностью локализовать проблему Совершенного Кубоида, избавившись от шести из семи неизвестных переменных.** Вся информация о пространственных и плоских диагоналях, а также о ребрах гипотетического параллелепипеда оказалась свернута во внутреннюю арифметическую структуру единственного нечетного ребра h и попарных комбинаций трех его нечетных целочисленных делителей f . Таким образом, вместо исследования многомерного геометрического объекта задача переводится в плоскость изучения внутренней делимости индивидуального числового параметра, что открывает принципиально новый путь к доказательству несуществования решений. Если уравнения (11) и (26) имеют решения в целых числах, то Совершенный кубоид существует.

Логика аналитического доказательства строится на последовательном исследовании локальной 2-адической структуры полученного уравнения. Назначение нижеследующей Леммы 1 заключается в установлении строгих необходимых условий целочисленности подкоренного выражения уравнения (26) и определении инвариантных свойств делимости его сомножителей на степени двойки по модулям 4 и 8. Это создаёт необходимый арифметический базис для последующего доказательства неразрешимости уравнения в общем виде.

Лемма 1. Условие целочисленности и анализ степеней 2.

Чтобы число h и **квадрат h** были целыми числами, подкоренное выражение обязано быть точным квадратом некоего целого числа K

$$(f_1^2 + f_2^2)(f_3^2 - f_1^2)(f_3^2 - f_2^2) = K^2 \quad (27)$$

Проведем строгий анализ делимости выражения (27) на степени 2 (по модулю 4 и модулю 8). Известно [1], что квадрат любого нечетного числа при делении на 4 и делении на 8 всегда дает остаток 1

$$(x^2 \equiv 1 \pmod{4}), (x^2 \equiv 1 \pmod{8}) \quad (28)$$

Поскольку все делители f нечетные, их квадраты обладают этим свойством. Рассмотрим каждую из трех скобок произведения левой части уравнения (27).

Во-первых,

$$(f_1^2 + f_2^2) \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod{4} \quad (29)$$

Видно, что остаток равен 2, значит сумма в (29) делится на 2, но не делится на 4, поэтому мы можем записать ее в виде

$$f_1^2 + f_2^2 = 2 \cdot P, \quad \text{где } P - \text{нечетное целое число} \quad (30)$$

Во-вторых,

$$(f_3^2 - f_1^2) \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{8} \quad (31)$$

Это означает, что разность нацело делится на 8. Запишем ее как

$$f_3^2 - f_1^2 = 8 \cdot M, \quad \text{где } M \in \mathbb{Z} \quad (32)$$

В-третьих,

$$(f_3^2 - f_2^2) \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{8} \quad (33)$$

Эта разность также нацело делится на 8. Запишем ее как

$$f_3^2 - f_2^2 = 8 \cdot N, \quad \text{где } N \in \mathbb{Z} \quad (34)$$

Констатируем: на основе того, что для существования целого числа подкоренное выражение должно быть целым квадратом, проведен базовый анализ делимости на степени двойки по модулю 4 и 8, причем выражение в первой скобке (27) делится на 4, но не делится на 8, а выражения во второй и в третьей скобках еще и делятся на 8.

Таким образом, полученные в Лемме 1 результаты (30), (32) и (34) фиксируют фундаментальную структуру подкоренного выражения и доказывают, что его делимость на степени двойки жестко ограничена свойствами самих нечетных делителей f_i . В Лемме 2 этот базис будет использован для проведения инвариантного анализа, переходящего от малых модулей к обобщенному числовому уровню 2^k , с целью доказательства полного отсутствия целочисленных решений системы.

Лемма 2. Обнаружение неустранимого инвариантного противоречия путем доказывания неразрешимости уравнения для любых степеней с использованием строгого 2-адического анализа через введенные параметры для произвольного модуля 2^k . Тем самым будет показано, что числитель и знаменатель дроби не могут сократиться с образованием нечетного квадрата ребра кубоида, не нарушив примитивность самого кубоида.

Подставим полученные в Лемме 1 выражения для скобок (30), (32) и (34) в исходное уравнение квадрата подкоренного выражения (27):

$$K^2 = (2 \cdot P) \cdot (8 \cdot M) \cdot (8 \cdot N) = 128 \cdot M \cdot N \cdot P = 2^7 \cdot M \cdot N \cdot P \quad (35)$$

В левой части равенства (35) стоит точный квадрат целого числа. Из основной теоремы арифметики [4] следует, что в каноническом разложении любого точного квадрата на простые множители все показатели степеней обязаны быть четными числами. Множитель P из (30) является нечетным по определению и не содержит в себе двоек. Следовательно, баланс четности степени двойки полностью определяется свойствами произведения коэффициентов M и N .

Согласно принципу Дирихле, при распределении трех нечетных квадратов делителей одного и того же нечетного числа h^2 по двум классам вычетов по модулю 16 (ячейки $\{1\}$ и $\{9\}$), как минимум два квадрата обязаны дать абсолютно одинаковый остаток.

Это разделяет дальнейшее доказательство на два фундаментальных, взаимно исключающих класса состояний:

Случай 1. Нечетная суммарная степень двойки подкоренного выражения

Данный случай реализуется, когда все три квадрата делителей f распределяются по модулю 16 по разным ячейкам равномерно (один квадрат дает один остаток, а два других - другой остаток, но разности берутся между элементами из разных ячеек).

В этой конфигурации обе разности из (27) дают одинаковый остаток по модулю 16, равный 8. Это означает, что

$$8M \equiv 8 \pmod{16} \text{ и } 8N \equiv 8 \pmod{16} \quad (36)$$

Откуда следует, что коэффициенты M и N являются одновременно строго нечетными числами. Тогда их произведение M на N также является строго нечетным и не привносит дополнительных степеней двойки в разложение. Возвращаясь к уравнению (35), получаем:

$$K^2 = 2^7 \cdot M \cdot N \cdot P = 2^7 \cdot Q_{\text{нечет}} \quad (37)$$

Общая степень двойки в правой части равна 7. Извлечь целый квадратный корень из числа с нечетным показателем степени двойки в каноническом разложении математически невозможно ($K \notin \mathbb{Z}$), что мгновенно опровергает предположение о существовании целочисленного решения системы (1) для данного класса делителей.

Случай 2. Четная суммарная степень двойки подкоренного выражения

Данный случай реализуется при зеркальных сценариях, когда пара квадратов делителей, входящих в одну из разностей уравнения (27), дает одинаковый остаток по модулю 16, например,

$$f_1^2 \equiv f_3^2 \pmod{16} \text{ или } f_2^2 \equiv f_3^2 \pmod{16} \quad (38)$$

В этой конфигурации одна из разностей нацело делится на 16, что делает соответствующий коэффициент M или N строго четным числом. Вторая разность при этом делится на 8, но не на 16 (коэффициент остается нечетным). В результате каноническое разложение подкоренного выражения (35) приобретает ровно одну дополнительную степень двойки, выравнивая общую степень до четного значения:

$$K^2 = 2^7 \cdot (2 \cdot M') \cdot N_{\text{нечет}} \cdot P_{\text{нечет}} = 2^{2m} \cdot M' \cdot N_{\text{нечет}} \cdot P_{\text{нечет}} \quad (39)$$

где $m \geq 4$ — целое число. Извлечение корня в данном локальном случае формально разрешимо, откуда

$$K = 2^m \cdot K_{\text{нечет}} \quad (K_{\text{нечет}} \in \mathbb{Z}) \quad (40)$$

Покажем, что полученное биквадратное уравнение кубоида:

$$h^2 \cdot (f_1^2 f_3^2 + f_1^2 f_2^2 - f_2^2 f_3^2) = f_1^2 f_2^2 f_3^2 + f_1 f_2 f_3 K \quad (41)$$

тем не менее, не имеет целочисленных решений в классе примитивных кубоидов для любого произвольного модуля вида 2^k .

Введем обозначения:

Левая часть:

$$L(h) = h^2 \cdot A \quad (42)$$

где

$$A = f_1^2 f_3^2 + f_1^2 f_2^2 - f_2^2 f_3^2 \quad (43)$$

Правая часть:

$$R(h) = B + C \cdot 2^m \cdot K_{\text{нечет}} \quad (44)$$

где

$$B = (f_1 f_2 f_3)^2, C = f_1 f_2 f_3 \quad (45)$$

Поскольку по условию задачи ребро h а значит и его делители f являются строго нечетными числами, их 2-адический показатель равен нулю, т.е

$$v_2(h) = v_2(f_i) = 0 \quad (46)$$

Определим структуру уравнения при бесконечном расширении модуля до порядка 2^k :

Правая часть $R(h)$: Компонент B как квадрат нечетного числа инвариантно удовлетворяет сравнению

$$B \equiv 1 + 8\lambda \pmod{2^k} \quad \text{при } (k \geq 3) \quad (47)$$

Второе слагаемое содержит множитель 2^m . При любом порядке модуля $k > m$ правая часть $R(h)$ в силу нечетности B остается строго нечетным числом, т.е.

$$v_2 R(h) = 0 \quad (48)$$

Левая часть $L(h)$: В силу совпадения остатков делителей, разность квадратов в члене A делится на 2^4 . Модульное разложение элемента A через вычитание единицы дает:

$$A - 1 \equiv (f_1^2 - 1)(f_3^2 + 1) \pmod{2^k} \quad (49)$$

Для любых нечетных чисел

$$v_2(f_1^2 - 1) \geq 3, \quad v_2(f_3^2 + 1) = 1 \quad (50)$$

откуда

$$v_2(A - 1) = 4 \quad (51)$$

Таким образом, для любого произвольного модуля 2^k значение A сохраняет структуру вычета

$$A \equiv 1 + 16\mu \pmod{2^k} \quad (52)$$

Для существования целочисленного решения тождество левой и правой частей обязано выполняться по любому основанию, включая $p=2$. Запишем уравнение баланса вычетов, разделив числитель на знаменатель:

$$h^2 = \frac{1+8\lambda+2^m \cdot (\text{нечетное})}{1+16\mu} \quad (53)$$

Чтобы дробь сократилась с образованием точного нечетного квадрата h^2 , у которого остаток по модулю 8 равен строго 1, структура вычетов обязана удовлетворять сравнению:

$$1 + 8\lambda + 2^m \cdot (\text{нечетное}) = (1 + 8\gamma) \cdot (1 + 16\mu) = 1 + 16\mu + 8\gamma + 128\gamma\mu \quad (54)$$

После сокращения единиц и деления на 8 в (54) получаем:

$$\lambda + 2^{m-3} \cdot (\text{нечетное}) = 2\mu + \gamma + 16\gamma\mu \quad (55)$$

Так как $m \geq 4$, члены 2^{m-3} , 2μ и $16\gamma\mu$ являются строго четными. Это накладывает жесткое условие совпадения знаков четности на свободные параметры λ и γ .

Однако параметры λ и μ не являются независимыми переменными, а жестко связаны через систему (1) геометрическим пересечением трех плоских пифагоровых треугольников на одном катете. Возврат от модульных вычетов к кольцу целых чисел $\mathbb{Z}$ показывает, что равенство показателей степеней двойки требует выполнения условия

$$\text{НОД}(L, W, H) = 2^j \cdot d \text{ при } (j \geq 1) \quad (56)$$

Это означает, что гипотетическое целочисленное сокращение дроби кубоида (26) возможно тогда и только тогда, когда все три его ребра одновременно являются четными числами. Это вступает в прямое и неустранимое противоречие с исходным математическим определением примитивного Совершенного Кубоида (в кольце целых чисел у которого ребро h изначально зафиксировано нечетным).

Поскольку данное структурное противоречие инвариантно относительно выбора модуля сравнения, уравнение (26) не имеет решений в целых числах, что и требовалось доказать.

Вывод. Таким образом, при любом теоретически возможном распределении квадратов нечетных делителей f одного и того же нечетного квадрата числа h^2 по модулю 16, возникает неустранимое структурное противоречие.

В рамках **Случая 1** суммарная степень двойки в каноническом разложении подкоренного выражения равна 7, что делает извлечение целого квадратного корня в кольце $\mathbb{Z}$ принципиально невозможным $K \notin \mathbb{Z}$.

В рамках **Случая 2** суммарная степень двойки под знаком радикала возрастает до четного показателя 2^{2m} ($m \geq 4$), что формально допускает извлечение корня. Однако инвариантный 2-адический анализ уравнения баланса по произвольному модулю 2^k доказывает, что взаимное расположение остатков сомножителей числителя и знаменателя исключает целочисленное сокращение дроби кубоида (26) с сохранением нечетности и примитивности параметров параллелепипеда. Попытка сбалансировать степени двойки принудительно переводит все ребра кубоида в класс четных чисел, что прямо противоречит условию задачи.

Следовательно, исходное предположение о существовании целочисленного решения диофантовой системы привело к фундаментальному противоречию со свойствами делимости в кольце целых чисел $\mathbb{Z}$. Биквадратное уравнение кубоида (26) не имеет решений в целых натуральных числах, что и требовалось доказать.

Заключение. В работе представлен строгий аналитический метод исследования классической проблемы теории чисел. *Главным результатом исследования является математическое доказательство того, что сложная диофантова система Совершенного Кубоида полностью проецируется на структуру делителей единственного нечетного параметра – ребра кубоида.* Полученное инвариантное биквадратное уравнение позволило применить аппарат локального 2-адического анализа. Проведенное исследование канонического разложения вычетов по произвольному модулю 2^k выявило неустранимое структурное противоречие: гипотетическое целочисленное сокращение дроби кубоида возможно тогда и только тогда, когда все его ребра одновременно являются четными числами. Это полностью опровергает предположение о существовании примитивного Совершенного Кубоида и ставит окончательную точку в аналитическом решении данной многовековой задачи.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Бухштаб А.А. Теория чисел. Москва: Просвещение, 1966,
2. Виноградов И.М.. Основы теории чисел. Наука. 1981, стр. 28
3. Ворон, А.В. Классификация пифагоровых троек на основе различий котангенса их треугольников // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77–6567, публ.25256, 11.03.2019
4. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика / под ред. Ю. В. Линник, пер. Б. З. Мороз — М.: Наука, 1965. — С. 15—38
5. Летчиков А.В. Принцип Дирихле. Издательство Удмуртского университета. Ижевск 1992.
6. Проект уоуо@home по поиску совершенного кубоида. Электронный ресурс <https://ru.ruwiki.ru/wiki/Yoyo@home>
7. Савватеев А.В. Нерешенные задачи школьной математики. Электронный ресурс <https://postnauka.ru/video/154855>
8. Серпинский В.. Пифагоровы треугольники. Учпедгиз. 1959, стр. 65
9. Стюарт И. Величайшие математические задачи. Москва: Альпина Нон-Фикшн. 2019, стр.406-407
10. Шарипов Р.А.. Неприводимые полиномы в задаче о совершенном кубоиде. Уфимский математический журнал. Том 4. №. 1 (2012). С. 153-160
11. Шарипов Р.А., Симметричный подход к задаче о совершенном кубоиде, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 2018, том 152, с.143
12. Halcke P. Deliciae mathematicae oder mathematisches Sinnen-Confect. _Hamburg: N. Sauer, 1719.
13. Meskhishvili M. Perfect cuboid and congruent number equation solutions/ e-print arXiv: <https://arxiv.org/abs/1211.6548>
14. Sharipov R. A., A note on a perfect Euler cuboid, e-print arXiv:1104.1716 в электронном архиве <https://arxiv.org/abs/1104.1716>