

ФРАКТАЛЫ В СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В. Н. Гладкий*

25 августа 2026 г.

Аннотация

В статье используются фрактальные функции для получения общего уравнения релятивистского движения частицы в инерциальной системе отсчета. В общем случае релятивистские выражения для закона движения, импульса, энергии, силы описываются фрактальными функциями. Показано, что релятивистское замедление времени и сокращение размеров при движении является следствием изменения характера взаимодействия элементов структуры движущегося тела. В то же время изменение расстояний и скорости хода координатных часов при переходе в другую систему отсчета возникает из-за различия эталонов длины и времени в этих системах отсчета. Применение фракталов в специальной теории относительности и полученные при этом результаты являются полностью оригинальными.

1 Введение

Если мы имеем математическое описание движения точки (частицы) в инерциальной системе отсчета (ИСО), то, применив преобразования Лоренца, мы можем получить соответствующий закон движения частицы в другой ИСО. Однако в общем случае такая задача решается только численными методами. Точного математического выражения закона движения частицы не получено. В статье данная задача решается с помощью фрактальных функций.

В статье используется релятивистская система единиц (релятивистское время), когда скорость света $c = 1$, и векторная форма преобразований Лоренца

$$t'(t) = \gamma_v[t - \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}(t)] \quad , \quad \text{где} \quad \gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \quad , \quad (1.1)$$

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) - \gamma_v \mathbf{v} t + \Gamma_v \mathbf{v} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}(t)] \quad , \quad \text{где} \quad \Gamma_v = \frac{\gamma_v - 1}{v^2} = \frac{\gamma_v^2}{\gamma_v + 1} \quad (1.2)$$

Фрактальные функции записываются в виде $\varphi = \underline{f + g(\quad)}$, где $(\quad)$ – пустые скобки обозначают место, в которое циклически подставляется все подчеркнутое выражение. В скобках, в общем случае, записывается аргумент функции g либо, в частном случае, множитель для g . Так фрактальная функция, развернутая на три шага имеет вид $\varphi = f + g(f + g(f + g(\underline{f + g(\quad)})))$.

*email: vgladkiy58@gmail.com ; МТС +375 29 859 23 39

Подчеркивание функции $\underline{\varphi}$ либо любой другой функции $\underline{F}$ аргументом которой является $\underline{\varphi}$ указывает на то, что это не обычная, а фрактальная функция. Подчеркивание может не применяться, если и так ясно, что записана фрактальная функция. Простейшими примерами фрактальных функций являются следующие: $\varphi_1 = \underline{a + b \cdot (\cdot)}$ и $\varphi_2 = \underline{a + b \cdot (\cdot) + c \cdot (\cdot)}$. Их суммы равны

$$\varphi_1 = \frac{a}{1-b} \quad , \quad \text{при} \quad |b| < 1 \quad , \quad \varphi_2 = \frac{a}{1-b-c} \quad , \quad \text{при} \quad |b+c| < 1$$

2 Релятивистское равномерное движение

Пусть система отсчета S' движется относительно системы S с постоянной скоростью $\mathbf{v}$. Уравнение движения частицы в системе S $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0 t$. Закон движения частицы в системе S'

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 + \frac{\gamma_v \mathbf{u}_0 - \Gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_0)} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0) + \frac{\mathbf{u}_0 - \gamma_v \mathbf{v} + \Gamma_v \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_0)}{\gamma_v (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_0)} t' \quad (2.1)$$

Правильность решения проверяется подстановкой в (2.1) прямого преобразования времени (1.1), в результате чего получаем уравнение прямого преобразования координат (1.2).

Введем обозначение

$$\mathbf{r}'_0 = \mathbf{r}_0 + \frac{\gamma_v \mathbf{u}_0 - \Gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_0)} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0) \quad , \quad \mathbf{u}'_0 = \frac{\mathbf{u}_0 - \gamma_v \mathbf{v} + \Gamma_v \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_0)}{\gamma_v (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_0)}$$

тогда уравнение движения частицы с величинами из системы S' принимает вид $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_0 + \mathbf{u}'_0 t'$. Введем следующие определения. Уравнение (2.1) называется *переходной формой закона движения частицы* в системе S' . *Стандартный вид закона движения частицы* должен включать начальное местоположение и начальную скорость из системы, в которой описывается движение частицы.

3 Общий случай релятивистского движения

3.1 Уравнение релятивистского движения без начальной скорости

В начальный момент времени точка находится в собственной системе отсчета $\mathbf{u}_0 = 0$. Скорость и ускорение частицы в системе S

$$\mathbf{u}_f = \frac{\mathbf{u}_w}{\sqrt{1 + u_w^2}} \quad , \quad \mathbf{a}_f = \frac{\dot{\mathbf{u}}_w}{(1 + u_w^2)^{3/2}} \quad , \quad \text{где} \quad \mathbf{u}_w = \frac{1}{M} \int \mathbf{F} dt$$

Уравнение движения

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \int \mathbf{u}_f dt = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_f(t) \quad , \quad \text{где} \quad \mathbf{r}_0 = \text{const} \quad , \quad \mathbf{r}_f = r_f(t) \mathbf{n} \quad (3.1)$$

Найдем закон движения частицы в системе S' , движущейся со скоростью $\mathbf{v}$ относительно системы S . Решением преобразований Лоренца является уравнение

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0) - \mathbf{v} t' + \left[\mathbf{n} - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \right] R_f \left(\frac{t'}{\gamma_v} + \underline{\varphi'} \right) \quad (3.2)$$

где $\underline{\varphi}' = \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{r}}_0 + \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{R}}_f \left(\frac{t'}{\gamma_v} + () \right)$, $\underline{\mathbf{R}}_f \left(\frac{t'}{\gamma_v} + () \right)$ – функция $\mathbf{r}_f(t)$ с новым аргументом.

Решение (3.2) проверяется подстановкой в него прямого преобразования времени (1.1). В результате получаем прямое преобразование координат (1.2).

Аналогично функции $\underline{\mathbf{R}}_f$ введем фрактальные величины $\underline{\mathbf{U}}_w$, $\underline{\mathbf{U}}_f$, $\underline{\mathbf{A}}_f$, получаемые из скоростей $\mathbf{u}_w$, $\mathbf{u}_f$ и ускорения $\mathbf{a}_f$ путем замены аргумента. Продифференцируем по времени выражение (3.2) и найдем скорость и ускорение частицы

$$\mathbf{u}' = \frac{\gamma_v \underline{\mathbf{U}}_f - \Gamma_v \underline{\mathbf{v}} (\underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{U}}_f)}{\gamma_v^2 (1 - \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{U}}_f)} - \underline{\mathbf{v}} \quad , \quad (u')^2 = 1 - \frac{(1 - v^2) (1 - \underline{U}_f^2)}{(1 - \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{U}}_f)} < 1$$

$$\mathbf{a}' = \frac{\gamma_v \underline{\mathbf{U}}_f - \Gamma_v \underline{\mathbf{v}}}{\gamma_v^3 (1 - \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{U}}_f)^3} (\underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{A}}_f) + \frac{\underline{\mathbf{A}}_f}{\gamma_v^2 (1 - \underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{A}}_f)^2}$$

В случае, когда $[\underline{\mathbf{v}} \times \underline{\mathbf{R}}_f] = 0$ выражение (3.2) принимает вид

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 - \frac{\gamma_v \underline{\mathbf{v}}}{\gamma_v + 1} (\underline{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{r}_0) - \underline{\mathbf{v}} t' + \frac{1}{\gamma_v} \underline{\mathbf{R}}_f \left(\frac{t'}{\gamma_v} + \underline{\varphi}' \right) \quad (3.3)$$

а когда $(\underline{\mathbf{v}} \cdot \underline{\mathbf{R}}_f) = 0$, то следующий

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 - \frac{\gamma_v \underline{\mathbf{v}}}{\gamma_v + 1} (\underline{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{r}_0) - \underline{\mathbf{v}} t' + \underline{\mathbf{R}}_f \left(\frac{t'}{\gamma_v} + \underline{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{r}_0 \right) \quad (3.4)$$

От векторной формы записи закона движения (3.2) можно перейти к координатной. При этом наиболее математически простые выражения получаются при переходе в прямолинейную ко-соугольную систему координат с осями $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ косинусы углов между которыми равны

$$\cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = -\gamma_{v_x} \gamma_{v_y} v_x v_y \quad , \quad \cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = -\gamma_{v_x} \gamma_{v_z} v_x v_z \quad , \quad \cos(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = -\gamma_{v_y} \gamma_{v_z} v_y v_z$$

$$\text{где } \gamma_{v_x} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_x^2}} \quad , \quad \gamma_{v_y} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_y^2}} \quad , \quad \gamma_{v_z} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_z^2}}$$

Матрица M1 задает переход от декартовых координат уравнения (3.2) к контравариантным координатам уравнения (3.6)

$$M1 = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_v}{\gamma_{v_x}} - \frac{\gamma_v^2 (v_y^2 + v_z^2)}{\gamma_{v_x} (\gamma_v + 1)} & \frac{\gamma_v^2 v_x v_y}{\gamma_{v_x} (\gamma_v + 1)} & \frac{\gamma_v^2 v_x v_z}{\gamma_{v_x} (\gamma_v + 1)} \\ \frac{\gamma_v^2 v_x v_y}{\gamma_{v_y} (\gamma_v + 1)} & \frac{\gamma_v}{\gamma_{v_y}} - \frac{\gamma_v^2 (v_x^2 + v_z^2)}{\gamma_{v_y} (\gamma_v + 1)} & \frac{\gamma_v^2 v_y v_z}{\gamma_{v_y} (\gamma_v + 1)} \\ \frac{\gamma_v^2 v_x v_z}{\gamma_{v_z} (\gamma_v + 1)} & \frac{\gamma_v^2 v_y v_z}{\gamma_{v_z} (\gamma_v + 1)} & \frac{\gamma_v}{\gamma_{v_z}} - \frac{\gamma_v^2 (v_x^2 + v_y^2)}{\gamma_{v_z} (\gamma_v + 1)} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' = & \left[x_0 - \gamma_v v_x t' + R_{f_x} \left(\frac{t'}{\gamma_v} + \underline{\varphi}' \right) \right] \frac{\mathbf{e}_1}{\gamma_{v_x}} + \left[y_0 - \gamma_v v_y t' + R_{f_y} \left(\frac{t'}{\gamma_v} + \underline{\varphi}' \right) \right] \frac{\mathbf{e}_2}{\gamma_{v_y}} + \\ & + \left[z_0 - \gamma_v v_z t' + R_{f_z} \left(\frac{t'}{\gamma_v} + \underline{\varphi}' \right) \right] \frac{\mathbf{e}_3}{\gamma_{v_z}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Матрица M2 задает переход от декартовых координат уравнения (3.2) к ковариантным координатам уравнения (3.8)

$$M2 = -\frac{1}{\gamma_v + 1} \begin{pmatrix} \gamma_{v_x}\gamma_v v_x^2 - \gamma_{v_x}(1 + \gamma_v) & \gamma_{v_x}\gamma_v v_x v_y & \gamma_{v_x}\gamma_v v_x v_z \\ \gamma_{v_y}\gamma_v v_x v_y & \gamma_{v_y}\gamma_v v_y^2 - \gamma_{v_y}(1 + \gamma_v) & \gamma_{v_y}\gamma_v v_y v_z \\ \gamma_{v_z}\gamma_v v_x v_z & \gamma_{v_z}\gamma_v v_y v_z & \gamma_{v_z}\gamma_v v_z^2 - \gamma_{v_z}(1 + \gamma_v) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$$\det M1 \cdot \det M2 = 1 \quad , \quad M1 \cdot M2^T = E$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' = & \gamma_{v_x} \left[x_0 - v_x \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0 - \frac{v_x}{\gamma_v} t' + R_{f_x} \left(\frac{t'}{\gamma_v} + \underline{\varphi}' \right) - v_x \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}_{f_x} \left(\frac{t'}{\gamma_v} + \underline{\varphi}' \right) \right] \mathbf{e}_1 + \\ & + \gamma_{v_y} \left[y_0 - v_y \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0 - \frac{v_y}{\gamma_v} t' + R_{f_y} \left(\frac{t'}{\gamma_v} + \underline{\varphi}' \right) - v_y \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}_{f_y} \left(\frac{t'}{\gamma_v} + \underline{\varphi}' \right) \right] \mathbf{e}_2 + \\ & + \gamma_{v_z} \left[z_0 - v_z \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0 - \frac{v_z}{\gamma_v} t' + R_{f_z} \left(\frac{t'}{\gamma_v} + \underline{\varphi}' \right) - v_z \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}_{f_z} \left(\frac{t'}{\gamma_v} + \underline{\varphi}' \right) \right] \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Рассмотрим частный случай закона движения (3.1) , когда $\mathbf{r}_f = \mathbf{u}_0 t$. Тогда закон движения в системе S' в соответствии с формулой (3.2) принимает вид

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0) - \mathbf{v} t' + \left[\mathbf{u}_0 - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_0) \right] \left(\frac{t'}{\gamma_v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_0 \cdot () \right)$$

Суммируя фактал получим формулу (2.1) .

Преобразуем переходное уравнение движения (3.2) к стандартному виду, то есть когда оно будет включать в себя начальное местоположение и начальную скорость из системы S' . Так как частица движется в системе S' с постоянной скоростью $\mathbf{u}'_0 = -\mathbf{v}$, то вторая, переменная, составляющая скорости уже не может быть любой. Ее значение ограничивается величиной и направлением скорости $\mathbf{u}'_0$. Следовательно, стандартный вид закона движения частицы не может иметь привычный вид $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_0 + \mathbf{u}'_0 t' + \mathbf{r}'_f(t')$. Стандартный вид закона движения частицы имеет вид $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_0 + \mathbf{u}'_0 t' + K(u'_0) R'_f(t') \mathbf{n}'$. Направление вектора $\mathbf{R}'_f$ задается ортом $\mathbf{n}'$

$$\mathbf{n}' = \gamma_{v_n} \left[\mathbf{n} - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \right] \quad , \quad \text{где} \quad \gamma_{v_n} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^2}} \quad (3.9)$$

Обратное преобразование ортов

$$\mathbf{n} = \frac{\gamma_{u'_{\perp n'}}}{\gamma_{u'}} [\mathbf{n}' + \Gamma_{u'} (\mathbf{u}'_0 \cdot \mathbf{n}') \mathbf{u}'_0] \quad , \quad \text{где} \quad \gamma_{u'_{\perp n'}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (u'_0)^2 + (\mathbf{u}'_0 \cdot \mathbf{n}')^2}} \quad (3.10)$$

С учетом соотношений

$$\underline{r}'_f = \frac{\gamma_{u'_{\perp n'}}}{\gamma_{u'}} \underline{R}_f \quad , \quad \mathbf{r}'_0 = \mathbf{r}_0 - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0) \quad , \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}_f = -\gamma_{u'_{\perp n'}} \underline{R}_f \mathbf{u}'_0 \cdot \mathbf{n}' \quad , \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0 = -\gamma_{u'} \mathbf{u}'_0 \cdot \mathbf{r}'_0$$

получим стандартную форму релятивистского закона движения частицы (штрихи опускаем)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0 t + \frac{\gamma_{u_{\perp n}}}{\gamma_u} R_f \left(\frac{t}{\gamma_u} - \underline{\varphi} \right) \mathbf{n} \quad , \quad \text{где} \quad \underline{\varphi} = \gamma_u \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{r}_0 + \gamma_{u_{\perp n}} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} R_f \left(\frac{t}{\gamma_u} - () \right) \quad (3.11)$$

где $R_f(t)$ – функция движения в начально-собственной системе S^* , движущейся со скоростью $\mathbf{u}_0$.

В случае, когда $[\mathbf{u}_0 \times \mathbf{n}] = 0$ выражение (3.11) принимает вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0 t + \frac{1}{\gamma_u} \mathbf{R}_f \left(\frac{t}{\gamma_u} - \underline{\varphi} \right) \quad , \quad \text{где} \quad \underline{\varphi} = \frac{\gamma_u \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{R}_f \left(\frac{t}{\gamma_u} - () \right)}{\gamma_u} \quad , \quad (3.12)$$

а когда $(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}) = 0$, то следующий

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0 t + \mathbf{R}_f \left(\frac{t}{\gamma_u} - \gamma_u \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{r}_0 \right) \quad (3.13)$$

В этих двух частных случаях (3.12) - (3.13) направление вектора $\mathbf{R}_f$ совпадает с его направлением в начально-собственной системе отсчета.

Дифференцируя (3.11) находим стандартный вид скорости и ускорения частицы

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \frac{\gamma_{u_{\perp n}} \underline{U}_f \mathbf{n}}{\gamma_u^2 (1 + \gamma_{u_{\perp n}} \underline{U}_f \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n})} \quad , \quad u^2 = 1 - \frac{(1 - u_0^2)(1 - \underline{U}_f^2)}{(1 + \gamma_{u_{\perp n}} \underline{U}_f \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n})^2} < 1 \quad \text{т.к.} \quad |\gamma_{u_{\perp n}} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}| \leq u_0$$

$$\mathbf{a} = \frac{\gamma_{u_{\perp n}} \underline{A}_f \mathbf{n}}{\gamma_u^3 (1 + \gamma_{u_{\perp n}} \underline{U}_f \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n})^3} \quad ,$$

где функции $\underline{U}_f, \underline{U}_w, \underline{A}_f$ - имеют аргумент $\left(\frac{t}{\gamma_u} - \underline{\varphi} \right)$.

3.2 Уравнение релятивистского движения с начальной скоростью

Для обозначения начальной скорости будем использовать символ $\mathbf{U}_b$. Скорость частицы в системе S

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_f + \mathbf{u}_g \quad , \quad \mathbf{u}_f = \frac{\mathbf{u}_w}{\sqrt{1 + (\mathbf{U}_b + \mathbf{u}_w)^2}} \quad , \quad \mathbf{u}_g = \frac{\mathbf{U}_b}{\sqrt{1 + (\mathbf{U}_b + \mathbf{u}_w)^2}} \quad , \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{u}_w}{u_w} \quad , \quad \mathbf{m} = \frac{\mathbf{U}_b}{U_b}$$

Уравнение движения частицы в системе S

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \int \frac{\mathbf{U}_b dt}{\sqrt{1 + (\mathbf{U}_b + \mathbf{u}_w)^2}} + \int \frac{\mathbf{u}_w dt}{\sqrt{1 + (\mathbf{U}_b + \mathbf{u}_w)^2}} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_g(t) + \mathbf{r}_f(t) \quad (3.14)$$

Выполнив переход в систему S' движущуюся со скоростью $\mathbf{v}$ относительно данной системы S , получим уравнение движения частицы в ней

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0) - \mathbf{v} t' + \left[\mathbf{m} - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{m}) \right] R_g \left(\frac{t'}{\gamma_v} + \underline{\varphi}' \right) +$$

$$+ \left[\mathbf{n} - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \right] R_f \left(\frac{t'}{\gamma_v} + \underline{\varphi}' \right) \quad (3.15)$$

$$\text{где} \quad \underline{\varphi}' = \frac{\mathbf{v} \mathbf{r}_0 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}_g \left(\frac{t'}{\gamma_v} + () \right) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}_f \left(\frac{t'}{\gamma_v} + () \right)}{\gamma_v} \quad ,$$

$$\mathbf{R}_g \left(\frac{t'}{\gamma_v} + \underline{\varphi}' \right) - \text{функция } \mathbf{r}_g(t) \text{ с новым аргументом.}$$

От векторной формы закона движения (3.15) можно перейти к координатной. С помощью матрицы M1 (3.5) получаются контравариантные координаты, а с помощью матрицы M2 (3.7) ковариантные координаты.

Преобразуем переходной закон движения частицы (3.15) к стандартному виду и запишем входящие в него символы без штрихов. Получим общее выражение для закона движения частицы в ИСО

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0 t + \frac{\gamma_{u_{\perp m}}}{\gamma_u} R_g \left(\frac{t}{\gamma_u} - \underline{\varphi} \right) \mathbf{m} + \frac{\gamma_{u_{\perp n}}}{\gamma_u} R_f \left(\frac{t}{\gamma_u} - \underline{\varphi} \right) \mathbf{n} \quad , \quad (3.16)$$

$$\text{где } \underline{\varphi} = \frac{\gamma_u \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{r}_0 + \gamma_{u_{\perp m}} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{m} R_g \left(\frac{t}{\gamma_u} - () \right) + \gamma_{u_{\perp n}} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} R_f \left(\frac{t}{\gamma_u} - () \right)}{1}$$

Направление векторов в системе S отличается от направления аналогичных векторов в начальной системе отсчета S^* (которая движется со скоростью $\mathbf{u}_0$). Если $\mathbf{n}$ – направление вектора в данной системе S , а $\mathbf{n}^*$ – направление в системе S^* , то уравнения связи для ортов имеют вид (3.9) - (3.10). Аналогичными уравнениями связаны единичные вектора $\mathbf{m}$ и $\mathbf{m}^*$.

4 Релятивистское равноускоренное движение

Дифференциальное уравнение для релятивистского движения в постоянном электрическом поле имеет вид

$$M \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{u}_f}{\sqrt{1 - u_f^2}} = q \mathbf{E}_0 \quad , \quad \mathbf{E}_0 = const$$

4.1 Решение при нулевой начальной скорости

Скорость и ускорение движения частицы в системе S

$$\mathbf{u}_f = \frac{\mathbf{W} t}{\sqrt{1 + W^2 t^2}} \quad , \quad \mathbf{a}_f = \frac{\mathbf{W}}{(1 + W^2 t^2)^{3/2}} \quad , \quad \text{где } \mathbf{W} = \frac{q}{M} \mathbf{E}_0$$

Уравнение движения частицы в системе S

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{n}}{W} \left(\sqrt{1 + W^2 t^2} - 1 \right) \quad , \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{W}}{W}$$

Перейдем в систему S' , движущуюся относительно S со скоростью $\mathbf{v}$. Переходная форма закона движения частицы в системе S' получена в параграфе 3. Поэтому используя формулу (3.2), запишем

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0) - \mathbf{v} t' + \frac{1}{W} \left[\mathbf{n} - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \right] \left[\sqrt{1 + W^2 (\gamma_v^{-1} t' + \underline{\varphi})^2} - 1 \right] \quad (4.1)$$

$$\text{где } \underline{\varphi}' = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{W} \left[\sqrt{1 + W^2 (\gamma_v^{-1} t' + ())^2} - 1 \right]}{1}$$

Запишем стандартную форму закона релятивистского равноускоренного движения частицы, используя общую формулу (3.11)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0 t + \frac{\gamma_{u_{\perp n}}}{\gamma_u W} \left[\sqrt{1 + W^2 (\gamma_u^{-1} t - \underline{\varphi})^2} - 1 \right] \quad (4.2)$$

$$\text{где } \underline{\varphi} = \gamma_u \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{r}_0 + \gamma_{u_{\perp n}} \frac{\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}}{W} \left[\sqrt{1 + W^2 (\gamma_u^{-1} t - ())} - 1 \right]$$

Фрактал квадратного корня суммируется к выражению в элементарных функциях

$$\sqrt{1 + (at + b + c \cdot ())^2} - 1 = \frac{1}{1 - c^2} \left[bc + act + \sqrt{1 - c^2 + (at + b - c)^2} - 1 \right]$$

Выполняя суммирование фракталов, запишем полученные выше законы равноускоренного движения частицы в обычном виде. Переходная форма закона равноускоренного движения частицы (4.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0) + \gamma_v (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}') \mathbf{n}' - [\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}') \mathbf{n}'] t' + \\ + \frac{\mathbf{n}'}{W} \left[\sqrt{1 + \gamma_{v_n}^2 (\gamma_v^{-1} W t' + W \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^2} - \gamma_{v_n} \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $\mathbf{n}'$ находится по формуле (3.9) .

Просуммируем фрактал в уравнении движения (4.2) и получим следующее выражение

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \gamma_u^2 (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{r}_0) (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + [\mathbf{u}_0 - (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}] t + \\ + \frac{\mathbf{n}}{W} \left[\sqrt{1 + (\gamma_{u_{\perp n}}^{-1} W t - \gamma_{u_{\perp n}}^{-1} \gamma_u^2 W \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{r}_0 + \gamma_u \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n})^2} - \frac{\gamma_u}{\gamma_{u_{\perp n}}} \right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

Введем обозначение $\mathbf{r}_0^*$ для начального местоположения частицы, которое равно

$\mathbf{r}_0^* = \mathbf{r}_0 + \gamma_u^2 (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{r}_0) (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$. Заменим в (4.4) вектор $\mathbf{r}_0$ на $\mathbf{r}_0^*$ и отбросив звездочки получим стандартную форму закона движения частицы

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + [\mathbf{u}_0 - (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}] t + \frac{\mathbf{n}}{W} \left[\sqrt{1 + (\gamma_{u_{\perp n}}^{-1} W t - \gamma_{u_{\perp n}} W \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{r}_0 + \gamma_u \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n})^2} - \frac{\gamma_u}{\gamma_{u_{\perp n}}} \right] \quad (4.5)$$

Скорость и ускорение частицы

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 - (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} + \frac{(\gamma_{u_{\perp n}}^{-1} W t - \gamma_{u_{\perp n}} W \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{r}_0 + \gamma_u \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}}{\gamma_{u_{\perp n}}^2 \sqrt{1 + (\gamma_{u_{\perp n}}^{-1} W t - \gamma_{u_{\perp n}} W \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{r}_0 + \gamma_u \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n})^2}} \\ u^2 = 1 - \frac{1}{\gamma_{u_{\perp n}}^2 \left[1 + (\gamma_{u_{\perp n}}^{-1} W t - \gamma_{u_{\perp n}} W \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{r}_0 + \gamma_u \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n})^2 \right]} < 1 \\ \mathbf{a} = \frac{W \mathbf{n}}{\gamma_{u_{\perp n}}^2 \left[1 + (\gamma_{u_{\perp n}}^{-1} W t - \gamma_{u_{\perp n}} W \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{r}_0 + \gamma_u \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n})^2 \right]^{3/2}} \end{aligned}$$

При условии $[\mathbf{u}_0 \times \mathbf{n}] = 0$ выражение (4.5) принимает вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{n}}{W} \left[\sqrt{1 + (W t - W \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{r}_0 + \gamma_u \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n})^2} - \gamma_u \right]$$

а когда $(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}) = 0$ следующий

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0 t + \frac{\mathbf{n}}{W} \left[\sqrt{1 + W^2 (\gamma_u^{-1} t - \gamma_u \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{r}_0)^2} - 1 \right]$$

Для равноускоренного движения функциональная зависимость от времени уменьшается на коэффициент $1/\gamma_{u_{\perp n}}$, то есть замедление зависит только от составляющей начальной скорости

перпендикулярной к направлению ускоренного движения. Перпендикулярная к вектору $\mathbf{n}$ составляющая скорости частицы остается постоянной во времени, в то время как продольная составляющая изменяется. В уравнении (4.5) продольная составляющая начальной скорости $(\mathbf{u}_0 \mathbf{n}) \mathbf{n}$ оказывается включенной в подкоренное выражение описывающее равноускоренное движение. Это легко показать, если взять предел от этой функции при $W \rightarrow 0$

$$\lim_{W \rightarrow 0} \frac{\mathbf{n}}{W} \left[\sqrt{1 + (\gamma_{u_{\perp n}}^{-1} W t - \gamma_{u_{\perp n}} W \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{r}_0 + \gamma_u \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n})^2} - \frac{\gamma_u}{\gamma_{u_{\perp n}}} \right] = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} t - \gamma_{u_{\perp n}}^2 (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{r}_0) \mathbf{n}$$

либо если перейти в начально-собственную систему S' , то есть в систему, которая движется относительно данной со скоростью $\mathbf{u}_0$, а не со скоростью $[\mathbf{u}_0 - (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}]$, как может показаться из уравнения (4.5). Закон движения частицы в системе S' имеет вид

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 + \gamma_{u_{\perp n}}^2 (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{r}_0) \left[\frac{\mathbf{u}_0}{\gamma_u + 1} - (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \right] + \frac{\gamma_{u_{\perp n}}}{\gamma_u W} [\mathbf{n} + \Gamma_u \mathbf{u}_0 (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n})] \left[\sqrt{1 + (W t')^2} - 1 \right]$$

4.2 Решение при не нулевой начальной скорости

Для обозначения начальной скорости используем символ $\mathbf{U}_b$. Скорость и закон движения частицы в системе S

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{U}_b + \mathbf{W} t}{\sqrt{1 + (\mathbf{U}_b + \mathbf{W} t)^2}}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{n}}{\gamma_{b_n} W} \left[\sqrt{1 + (\gamma_{b_n} W t + \gamma_{b_n} \mathbf{U}_b \cdot \mathbf{n})^2} - \gamma_{b_n} \gamma_b \right] + \frac{1}{W} [\mathbf{U}_b - (\mathbf{U}_b \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}] \text{ash}(\gamma_{b_n} W t + \gamma_{b_n} \mathbf{U}_b \cdot \mathbf{n}) \quad (4.6)$$

$$\text{где } n = \frac{W}{W} \quad , \quad \gamma_{b_n} = \frac{1}{\sqrt{1 + U_b^2 - (\mathbf{U}_b \cdot \mathbf{n})^2}} \quad , \quad \gamma_b = \sqrt{1 + U_b^2}$$

Выполним переход в систему S' движущуюся со скоростью $\mathbf{v}$ относительно данной системы S . Получим уравнение движения частицы в системе S'

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0) - \mathbf{v} t' + \frac{1}{W} \left[\mathbf{U}_{b_{\perp n}} - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{U}_{b_{\perp n}}) \right] \text{ash} \left(\frac{\gamma_{b_n}}{\gamma_v} W t' + \gamma_{b_n} \mathbf{U}_b \cdot \mathbf{n} + \underline{\varphi}' \right) + \frac{1}{\gamma_{b_n} W} \left[\mathbf{n} - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \right] \left[\sqrt{1 + (\gamma_v^{-1} \gamma_{b_n} W t' + \gamma_{b_n} \mathbf{U}_b \cdot \mathbf{n} + \underline{\varphi}')^2} - \gamma_b \gamma_{b_n} \right] \quad (4.7)$$

$$\text{где } \underline{\varphi}' = \gamma_{b_n} W \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \left[\sqrt{1 + (\gamma_v^{-1} \gamma_{b_n} W t' + \gamma_{b_n} \mathbf{U}_b \cdot \mathbf{n} + ())^2} - \gamma_b \gamma_{b_n} \right] + \gamma_{b_n} \mathbf{v} \cdot \mathbf{U}_{b_{\perp n}} \text{ash}(\gamma_v^{-1} \gamma_{b_n} W t' + \gamma_{b_n} \mathbf{U}_b \cdot \mathbf{n} + ()) \quad , \quad \mathbf{U}_{b_{\perp n}} = \mathbf{U}_b - (\mathbf{U}_b \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$$

Скорость и ускорение частицы

$$\mathbf{u}' = \frac{\gamma_v \underline{\mathbf{U}} - \Gamma_v \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \underline{\mathbf{U}})}{\gamma_v^2 (1 - \mathbf{v} \cdot \underline{\mathbf{U}})} - \mathbf{v} \quad , \quad \text{где } \underline{\mathbf{U}} = \frac{\gamma_{b_n} \mathbf{U}_b + (\gamma_v^{-1} \gamma_{b_n} W t' + \underline{\varphi}') \mathbf{n}}{\left[1 + (\gamma_v^{-1} \gamma_{b_n} W t' + \gamma_{b_n} \mathbf{U}_b \cdot \mathbf{n} + \underline{\varphi}')^2 \right]^{1/2}}$$

$$\mathbf{a}' = \frac{\gamma_v \underline{\mathbf{U}} - \Gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v^3 (1 - \mathbf{v} \cdot \underline{\mathbf{U}})^3} (\mathbf{v} \cdot \underline{\mathbf{A}}) + \frac{\underline{\mathbf{A}}}{\gamma_v^2 (1 - \mathbf{v} \cdot \underline{\mathbf{A}})^2}$$

$$\text{где } \underline{\mathbf{A}} = \frac{\gamma_{b_n} \mathbf{W} - \gamma_{b_n}^2 W (\gamma_v^{-1} \gamma_{b_n} W t' + \gamma_{b_n} \mathbf{U}_b \cdot \mathbf{n} + \underline{\varphi}') \mathbf{U}_{b_{\perp n}}}{\left[1 + (\gamma_v^{-1} \gamma_{b_n} W t' + \gamma_{b_n} \mathbf{U}_b \cdot \mathbf{n} + \underline{\varphi}')^2\right]^{3/2}}$$

При условии, что $[\mathbf{U}_b \times \mathbf{n}] = 0$ закон движения в системе S (4.6) преобразуется к виду

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{\mathbf{n}}{W} \left[\sqrt{1 + (Wt + U_b)^2} - \gamma_b \right]$$

а в системе S' закон движения (4.7) имеет вид

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0) - \mathbf{v} t' + \frac{1}{W} \left[\mathbf{n} - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \right] \left[\sqrt{1 + (\gamma_v^{-1} W t' + U_b + \underline{\varphi}')^2} - \gamma_b \right]$$

$$\text{где } \underline{\varphi}' = \frac{W \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \left[\sqrt{1 + (\gamma_v^{-1} W t' + U_b + ())^2} - \gamma_b \right]}{}$$

При условии $(\mathbf{U}_b \cdot \mathbf{n}) = 0$ закон движения в системе S (4.6) равен

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{\gamma_b \mathbf{n}}{W} \left[\sqrt{1 + (\gamma_b^{-1} W t)^2} - 1 \right]$$

а в системе S' закон движения (4.7) имеет вид

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0) - \mathbf{v} t' + \frac{\gamma_b}{W} \left[\mathbf{n} - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \right] \left[\sqrt{1 + (\gamma_v^{-1} \gamma_b^{-1} W t' + \underline{\varphi}')^2} - 1 \right] +$$

$$+ \frac{1}{W} \left[\mathbf{U}_b - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{U}_b) \right] \text{ash}(\gamma_v^{-1} \gamma_b^{-1} W t' + \underline{\varphi}') \quad ,$$

$$\text{где } \underline{\varphi}' = \frac{W \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \left[\sqrt{1 + (\gamma_v^{-1} \gamma_b^{-1} W t' + ())^2} - 1 \right] + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{U}_b}{\gamma_b} \text{ash}(\gamma_v^{-1} \gamma_b^{-1} W t' + ())}{}$$

Преобразуем переходную форму закона движения частицы (4.7) в стандартную, величины которой записываем без штрихов.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0 t + \frac{\gamma_{u_{\perp n}} \mathbf{n}}{\gamma_{b_n^*} \gamma_u W} \left[\sqrt{1 + (\gamma_u^{-1} \gamma_{b_n^*} W t + \gamma_{b_n^*} \mathbf{U}_b \cdot \mathbf{n}^* - \underline{\varphi})^2} - \gamma_b \gamma_{b_n^*} \right] +$$

$$+ \frac{1}{\gamma_u W} [\gamma_{u_{\perp m}} U_b \mathbf{m} - \gamma_{u_{\perp n}} (\mathbf{U}_b \cdot \mathbf{n}^*) \mathbf{n}] \text{ash}(\gamma_u^{-1} \gamma_{b_n^*} W t + \gamma_{b_n^*} \mathbf{U}_b \cdot \mathbf{n}^* - \underline{\varphi}) \quad (4.8)$$

$$\text{где } \underline{\varphi} = \frac{\gamma_{b_n^*} \gamma_u W \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{r}_0 + \gamma_{u_{\perp n}} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} \left[\sqrt{1 + (\gamma_u^{-1} \gamma_{b_n^*} W t + \gamma_{b_n^*} \mathbf{U}_b \cdot \mathbf{n}^* - ())^2} - \gamma_b \gamma_{b_n^*} \right] +}{}$$

$$+ \gamma_{b_n^*} [\gamma_{u_{\perp m}} U_b \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{m} - \gamma_{u_{\perp n}} (\mathbf{U}_b \cdot \mathbf{n}^*) \mathbf{n}] \text{ash}(\gamma_u^{-1} \gamma_{b_n^*} W t + \gamma_{b_n^*} \mathbf{U}_b \cdot \mathbf{n}^* - ())$$

$$\gamma_{b_n^*} = \frac{1}{\sqrt{1 + U_b^2 - (\mathbf{U}_b \cdot \mathbf{n}^*)^2}} \quad , \quad \mathbf{U}_b \quad , \quad \mathbf{n}^* - \text{величины из начальной системы } S^*.$$

5 Релятивистское периодическое движение

Дифференциальное уравнение для релятивистского эллипсоидального вращения имеет вид

$$M \frac{d}{dt} \frac{\mathbf{u}_f}{\sqrt{1 - u_f^2}} = q \mathbf{E}_1 \cos \omega t + q \mathbf{E}_2 \sin \omega t \quad , \quad (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) = 0 \quad , \quad |\mathbf{E}_1| \neq |\mathbf{E}_2|$$

Скорость и ускорение частицы в системе S при $\mathbf{u}_0 = 0$

$$\mathbf{u}_f = \frac{\mathbf{U}_1 \sin \omega t - \mathbf{U}_2 \cos \omega t}{\sqrt{1 + (U_1 \sin \omega t)^2 + (U_2 \cos \omega t)^2}} \quad , \quad \text{где} \quad \mathbf{U}_1 = \frac{q}{M\omega} \mathbf{E}_1 \quad , \quad \mathbf{U}_2 = \frac{q}{M\omega} \mathbf{E}_2$$

$$\mathbf{a}_f = \frac{\mathbf{U}_1 \omega (1 + U_2^2) \cos \omega t + \mathbf{U}_2 \omega (1 + U_1^2) \sin \omega t}{[1 + (U_1 \sin \omega t)^2 + (U_2 \cos \omega t)^2]^{3/2}}$$

Уравнение движения частицы в системе S

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 - \frac{\mathbf{U}_1}{\omega U_{12}} \arcsin \left(\frac{U_{12}}{\sqrt{1 + U_1^2}} \cos \omega t \right) - \frac{\mathbf{U}_2}{\omega U_{21}} \arcsin \left(\frac{U_{21}}{\sqrt{1 + U_2^2}} \sin \omega t \right)$$

где $U_{12} = \sqrt{U_1^2 - U_2^2} \quad , \quad U_{21} = \sqrt{U_2^2 - U_1^2} \quad , \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{U}_1}{U_1} \quad , \quad \mathbf{m} = \frac{\mathbf{U}_2}{U_2}$

Используя формулу (3.2), запишем переходную форму закона релятивистского вращения и равномерного перемещения

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0) - \mathbf{v} t' - \frac{U_1}{\omega U_{12}} \left[\mathbf{n} - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \right] \arcsin \left[\frac{U_{12}}{\sqrt{1 + U_1^2}} \cos \left(\frac{\omega t'}{\gamma_v} + \underline{\varphi}' \right) \right] -$$

$$- \frac{U_2}{\omega U_{21}} \left[\mathbf{m} - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{m}) \right] \arcsin \left[\frac{U_{21}}{\sqrt{1 + U_2^2}} \sin \left(\frac{\omega t'}{\gamma_v} + \underline{\varphi}' \right) \right] \quad (5.1)$$

$$\text{где} \quad \underline{\varphi}' = \omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0 - \frac{U_1}{\omega U_{12}} \arcsin \left[\frac{U_{12}}{\sqrt{1 + U_1^2}} \cos \left(\frac{\omega t'}{\gamma_v} + () \right) \right] -$$

$$- \frac{U_2}{\omega U_{21}} \arcsin \left[\frac{U_{21}}{\sqrt{1 + U_2^2}} \sin \left(\frac{\omega t'}{\gamma_v} + () \right) \right]$$

Используя формулу (3.11) , запишем закон релятивистского вращения в стандартном виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0 t - \frac{\gamma_{u \perp n} U_1 \mathbf{n}}{\gamma_u \omega U_{12}} \arcsin \left[\frac{U_{12}}{\sqrt{1 + U_1^2}} \cos \left(\frac{\omega t}{\gamma_u} - \underline{\varphi} \right) \right] -$$

$$- \frac{\gamma_{u \perp m} U_2 \mathbf{m}}{\gamma_u \omega U_{21}} \arcsin \left[\frac{U_{21}}{\sqrt{1 + U_2^2}} \sin \left(\frac{\omega t}{\gamma_u} - \underline{\varphi} \right) \right] \quad (5.2)$$

$$\text{где} \quad \underline{\varphi} = \gamma_u \omega \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{r}_0 - \gamma_{u \perp n} \frac{U_1}{U_{12}} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} \arcsin \left[\frac{U_{12}}{\sqrt{1 + U_1^2}} \cos \left(\frac{\omega t}{\gamma_u} - () \right) \right] -$$

$$- \gamma_{u \perp m} \frac{U_2}{U_{21}} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{m} \arcsin \left[\frac{U_{21}}{\sqrt{1 + U_2^2}} \sin \left(\frac{\omega t}{\gamma_u} - () \right) \right]$$

Для векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ из (5.2) выполняется соотношение: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} + \gamma_u^2 (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n})(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{m}) = 0$. Скорость частицы

$$\mathbf{u} = \frac{\underline{\mathbf{U}}_f}{\gamma_u^2 (1 + \mathbf{u}_0 \cdot \underline{\mathbf{U}}_f)} + \mathbf{u}_0 \quad , \quad u^2 = 1 - \frac{1 - \gamma_u^{-2} U_f^2 - (\mathbf{u}_0 \cdot \underline{\mathbf{U}}_f)^2}{\gamma_u^2 (1 + \mathbf{u}_0 \cdot \underline{\mathbf{U}}_f)^2} < 1$$

$$\text{где } \underline{\mathbf{U}}_f = \frac{\gamma_{u_{\perp n}} U_1 \sin(\gamma_u^{-1} \omega t - \varphi) \mathbf{n} - \gamma_{u_{\perp m}} U_2 \cos(\gamma_u^{-1} \omega t - \varphi) \mathbf{m}}{\sqrt{1 + [U_1 \sin(\gamma_u^{-1} \omega t - \varphi)]^2 + [U_2 \cos(\gamma_u^{-1} \omega t - \varphi)]^2}}$$

Ускорение частицы

$$\mathbf{a} = \frac{\underline{\mathbf{A}}_f}{\gamma_u^3 (1 + \mathbf{u}_0 \cdot \underline{\mathbf{U}}_f)^2} - \frac{\underline{\mathbf{U}}_f (\mathbf{u}_0 \cdot \underline{\mathbf{A}}_f)}{\gamma_u^3 (1 + \mathbf{u}_0 \cdot \underline{\mathbf{U}}_f)^3}$$

$$\text{где } \underline{\mathbf{A}}_f = \frac{\gamma_{u_{\perp n}} \omega U_1 (1 + U_2^2) \cos(\gamma_u^{-1} \omega t - \varphi) \mathbf{n} + \gamma_{u_{\perp m}} \omega U_2 (1 + U_1^2) \sin(\gamma_u^{-1} \omega t - \varphi) \mathbf{m}}{\left\{ 1 + [U_1 \sin(\gamma_u^{-1} \omega t - \varphi)]^2 + [U_2 \cos(\gamma_u^{-1} \omega t - \varphi)]^2 \right\}^{3/2}}$$

В уравнение (5.2) время входит с замедляющим коэффициентом $1/\gamma_u$. Фрактивная фаза φ состоит из постоянной и периодической части. Последняя не превышает по модулю значение $\arcsin(0.5)$ и не влияет на величину основного периода колебаний, а приводит к искажению формы и появления бесконечного числа высших гармоник.

Релятивистский закон вращения частицы (5.2) можно преобразовать к виду с взаимно перпендикулярными векторами $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}_{\perp}$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0 t - \frac{\gamma_{u_{\perp n}} U_1 \mathbf{n}}{\gamma_u \omega U_{12}} \arcsin \left[\frac{U_{12}}{\sqrt{1 + U_1^2}} \cos \left(\frac{\omega t}{\gamma_u} - \varphi \right) \right] -$$

$$- \frac{\gamma_{u_{\perp m}} U_2}{\gamma_u \omega U_{21}} \{ (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \mathbf{m}]] \} \arcsin \left[\frac{U_{21}}{\sqrt{1 + U_2^2}} \sin \left(\frac{\omega t'}{\gamma_u} - \varphi \right) \right] \quad (5.3)$$

В случае $(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}) = u_0$ и $(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}_{\perp}) = 0$ закон движения (5.3) принимает вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0 t - \frac{U_1 \mathbf{n}}{\gamma_u \omega U_{12}} \arcsin \left[\frac{U_{12}}{\sqrt{1 + U_1^2}} \cos \left(\frac{\omega t}{\gamma_u} - \varphi \right) \right] -$$

$$- \frac{U_2 \mathbf{n}_{\perp}}{\omega U_{21}} \arcsin \left[\frac{U_{21}}{\sqrt{1 + U_2^2}} \sin \left(\frac{\omega t}{\gamma_u} - \varphi \right) \right] \quad (5.4)$$

$$\text{где } \varphi = \gamma_u \omega \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{r}_0 - \frac{u_0 U_1}{U_{12}} \arcsin \left[\frac{U_{12}}{\sqrt{1 + U_1^2}} \cos \left(\frac{\omega t}{\gamma_u} - \varphi \right) \right]$$

То есть амплитуда колебаний частицы вдоль направления скорости $\mathbf{u}_0$ уменьшается на коэффициент $1/\gamma_u$.

В случае кругового вращения переходный закон движения (5.1) принимает вид

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0) - \mathbf{v} t' - \frac{U_w}{\omega \sqrt{1 + U_w^2}} \left[\mathbf{n} - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \right] \cos \left(\frac{\omega t'}{\gamma_v} + \varphi' \right) -$$

$$- \frac{U_w}{\omega \sqrt{1 + U_w^2}} \left[\mathbf{m} - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{m}) \right] \sin \left(\frac{\omega t'}{\gamma_v} + \varphi' \right)$$

$$\text{где } \underline{\varphi}' = \omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0 - \frac{U_w \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{\sqrt{1 + U_w^2}} \cos\left(\frac{\omega t'}{\gamma_v} + ()\right) - \frac{U_w \mathbf{v} \cdot \mathbf{m}}{\sqrt{1 + U_w^2}} \sin\left(\frac{\omega t'}{\gamma_v} + ()\right)$$

Стандартная форма закона релятивистского кругового вращения и равномерного перемещения

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0 t - \frac{\gamma_{u_{\perp n}} U_w \mathbf{n}}{\gamma_u \omega \sqrt{1 + U_w^2}} \cos\left(\frac{\omega t}{\gamma_u} - \underline{\varphi}\right) - \frac{\gamma_{u_{\perp m}} U_w \mathbf{m}}{\gamma_u \omega \sqrt{1 + U_w^2}} \sin\left(\frac{\omega t}{\gamma_u} - \underline{\varphi}\right)$$

$$\text{где } \underline{\varphi} = \gamma_u \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{r}_0 - \frac{\gamma_{u_{\perp n}} U_w}{\sqrt{1 + U_w^2}} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} \cos\left(\frac{\omega t}{\gamma_u} - ()\right) - \frac{\gamma_{u_{\perp m}} U_w}{\sqrt{1 + U_w^2}} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{m} \sin\left(\frac{\omega t}{\gamma_u} - ()\right)$$

6 Преобразование векторов при переходе в новую систему отсчета

Пусть закон движения частицы в системе S имеет вид (3.1) или (3.16). Импульс $\mathbf{p}$ и энергия E_e в системе S равны

$$\mathbf{p}(t) = M(\mathbf{u}_w + \mathbf{U}_b) = \mathbf{p}_w + \mathbf{p}_b, \quad E_e(t) = M\sqrt{1 + (\mathbf{u}_w + \mathbf{U}_b)^2}$$

Введем вспомогательные величины для всех величин из системы S , изменяющихся во времени, путем замены в них времени t на фрактальное выражение от времени t'

$$t \longrightarrow (\gamma_v^{-1} t' + \underline{\varphi}') \quad (6.1)$$

Найдем формулы для импульса, энергии, силы в системе S' , включающие вспомогательные величины. Используя обозначения $\underline{\mathbf{p}} = \underline{\mathbf{p}}_w + \underline{\mathbf{p}}_b = \underline{p}_w \mathbf{n} + \underline{p}_b \mathbf{m}$, где $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ - вектора из системы S , получим

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{p}}'(t') &= \underline{\mathbf{p}} + \Gamma_v \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \underline{\mathbf{p}}) - \gamma_v \underline{E}_e \mathbf{v}, \quad \underline{E}'_e(t') = \gamma_v (\underline{E}_e - \mathbf{v} \cdot \underline{\mathbf{p}}) \\ \underline{\mathbf{F}}'(t') &= \frac{\underline{\mathbf{F}} - \gamma_v [\underline{\mathbf{F}} \cdot (\underline{\mathbf{U}}_f + \underline{\mathbf{U}}_g)] \mathbf{v} + \Gamma_v \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \underline{\mathbf{F}})}{\gamma_v (1 - \mathbf{v} \cdot \underline{\mathbf{U}}_f - \mathbf{v} \cdot \underline{\mathbf{U}}_g)} = \gamma_v \underline{\mathbf{F}} - \Gamma_v \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \underline{\mathbf{F}}) - \gamma_v [\underline{\mathbf{u}}' \times [\mathbf{v} \times \underline{\mathbf{F}}]] \\ \underline{\mathbf{E}}'(t') &= \gamma_v \underline{\mathbf{E}} - \Gamma_v \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \underline{\mathbf{E}}) + \gamma_v [\mathbf{v} \times \underline{\mathbf{H}}], \quad \underline{\mathbf{H}}'(t') = \gamma_v \underline{\mathbf{H}} - \Gamma_v \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \underline{\mathbf{H}}) - \gamma_v [\mathbf{v} \times \underline{\mathbf{E}}] \end{aligned}$$

где $\underline{\mathbf{E}}$ и $\underline{\mathbf{H}}$ - напряженности электрического и магнитного полей с фрактальным аргументом (6.1)

Возьмем в качестве единичных вектора $\mathbf{n}'$ и $\mathbf{m}'$ из системы S' (3.9). Тогда используя обозначения $\underline{\mathbf{p}}_n$ и $\underline{\mathbf{U}}_n$ получим

$$\underline{\mathbf{p}}_n = \gamma_{v_{\perp n'}} \underline{p}_w \mathbf{n}' + \gamma_{v_{\perp m'}} \underline{p}_b \mathbf{m}', \quad \underline{\mathbf{U}}_n = \frac{\gamma_{v_{\perp n'}} \underline{U}_w \mathbf{n}' + \gamma_{v_{\perp m'}} \underline{U}_b \mathbf{m}'}{\sqrt{1 + (\underline{U}_w \mathbf{n} + \underline{U}_b \mathbf{m})^2}}$$

$$\underline{\mathbf{p}}'(t') = \gamma_v \left\{ \underline{\mathbf{p}}_n + [\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times \underline{\mathbf{p}}_n]] - \underline{E}_e \mathbf{v} \right\}, \quad \underline{E}'_e(t') = \gamma_v (\underline{E}_e - \mathbf{v} \cdot \underline{\mathbf{p}}_n)$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{F}}'(t') &= \gamma_{v_{\perp n'}} \underline{F} \{ \mathbf{n}' - [\underline{\mathbf{u}}' \times [\mathbf{v} \times \mathbf{n}']] \} = \\ &= \frac{\gamma_{v_{\perp n'}} \underline{F}}{1 - \mathbf{v} \cdot \underline{\mathbf{U}}_n} \{ \mathbf{n}' + [\mathbf{v} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{n}']] - (\underline{\mathbf{U}}_n \cdot \mathbf{n}') \mathbf{v} - \{ [\underline{\mathbf{U}}_n \times \mathbf{v}] \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{n}'] \} \mathbf{v} \} \end{aligned}$$

$$\underline{\mathbf{E}}'(t') = \gamma_{v_{\perp n'}} \underline{E} \mathbf{n}' + \gamma_{v_{\perp m'}} \underline{H} [\mathbf{v} \times \mathbf{m}'], \quad \underline{\mathbf{H}}'(t') = \gamma_{v_{\perp m'}} \underline{H} \mathbf{m}' + \gamma_{v_{\perp n'}} \underline{E} [\mathbf{v} \times \mathbf{n}']$$

7 Преобразование сил при равномерном движении

Пусть в системе отсчета S частицы 1 и 2 движутся равномерно: $\mathbf{R}_1 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{u}_1 t$, $\mathbf{R}_2 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{u}_2 t$. Расстояние между частицами $\mathbf{R}_{21} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$. Система S' движется относительно системы S со скоростью $\mathbf{v}$. Закон движения частицы 1 в системе S'

$$\mathbf{R}'_1 = \mathbf{r}_1 + \frac{\gamma_v \mathbf{u}_1 - \Gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_1) + \mathbf{u}'_1 t' \quad , \quad \mathbf{u}'_1 = \frac{\mathbf{u}_1 - \gamma_v \mathbf{v} + \Gamma_v \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)}{\gamma_v (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)} \quad (7.1)$$

Закон движения частицы 2 в системе S' задается аналогичным уравнением. Сила действия частицы 2 на частицу 1 в системе S равна

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{\alpha (1 - u_2^2)}{[R_{21}^2 (1 - u_2^2) + (\mathbf{R}_{21} \cdot \mathbf{u}_2)^2]^{3/2}} \{ \mathbf{R}_{21} + [\mathbf{u}_1 \times [\mathbf{u}_2 \times \mathbf{R}_{21}]] \} \quad (7.2)$$

где α - зарядовый коэффициент.

В момент времени t на частицу 1 действует сила $\mathbf{F}_{21}$ (событие А), а на частицу 2 действует сила $\mathbf{F}_{12}$ (событие В). В системе S' событие А происходит в момент времени $t'_1 = \gamma_v [t - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r}_1 + \mathbf{u}_1 t)]$, когда расстояние между частицами

$$\mathbf{R}'_{21} = \mathbf{R}'_1(t'_1) - \mathbf{R}'_2(t'_1) = \mathbf{R}_{21} + \frac{\gamma_v \mathbf{u}_2 - \Gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2)} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}_{21})$$

Аналогично, событие В происходит в момент времени t'_2 , когда расстояние между частицами $\mathbf{R}'_{12}(t'_2)$. Найдем закон действия частицы 2 на частицу 1 в системе S' . Выразим величины из системы S через величины из системы S'

$$\mathbf{R}_{21} = \mathbf{R}'_{21} - \frac{\gamma_v \mathbf{u}'_2 + \Gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v (1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'_2)} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}'_{21}) \quad , \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{u}'_2 + \gamma_v \mathbf{v} + \Gamma_v \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'_2)}{\gamma_v (1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'_2)} \quad ,$$

$$R_{21}^2 = (R'_{21})^2 - \frac{2\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}'_{21}}{1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'_2} (\mathbf{u}'_2 \cdot \mathbf{R}'_{21}) - \frac{1 - (u'_2)^2}{(1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'_2)^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}'_{21})^2 \quad , \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}_{21} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}'_{21}}{\gamma_v (1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'_2)}$$

и подставим их в преобразования Лоренца для силы $\mathbf{F}'_{21}$ (7.3)

$$\mathbf{F}'_{21} = \frac{\mathbf{F}_{21} - \gamma_v \mathbf{v} (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{F}_{21}) + \Gamma_v \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_{21})}{\gamma_v (1 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)} \quad (7.3)$$

В результате получим уравнение (7.2) в штрихованных величинах.

Таким образом, сила $\mathbf{F}_{12}$ и сила $\mathbf{F}_{21}$ одновременные в первой системе отсчета S становятся разновременными во второй системе S' .

8 Вычисление запаздывающих расстояний

Пусть закон движения частицы задан функцией $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$, а $\mathbf{r}$ - расстояние от этой частицы до произвольной частицы пространства. Тогда запаздывающее расстояние $\mathbf{r}_p$ задается уравнением $\mathbf{r}_p = \mathbf{r} + \mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(t - r_p)$. Модуль r_p вычисляется с помощью фрактальной функции

$$r_p = \sqrt{r^2 + 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}(t) + R^2(t) - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}(t - ()) - 2\mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{R}(t - ()) + R^2(t - ())} \quad (8.1)$$

при $r \gg |\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(t - r_p)|$ получим $\underline{r}_p \cong r + \frac{\mathbf{r}}{r} [\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}(t - ())]$

Если функция движения $\mathbf{R}(t)$, в момент времени t нахождения запаздывающего расстояния $\mathbf{r}_p$, соответствует условию $\mathbf{R}(t) = 0$, то выражение (8.1) существенно упростится

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r} - \mathbf{R}(t - r_p) \quad , \quad \underline{r}_p = \sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}(t - ()) + R^2(t - ())} \quad (8.2)$$

Таким образом, функции с запаздывающим временем можно преобразовывать к фрактальному виду и с помощью вычислительной техники находить их значения.

Рассмотрим простейший пример нахождения запаздывающего расстояния, когда частица движется равномерно. По формуле (8.2) запишем фрактальную функцию для $\underline{r}_p$

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r} + r_p \mathbf{u}_0 \quad , \quad r_p = \sqrt{r^2 + 2\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{r} \cdot () + u_0^2 \cdot ()^2}$$

которая суммируется к функции (8.3), являющейся решением квадратного уравнения для r_p

$$r_p = \frac{1}{1 - u_0^2} \left[\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{r} + \sqrt{r^2(1 - u_0^2) + (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{r})^2} \right] \quad (8.3)$$

9 Преобразование сил при релятивистском равноускоренном движении

При ускоренном движении электромагнитные силы зависят от запаздывающих расстояний, а также скорости и ускорения в запаздывающие моменты времени. Метод вычисления запаздывающих расстояний был рассмотрен в предыдущем параграфе.

Пусть в системе отсчета S частица 1 движется с постоянной скоростью $\mathbf{u}_1$, а частица 2 движется релятивистски равноускорено. Система S' движется относительно системы S со скоростью $\mathbf{v}$. Закон движения частицы 1 в системе S : $\mathbf{R}_1 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{u}_1 t$. Закон движения частицы 2 в системе S :

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{r}_2 + \frac{\mathbf{n}}{W} \left(\sqrt{1 + W^2 t^2} - 1 \right)$$

Сила действия частицы 1 на частицу 2 в системе S находится по формуле (7.2), а силу действия частицы 2 на частицу 1 в системе S получаем, используя формулу из электродинамики для электромагнитного поля произвольно движущегося заряда, в которой модуль запаздывающего расстояния вычисляем по формуле (8.2).

В системе S' закон движения частицы 1 задается уравнением (7.1), а закон движения частицы 2 равен

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'_2 = \mathbf{r}_2 - \frac{\gamma_v \mathbf{v}}{\gamma_v + 1} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_2) + \gamma_{v_n} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_2) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}' - \left[\mathbf{v} - \frac{\gamma_{v_n}}{\gamma_v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}' \right] t' + \\ + \frac{\mathbf{n}'}{W} \left[\sqrt{1 + \gamma_{v_n}^2 (\gamma_v^{-1} W t' + W \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^2} - \gamma_{v_n} \right] \end{aligned}$$

Силе действия частицы 2 на частицу 1 в системе S соответствует сила в системе S' в момент времени $t'_1 = \gamma_v [t - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}_1(t)]$. Расстояние между частицами равно $R'_{21} = R'_1(t'_1) - R_2(t'_1)$. Для

данного расстояния силу действия частицы 2 на частицу 1 в системе S' находим по формулам из электродинамики (решение Лиенара-Вихерта уравнений Максвелла). Значение силы $\mathbf{F}'_{21}(t)$ совпадает со значением силы $\mathbf{F}'_{21}(t)$ рассчитанной из преобразований Лоренца для сил (7.3). Аналогичное вычисление силы $\mathbf{F}'_{12}(t)$ в системе S' в момент времени $t'_2 = \gamma_v [t - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}_2(t)]$ совпадает со значением вычисленным по формуле лоренцевого преобразования сил.

10 Метрологический смысл преобразований Лоренца

Для математического описания физических явлений вводится система отсчета, в которой выбираются эталоны длины и времени. С каждой системой отсчета связано свое координатное пространство, состоящее из неподвижных в данной системе отсчета точек. Координатные точки не взаимодействуют как друг с другом, так и со всеми другими движущимися в системе отсчета частицами. Это является идеализацией для реальных материальных точек, но она принимается в качестве одного из основных положений при введении системы отсчета и координатного пространства. Измерение расстояния до движущейся частицы в произвольный момент времени происходит методом проецирования положения частицы на координатное пространство и отождествления расстояния до координатной точки с расстоянием до движущейся частицы. Расстояние между двумя движущимися частицами получается аналогично – проецированием и отождествлением проекции с реальным расстоянием.

Возьмем две инерциальные системы отсчета. Пусть система S' движется со скоростью $\mathbf{v}$ вдоль оси X системы S . Каждая из систем отсчета имеет свое координатное пространство. В системе S собственные координатные точки неподвижны, а координатные точки из системы S' движутся со скоростью $\mathbf{v}$. Расстояние между движущимися координатными точками x'_1 и x'_2 из системы S' можно измерить найдя проекцию этих точек на координатное пространство системы S . Длина проекции $(x'_1 x'_2)_p$ отождествляется с расстоянием между движущимися точками x'_1 и x'_2 . Второй метод измерения это использование движущегося со скоростью $\mathbf{v}$ эталона длины. Неподвижный эталон больше движущегося на величину γ_v . Следовательно, расстояние $x'_1 x'_2$ измеренное с помощью движущегося эталона будет в γ_v – раз больше его проекции на координатное пространство системы S . Этот факт отображается в преобразованиях Лоренца для x - координаты: $x' = \gamma_v(x - vt)$, где $(x - vt)$ - это координата частицы в системе S' с точки зрения наблюдателя из системы S . Соотношение между эталонами длины систем S и S' различно для различных направлений. В данном случае вдоль оси x эталон длины системы S' меньше в γ_v - раз, а вдоль осей y и z эталоны из S и S' совпадают.

Скорость хода опорных часов (часы в начале координат) в системе S' замедляется по сравнению с системой S на коэффициент $1/\gamma_v$. Это можно рассматривать как переход к новому эталону времени в системе S' . В преобразованиях Лоренца для времени

$$t'(t) = \frac{t}{\gamma_v} - v\gamma_v(x - vt) = \gamma_v(t - vx)$$

слагаемое t/γ_v отражает этот факт, а слагаемое $v\gamma_v(x - vt) = vx'(t)$ - факт возникновения рас-
согласования времени событий при переходе в систему S' . Чтобы увидеть, что происходит в

системе S' в момент времени t' необходимо собрать "пазл" из различных моментов времени и соответствующих событий из системы S . В результате такой сборки метрологический эффект от перехода в системе S' к эталону длины в γ_v - раз меньшему чем в системе S существенно изменяется. В общем, изменение скоростей хода часов, величин и направления расстояний при переходе в другую систему отсчета является метрологическим эффектом. В определенном смысле это не физический, а идеальный эффект, эффект связанный с использованием новых эталонов времени и длины вместо старых. При этом взаимосвязь и соотношение старых и новых эталонов строго физически обусловлена.

Наблюдатель в системе S' не фиксирует замедление хода опорных часов, так же он ни какими физическими измерениями не сможет обнаружить различие эталонов длины по разным направлениям. Для него эталоны длины и скорость хода времени вводятся по тем же соглашениям и численно будут такими же, как и для наблюдателя из системы S . Различие эталонов возникает только когда рассматриваются две движущиеся друг относительно друга системы.

11 Следствия преобразований Лоренца

11.1 Динамическое сжатие тел

Пусть вдоль оси X из состояния покоя начинают ускоренно двигаться две частицы. Через какой-то промежуток времени их скорости достигают порогового значения u_0 , на котором стабилизируются. Из-за синхронности движения точек и вследствие отсутствия их взаимодействия расстояния между ними сохраняются неизменными все время. То есть эффекта сокращения расстояния между независимыми частицами при их одновременном движении с релятивистскими скоростями не существует. Запишем далее закон релятивистского вращения и перемещения с постоянной скоростью, когда скорость $\mathbf{u}_0$ параллельна орту $\mathbf{n}_1$ (5.4). Из закона движения следует, что по линии постоянной скорости $\mathbf{u}_0$ траектория вращения сжимается на коэффициент $1/\gamma_u$. Это происходит вследствие того, что источник силы вызывающий вращение в начально-собственной системе отсчета, в текущей системе движется с постоянной скоростью $\mathbf{u}_0$ и соответственно по-другому взаимодействует с так же движущимся зарядом. А именно таким образом, что траектория его вращения сжимается. Аналогичный вывод можно сделать и из общего уравнения движения частицы с постоянной скоростью $\mathbf{u}_0$ (3.12) - (3.13). Таким образом, можно предполагать, что твердое тело будет сжиматься по линии движения с постоянной скоростью $\mathbf{u}_0$ в γ_u - раз. То есть сжатие движущихся твердых тел это динамический, определяемый изменением взаимодействия зарядов, эффект. В свое время Г.Лоренц [1] делал аналогичный вывод, исходя из превращения шаровой эквипотенциальной поверхности электростатического поля неподвижного электрона в эллипсообразную у движущегося.

11.2 Динамическое замедление времени движущихся тел

Собственное время движущейся частицы характеризует скорость протекания внутренних процессов. Собственное время движущейся частицы показывают часы, связанные с ней. В качестве

часов можно использовать любое периодическое движение сопутствующее основному движению частицы. Например, закон движения (5.2) можно рассматривать, как равномерное движение частицы и описание хода связанных с ней часов. Если записать закон движения частицы, состоящий из произвольного движения ее центра масс $\mathbf{r}_f$ и периодических колебаний относительно центра масс, то колебания будут характеризовать течение собственного времени при движении частицы по закону $\mathbf{r}_f$. Замедление хода движущихся часов по сравнению с координатными часами является следствием изменения характера внутренних взаимодействий у движущейся частицы. Это такой же динамический эффект, как и сокращение длины движущегося с постоянной скоростью тела. Аналогичное объяснение замедления собственного времени у движущихся частиц давал в свое время А.Эйнштейн [2]. Он при этом опирался на экспериментальные данные об уменьшении частоты излучения, связанного с внутренними процессами, у движущихся частиц. В данной статье математически доказано существование такого замедления (3.11) .

11.3 Метрологическое изменение расстояния

Рассмотрим теперь изменение расстояния между синхронно равномерно движущимися частицами из системы S при переходе в систему S' , движущуюся вдоль оси X с постоянной скоростью $\mathbf{v}$. Пусть в системе S две частицы движутся вдоль оси X с постоянной скоростью u : $X_1 = x_1 + ut$, $X_2 = x_2 + ut$. В системе S' законы их движения имеют вид

$$X'_1 = \frac{x_1}{\gamma_v(1 - vu)} + \frac{u - v}{1 - vu}t' \quad , \quad X'_2 = \frac{x_2}{\gamma_v(1 - vu)} + \frac{u - v}{1 - vu}t' \quad , \quad X'_{12} = \frac{x_{12}}{\gamma_v(1 - vu)} \quad (11.1)$$

Следовательно, можно сделать вывод, что расстояние между частицами 1 и 2 наибольшее, когда они неподвижны в системе отсчета, а движущееся расстояние всегда имеет меньшую длину. При переходе из системы S в систему S' , в зависимости от того как изменяется модуль скорости движения расстояния, само расстояние может либо увеличиваться либо уменьшаться. Преобразование расстояний (11.1) справедливо как для двух не взаимодействующих частиц, так и для сильно взаимодействующих частиц (для твердого тела). Это является следствием того, что изменения расстояний и времени при переходе в другую систему отсчета не связаны с какими-то физическими процессами – это чисто метрологический эффект, эффект перехода к другим эталонам длины и времени. С точки зрения преобразований Лоренца (чисто математический взгляд) формула (11.1) связывает длины различных расстояний. Расстоянию между точками в системе S соответствует расстояние с одновременными началом и концом в системе S' . С точки зрения физической реальности в уравнение (11.1) входит одно и тоже расстояние между частицами 1 и 2 , но в разных ИСО. Ввиду множества экспериментальных подтверждений формула (11.1) является верной [3] .

11.4 Общий случай метрологического изменения расстояния

Рассмотрим теперь случай расстояния между синхронно ускоряющимися частицами. Пусть в системе S две независимые (невзаимодействующие) частицы начинают синхронно двигаться по

закону

$$X_1 = x_1 + \frac{1}{W} \left(\sqrt{1 + W^2 t^2} - 1 \right) \quad , \quad X_2 = x_2 + \frac{1}{W} \left(\sqrt{1 + W^2 t^2} - 1 \right)$$

Так как движение синхронное, то расстояние между частицами в системе S сохраняется постоянным в любой момент времени и при любой их общей скорости. Выполним переход в движущуюся вдоль оси X со скоростью $\mathbf{v}$ систему S' . Из уравнения (4.3) получим, что расстояние между частицами в системе S' задается формулой

$$X'_{12} = \gamma_v x_{12} + \frac{1}{W} \left(\sqrt{1 + (Wt' + \gamma_v W v x_2 - \gamma_v v)^2} - \sqrt{1 + (Wt' + \gamma_v W v x_1 - \gamma_v v)^2} \right) \quad ,$$

$$\lim_{W \rightarrow 0} X'_{12} = \frac{x_{12}}{\gamma_v}$$

График зависимости $X'_{12}(t')$ построен для следующих значений: $W = 0, 1$; $v = 0, 4$; $x_1 = 1$;

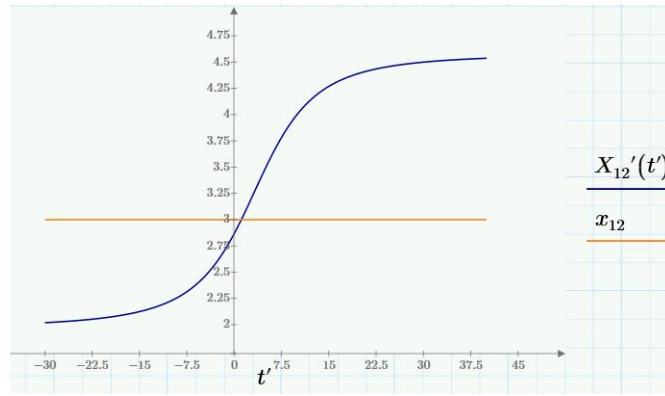


Рис. 1: Изменение расстояния при переходе в систему S'

$x_2 = 4$. То есть, постоянное расстояние между синхронно ускоряющимися частицами в системе S при переходе в систему S' может как увеличиваться, так и уменьшаться. Эффект изменения расстояния между частицами 1 и 2 при переходе в систему S' является чисто метрологическим. Переход к другим эталонам в системе S' изменяет расстояние между частицами, моменты времени, а также силы вызывающие их ускоренное движение.

12 Заключение

В статье получено общее выражение для релятивистского закона движения частицы (3.11) и (3.16). Рассмотрены частные случаи релятивистского движения частицы: равноускоренное с равномерным перемещением и периодическое с равномерным перемещением. Релятивистские выражения для закона движения, импульса, энергии, силы в общем случае имеют фрактальный вид. Очевидно, что внутренние процессы в частице, определяемые электромагнитным взаимодействием элементов структуры, изменяются при изменении характеристик движения частицы. Уравнения движения, соответствующее такому случаю показывают, что силы изменяются таким образом, что возникают два релятивистских эффекта. Во-первых, периодическое движение замедляется на коэффициент $1/\gamma_u$ или можно сказать, что движущиеся с постоянной скоростью $\mathbf{u}_0$ часы начинают идти медленнее. Во-вторых, движущееся с постоянной скоростью

$\mathbf{u}_0$ тело сплющивается (сокращается) в γ_u - раз по направлению скорости $\mathbf{u}_0$ (5.4) . С другой стороны существует метрологический эффект изменения расстояния и замедления времени, существующий только при переходе из одной ИСО в другую. В статье применен метод вычисления запаздывающих расстояний (электродинамика) с использованием фрактальных функций. Это позволяет для любого случая движения заряженных точек пересчитывать их электромагнитное взаимодействие при переходе в другую систему отсчета.

Полученные результаты показывают возможность применения фрактальных функций в других разделах физики и математики. В настоящее время фракталы воспринимаются как чисто геометрические объекты. Метрологическое понимание преобразований Лоренца позволяет приступить к созданию теории неинерциальных систем отсчета. Общая теория относительности А.Эйнштейна является теорией гравитации.

Список литературы

- [1] Г. А. Лорентц, *Теория электронов*, ГИТТЛ, Москва (1956)
- [2] А. Эйнштейн, *Сборник научных трудов, т.1, стр.138-164*, Наука, Москва (1965)
- [3] S. S. Stepanov, *Relativistic world, v.1, Berlin, Boston: De Gruyter (2018)*, <http://synset.com>