Тензор энергии-импульса с ненулевым следом в электродинамике Максвелла

Ю.А. Спиричев

Научно-исследовательский и конструкторский институт радиоэлектронной техники
E-mail: yurii.spirichev@mail.ru

Аннотация.

Получен новый тензор энергии-импульса электромагнитного поля без использования уравнений Максвелла, теоремы Пойнтинга и формализма Лагранжа. Его следом и линейным инвариантом, в отличие от известных тензоров энергии-импульса (канонического тензора, тензора Минковского, тензора Абрагама и др.), является квадратичный инвариант электромагнитного поля. Получено уравнение для силы Абрагама.

Ключевые слова: тензор энергии-импульса, тензор Минковского, тензор Абрагама, электромагнитные силы, сила Абрагама, плотность импульса, момент импульса.

Содержание

1. Введение
2. Тензоры электромагнитного поля и электромагнитной индукции
3. Тензоры энергии-импульса в электродинамике
4. Вывод нового ТЭИ с ненулевым следом
5. Уравнения сохранения для энергии и импульса ЭМП
6. Заключение
Список литературы

1. Введение

Фундаментальным описанием энергии взаимодействия электромагнитного поля (ЭМП) с веществом является тензор энергии-импульса (ТЭИ). Проблема взаимодействия ЭМП с веществом обсуждается уже много лет, однако до настоящего времени ее однозначного решения не найдено. В последние годы ведутся работы по созданию метаматериалов с уникальными электромагнитными свойствами, поэтому вопросы взаимодействия ЭМП с веществом приобрели особую актуальность. Электромагнитные силы в сплошной среде обычно ищут в виде четырехмерной дивергенции ТЭИ [1]. Проблему нахождения электромагнитных сил в сплошной среде можно разделить на две части. Первой из них является выбор формы ТЭИ взаимодействия ЭМП с веществом. Второй проблемой является выбор материальных уравнений, описывающих электромагнитные свойства среды. Настоящая статья посвящена решению первой проблемы, которая заключается в отсутствии однозначного ответа на вопрос о том, какая из известных форм тензора ТЭИ является правильной. Наиболее часто обсуждаются формы ТЭИ Минковского и Абрагама. Это сделано, например, в статьях [1] - [10]. В статьях [1] - [3], [5], [8], [10] авторы проводят

сравнительный анализ результатов, следующих из ТЭИ в формах Минковского и Абрагама для различных случаев, и отдают предпочтение форме Абрагама. В статьях [4], [6], [7], [9] показаны достоинства ТЭИ в форме Минковского и недостатки ТЭИ в форме Абрагама, который, по мнению авторов [4] и [6], не является релятивистски ковариантным и потому отдается предпочтение форме Минковского. В работе [2] отмечается, что «в большинстве ситуаций результаты, получаемые на основе тензоров Абрагама и Минковского, совершенно тождественны». По мнению авторов [3] в рамках чисто макроскопического подхода не представляется возможным сделать однозначный выбор формы ТЭИ. Важным аспектом этой дискуссии является вопрос о существовании силы Абрагама. Эта сила появляется при сравнении тензоров Минковского и Абрагама, как необходимое дополнение к тензору Абрагама. Обширная библиография по данному вопросу приведена в работах [3], [4] и [7].

Одной из причин дискуссий по формам ТЭИ является отсутствие математически строгого метода его получения. В известных работах его получают не методом математического вывода, а методом построения из отдельных частей. Из уравнений Максвелла и выражения для силы Лоренца с помощью теоремы Пойнтинга получают уравнения, интерпретируемые как уравнения сохранения энергии и импульса. Далее члены этих уравнений понимаются как производные компонентов ТЭИ. Этими «строительными» частями ТЭИ являются плотность энергии и плотность импульса ЭМП, плотность потока энергии (вектор Умова-Пойнтинга), трехмерный тензор плотности потока импульса (или трехмерный тензор напряжений). Этот метод имеет определенную свободу выбора составных частей ТЭИ и приводит к тому, что они иногда конструируются авторами из общих соображений и понимаются по-разному. Это приводит к возникновению дискуссий. Таким методом были построены ТЭИ в формах Минковского, Герца – Хэвисайда, Абрагама, Гельмгольца - Абрагама, Абрагама – Бриллюэна – Питаевского, Полевого – Рытова и др. Этим формам ТЭИ соответствуют свои формы представления электромагнитных сил. Такой метод получения ТЭИ имеет существенный недостаток, заключающийся в том, что в теореме Пойнтинга относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды принимаются постоянными [2], что ограничивает общность результатов, получаемых этим методом. В отношении электромагнитных сил в работе [3] отмечается, что они находятся «несколько непоследовательным образом. Между тем желательно получить силы, и другие величины (плотность энергии, поток энергии, плотность импульса) единым образом на базе уравнений поля». Уравнения поля (система уравнений Максвелла) являются следствиями антисимметричного тензора ЭМП, поэтому методически целесообразно получение ТЭИ непосредственно из тензора ЭМП, минуя этапы получения уравнений Максвелла, теоремы Пойнтинга и выбора составных частей ТЭИ. При таком методе форма ТЭИ и следующие из него уравнения для энергии и импульса полностью и однозначно определяются антисимметричным тензором ЭМП. При этом причины для дискуссии отсутствуют.

В настоящей статье предложен математически строгий последовательный подход к получению ТЭИ, уравнений сохранения плотности электромагнитной энергии и импульса. Особенность предлагаемого метода заключается в том, что в нем не используются уравнения Максвелла и теорема Пойнтинга, а используется их первоисточник - антисимметричный тензор ЭМП, уже содержащий всю необходимую информацию. В предлагаемом методе все уравнения сохранения и баланса

электромагнитных сил следуют из ТЭИ в виде его четырехмерных дивергенций. Такой подход прост, нагляден, и при правильном исходном постулате и отсутствии математических ошибок дает правильный результат. При этом дискуссионные вопросы появляются только при выборе конкретных видов материальных уравнений и получении соответствующих этим уравнениям электромагнитных сил. Кроме того, получаемый таким методом ТЭИ и следующие из него уравнения пригодны для рассмотрения общих случаев взаимодействия ЭМП со средой, поскольку на вид материальных уравнений ограничений не накладывается.

2. Тензоры электромагнитного поля и электромагнитной индукции

Геометрия пространства-времени здесь принимается в виде четырехмерного псевдоевклидова пространства Минковского (ct, i*x*, i*y*, i*z*) [11 с.153]. А.Зоммерфельд разделил электромагнитные величины на силовые и количественные величины [12 с.11]. К силовым величинам он отнес напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ и индукцию магнитного поля $\mathbf{B}$. К количественным величинам он отнес индукцию электрического поля $\mathbf{D}$ и напряженность магнитного поля $\mathbf{H}$ в среде. Пары величин $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ он объединил соответственно в антисимметричные тензоры ЭМП $\mathbf{F}_{\nu\mu}$ и электромагнитной индукции (ЭМИ) $\mathbf{f}_{[\nu\mu]}$ [12 с.298]. Антисимметричный тензор напряженностей ЭМП в вакууме в матричной форме имеет вид:

$$\mathbf{F}_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c} i \cdot E_x & -\frac{1}{c} i \cdot E_y & -\frac{1}{c} i \cdot E_z \\ \frac{1}{c} i \cdot E_x & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{1}{c} i \cdot E_y & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{1}{c} i \cdot E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Тензор ЭМИ $\mathbf{f}_{\nu\mu}$ в среде в матричной форме имеет вид:

$$\mathbf{f}_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -i \cdot c \cdot D_x & -i \cdot c \cdot D_y & -i \cdot c \cdot D_z \\ i \cdot c \cdot D_x & 0 & H_z & -H_y \\ i \cdot c \cdot D_y & -H_z & 0 & H_x \\ i \cdot c \cdot D_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Связь между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ определяется материальными уравнениями. Для вакуума или микрополя $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E}$, а $\mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu_0$, где ε_0 и μ_0, соответственно, электрическая и магнитная постоянные. Для слабого ЭМП в изотропной неферромагнитной диэлектрической среде без дисперсии обычно принимают материальные уравнения в виде:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot \mathbf{E} \quad \text{и} \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu \cdot \mu_0 \qquad (3)$$

где ε и μ, соответственно, относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

3. Тензоры энергии-импульса в электродинамике

Канонический ТЭИ запишем в общем виде:

$$\mathbf{T}_{\nu\mu} = \begin{bmatrix} W & i\frac{1}{c}\mathbf{S} \\ ic\cdot\mathbf{g} & t_{ik} \end{bmatrix} \qquad (\nu, \mu=0, 1, 2, 3;\ i, k=1, 2, 3) \qquad (4)$$

где W – плотность энергии;

S – плотность потока энергии (вектор Умова-Пойнтинга);

g – плотность импульса;

$\mathbf{t}_{ik}$ – тензор плотности потока импульса (тензор напряжений).

Наибольшую распространенность в электродинамике получили тензоры Минковского и Абрагама, сконструированные на основе теоремы Пойнтинга. Компоненты ТЭИ (4) в форме Минковского имеют вид:

$$W = (\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B})/2 \qquad \mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$$

$$\mathbf{g}^M = \mathbf{D}\times\mathbf{B} \qquad \mathbf{t}_{ik}^M = (E_i D_k + H_i B_k) - \delta_{ik}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B})/2 .$$

Компоненты ТЭИ (4) в форме Абрагама имеют вид:

$$W = (\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B})/2 \qquad \mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$$

$$\mathbf{g}^A = \mathbf{E}\times\mathbf{H} \qquad \mathbf{t}_{ik}^A = (E_i D_k + E_k D_i + H_i B_k + H_k B_i)/2 - \delta_{ik}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B})/2 .$$

Особенностью этих и других известных ТЭИ является их нулевой след. Это вызывает недоумение, так как след ТЭИ является инвариантом энергии, но у ЭМП известны единственные квадратичные инварианты энергии $2(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}-\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})$ для среды и $2(\mathbf{E}^2/c^2-\mathbf{B}^2)$ для вакуума, которые по логике, и должны являться следами ТЭИ ЭМП для среды и вакуума. Этому странному факту нашли объяснение, согласно которому след ТЭИ описывает стационарную энергию ЭМП, которой соответствует стационарная масса, а фотон не имеет стационарной массы, следовательно, и след ТЭИ должен быть равен нулю. Такое объяснение нельзя считать удовлетворительным, так как существующее стационарное ЭМП требует своего энергетического описания, которое в ТЭИ с нулевым следом отсутствует.

Нулевой след ТЭИ приводит к еще одному отрицательному следствию. В физике важную роль играет теорема вириала, определяющая общие интегральные условия удержания физической системы в конечной области пространства или условия финитности движения ее частиц. Эта теорема находит применение в различных областях от теории плазмы до астрофизики. В теории плазмы она особенно важна, так как на ее основе получены критерии равновесия и устойчивости плазмы в магнитных ловушках, применяемых в проектах термоядерного синтеза и других плазменных установках. В теореме вириала для системы заряженных частиц используются следы ТЭИ [13] составных частей физической системы и описывающих ее стационарное состояние. Но, как уже сказано, в известных ТЭИ ЭМП (каноническом, Минковского, Абрагама и д.р.) след равен нулю и описание стационарной энергии в них отсутствует. Для устранения этой проблемы в работе [13] производится «перенормировка» энергии, для этого в уравнение теоремы вириала, вместо нуля подставляется полная энергия ЭМП. В работе [14] Шафранов В.Д. отмечает неточность такой «перенормировки» и указывает, что она не устраняет противоречий и потому, им делается еще одна дополнительная «перенормировка» энергии. На основе теоремы вириала, полученной таким путем, в работах [14] и [15] делается важный теоретический вывод о том, что локальные области плазмы не

имеют равновесного состояния и не могут самостоятельно удерживаться в конечной области пространства без внешних технических средств. Однако шаровые молнии и другие долгоживущие плазменные образования существуют и им посвящено много работ, например [16] - [18]. Кроме того, существуют устойчивые долгоживущие астрофизические явления типа магнитного динамо. Все это говорит о том, что все ТЭИ с нулевым следом неправильно описывают взаимодействие ЭМП с веществом. Правильный ТЭИ ЭМП должен иметь след, являющийся его инвариантом, равный квадратичному инварианту ЭМП.

4. Вывод нового ТЭИ с ненулевым следом

Получим ТЭИ (4) непосредственно из тензоров ЭМП (1) и ЭМИ (2) без привлечения уравнений Дж. Максвелла и теоремы Пойнтинга. Как указал А.Зоммерфельд, энергетические величины являются произведениями силовых величин на количественные величины [12 с.11]. Тогда энергия взаимодействия ЭМП со средой является квадратичной формой от напряженностей и индукций электрического и магнитного полей. Поскольку напряженности и индукции электрического и магнитного полей являются компонентами тензоров (1) и (2), то квадратичные формы их компонентов являются компонентами ТЭИ. Таким образом, получим ТЭИ в виде внутреннего скалярного произведения тензоров ЭМП $\mathbf{F}_{\nu\mu}$ (1) и ЭМИ $\mathbf{f}_{\nu\mu}$ (2). Компоненты тензора $\mathbf{P}_{\nu\mu}$ внутреннего скалярного произведения двух тензоров второго ранга находятся по формуле [19 с.308]:

$$\mathbf{P}_{\nu\mu}=\sum_{\eta=0}^{\eta=3}\mathbf{a}_{\nu\eta}\mathbf{b}_{\eta\mu} \qquad \nu, \mu=0, 1, 2, 3$$

Положив $\mathbf{a}_{\nu\eta}=\mathbf{F}_{\nu\eta}$ и $\mathbf{b}_{\eta\mu}=\mathbf{f}_{\eta\mu}$, получим ТЭИ в виде:

$$\mathbf{T}_{\nu\mu}=\sum_{\eta=0}^{\eta=3}\mathbf{F}_{\nu\eta}\mathbf{f}_{\eta\mu} \quad \nu, \mu=0, 1, 2, 3 \qquad (5)$$

где по одинаковым индексам производится суммирование. По этой формуле найдем компоненты ТЭИ (4):

$$T_{00}=E_xD_x+E_yD_y+E_zD_y \qquad T_{01}=i\cdot(E_yH_z-E_zH_y)/c$$
$$T_{11}=E_xD_x-B_zH_z-B_yH_y \qquad T_{02}=i\cdot(E_zH_x-E_xH_z)/c$$
$$T_{22}=E_yD_y-B_zH_z-B_xH_x \qquad T_{03}=i\cdot(E_xH_y-E_yH_x)/c$$
$$T_{33}=E_zD_z-B_yH_y-B_xH_x \qquad T_{10}=ic(B_zD_y-B_yD_z)$$
$$T_{20}=ic(B_xD_z-B_zD_x) \qquad T_{30}=ic(B_yD_x-B_xD_y)$$
$$T_{12}=E_xD_y+B_yH_x \qquad T_{13}=E_xD_z+B_zH_x$$
$$T_{21}=E_yD_x+B_xH_y \qquad T_{23}=E_yD_z+B_zH_y$$
$$T_{31}=E_zD_x+B_xH_z \qquad T_{32}=E_zD_y+B_yH_z$$

Эти компоненты ТЭИ можно записать в виде:

$$\mathbf{T}_{\nu\mu}=\begin{bmatrix} W & i\frac{1}{c}\mathbf{S} \\ ic\cdot\mathbf{g} & \mathbf{t}_{ik}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{E}\cdot\mathbf{D} & i\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c \\ ic\cdot(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) & E_iD_k+B_iH_k-\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})\end{bmatrix} \qquad (6)$$

где $W=\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}$, $\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$, $\mathbf{g}=\mathbf{D}\times\mathbf{B}$, $\mathbf{t}_{ik}=E_iD_k+B_iH_k-\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})$ i, k=1, 2, 3

Для среды, описываемой материальными уравнениями (3), ТЭИ (6) имеет симметричный вид:

$$\mathbf{T}_{\nu\mu}=\begin{bmatrix} \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}^2 & i\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c \\ i\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c & \varepsilon\varepsilon_0E_iE_k+\mu\mu_0H_iH_k-\mu\mu_0\delta_{ik}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}) \end{bmatrix} \tag{7}$$

Для вакуума и микрополя ТЭИ (6) также имеет симметричный вид:

$$\mathbf{T}_{\nu\mu}=\begin{bmatrix} \varepsilon_0\mathbf{E}^2 & i\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B})/c\mu_0 \\ i\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B})/c\mu_0 & \varepsilon_0E_iE_k+B_iB_k/\mu_0-\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})/\mu_0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Линейными инвариантами ТЭИ (6) – (8) являются:

$$I_1=2(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}-\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) \quad I_2=2(\varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}^2-\mu\mu_0\mathbf{H}^2) \quad I_3=2(\mathbf{E}^2/c^2-\mathbf{B}^2)$$

Эти инварианты нового ТЭИ представляют собой квадратичные инварианты ЭМП в вакууме и в среде, что является критерием их правильности.

5. Уравнения сохранения для энергии и импульса ЭМП

Уравнения сохранения для электромагнитной энергии и импульса следуют из ТЭИ (6) в виде его четырехмерных дивергенций. В общем случае ТЭИ (6) является несимметричным и для каждого из его индексов можно записать по две группы уравнений, учитывая форму записи ТЭИ (6), здесь можно не различать ковариантные и контравариантные индексы:

$$\text{а)}\ \partial_\nu\mathbf{T}_{\nu\mu}=0 \qquad \text{и} \qquad \text{б)}\ \partial_\mu\mathbf{T}_{\nu\mu}=0 \tag{9}$$

или а) $\frac{1}{c}\partial_t W+c\cdot\nabla\cdot\mathbf{g}=0 \quad \frac{1}{c^2}\partial_t\mathbf{S}-\partial_i t_{ik}=0$ и б) $\partial_t W+\nabla\cdot\mathbf{S}=0 \quad \partial_t\mathbf{g}-\partial_k t_{ik}=0$

В первой группе получим уравнения сохранения плотностей энергии ЭМП и потока энергии **S**:

$$\frac{1}{c}\partial_t(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})+c\cdot\nabla\cdot(\mathbf{D}\times\mathbf{B})=0 \tag{10}$$

$$\frac{1}{c^2}\partial_t(\mathbf{E}\times\mathbf{H})-\partial_i(E_iD_k+B_iH_k-\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}))=0 \tag{11}$$

Во второй группе получим уравнения сохранения плотности энергии и плотности импульса в среде **g**:

$$\frac{1}{c}\partial_t(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})+\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c=0 \tag{12}$$

$$\partial_t(\mathbf{D}\times\mathbf{B})-\partial_k(E_iD_k+B_iH_k-\delta_{ik}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}))=0 \tag{13}$$

Из уравнений сохранения плотности энергии (10) и (12) следует уравнение:

$$c\cdot\nabla\cdot(\mathbf{D}\times\mathbf{B})=\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c \qquad \text{или} \qquad \nabla\cdot[(\mathbf{D}\times\mathbf{B})-(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c^2]=0$$

Взяв производную по времени последнего уравнения, получим:

$$\nabla\cdot[\partial_t(\mathbf{D}\times\mathbf{B})-\partial_t(\mathbf{E}\times\mathbf{H})/c^2]=0 \tag{14}$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой силу Абрагама. Следовательно, из ТЭИ (6) следует, что дивергенция силы Абрагама равна нулю. Это говорит о том, что сила Абрагама является вихревой силой.

В уравнениях (10) – (13) не налагается никаких ограничений на материальные уравнения. Поэтому уравнения (10) – (13) являются универсальными и описывают законы сохранения плотности энергии, плотности потока электромагнитной энергии и плотности импульса при любых видах материальных уравнений, связывающих ЭМП и

ЭМИ. Полученные уравнения найдены для неподвижной среды, но в силу релятивистской ковариантности тензоров ЭМП и ЭМИ, эти уравнения также ковариантные и, при использовании известных формул преобразования их можно применять и для движущейся среды.

6 Заключение

Из тензоров ЭМП и ЭМИ без привлечения уравнений Максвелла и теоремы Пойнтинга математически строго получен ТЭИ (6), имеющий след, равный квадратичному инварианту ЭМП, что радикально отличает его от известных ТЭИ с нулевым следом. Из ТЭИ (6) получено уравнение (14) для силы Абрагама, ранее отсутствовавшее в электродинамике, из которого следует, что сила Абрагама является вихревой силой. Полученный тензор решает проблему теоремы вириала для плазмы, связанную с возможностью существования равновесного состояния плазмы и возможностью самостоятельно удерживаться в локальных областях, например в шаровой молнии, и других долгоживущих плазменных образованиях без внешних технических средств.

Список литературы

1. Скобельцын Д В *УФН* **110** 253 (1973); Skobel'tsyn D V Sov. Phys. Usp. **16** 381 (1973)
2. Гинзбург В Л *УФН* **110** 309 (1973); Ginzburg V L Sov. Phys. Usp. **16** 434 (1973)
3. Гинзбург В Л, Угаров В А *УФН* **118** 175 (1976); Ginzburg V L, Ugarov V A Sov. Phys. Usp. **19** 94 (1976)]
4. Веселаго В Г *УФН* **179** 689 (2009); Veselago V G Phys. Usp. **52** 649 (2009)
5. Макаров В П, Рухадзе А А *УФН* **179** 995 (2009); Makarov V P, Rukchadze A A Phys. Usp. **52** 937 (2009)
6. Веселаго В Г, Щавлев В В *УФН* **180** 331 (2010); Veselago V G, Shchavlev V V Phys. Usp. **53** 317 (2010)
7. Давидович М В *УФН* **180** 623 (2010); Davidovich M V Phys. Usp. **53** 595 (2010)
8. Макаров В П, Рухадзе А А *УФН* **181** 1357 (2011); Makarov V P, Rukchadze AA Phys. Usp. **54** 1285 (2011)
9. Веселаго В Г *УФН* **181** 1201 (2011); Veselago V G Phys. Usp. **54** 1161 (2011)
10. Топтыгин И Н, Левина К *УФН* **186** 146 (2016); Toptygin I N, Levina K Phys. Usp. **59** 141 (2016)
11. Тоннела М-А Основы электромагнетизма и теории относительности (М.: «Издательство иностранной литературы», 1962)
12. Зоммерфельд А Электродинамика (М.: «Иностранная литература», 1958)
13. Ландау Л Д, Лифшиц Е М *Теория поля* (М.: Наука, 1973);
14. Шафранов В.Д. О теореме вириала для системы заряженных частиц УФН 128 (1) 161 - 164 (1979)
15. Шафранов В. Д. О равновесных магнитогидродинамических конфигурациях // ЖЭТФ. 1957. Т. 33, вып. 3(9). С. 710–722.
16. Бычков В. Л. О наблюдательных свойствах шаровой молнии // Химическая физика. 2006. Т. 25, № 3. С. 7–17.

17. Егоров А. И., Степанов С. И., Шабанов Г. Д. Демонстрация шаровой молнии в лаборатории // УФН. 2004. Т. 174. № 1. С. 107–109.
18. Фуров Л. В. Получение автономных долгоживущих плазменных образований в свободной атмосфере // ЖТФ. 2005. Т. 75, вып. 3. С. 98–101.
19. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления (М.: «Наука», 1965)