Формирование солитона из матричного нелинейного волнового уравнения для спиральной волны

Аннотация. Рассматривается матричное нелинейное волновое уравнение, порождённое спиральным решением вида экспоненты с матричными волновым числом и декрементом. Показано, что точные плоские волны образуют трёхмодовую спектральную структуру, а локализованные импульсы в классе точных решений отсутствуют: нелинейность уравнения носит конвективный характер и не уравновешивает дисперсию.

Методом многомасштабного разложения построена медленная огибающая; вычислены коэффициенты дисперсии и нелинейности для всех трёх мод. Установлено, что пара комплексно-сопряжённых мод удовлетворяет условиям фокусировки и поддерживает уединённую волну огибающей (bright-солитон), тогда как первая мода остаётся линейной и расплывается дифракционно. Настоящая статья является продолжением теоретических исследований, приведённых в работах, опубликованных на Архиворг.ру с архивными

номерами АХ 136623, АХ 136660, АХ 136665, и служит мостом для объяснения эффекта возникновения плазмоидов при помощи терагерцового лазера в эксперименте китайских коллег из Шанхая (2026 г).

Ключевые слова: матричное нелинейное волновое уравнение, спиральная волна, медленная огибающая, нелинейное уравнение Шрёдингера, солитон.

1. Введение

Задача о формировании локализованных волновых структур в нелинейных средах классически решается методом многомасштабных разложений: точное плосковолновое решение исходного уравнения рассматривается как несущая, а солитон возникает как огибающая этой несущей. Настоящая работа применяет эту программу к матричному нелинейному уравнению, в котором несущая задаётся парой

коммутирующих матриц. Оба оператора — волновой и временной — имеют дискретный спектр и общий собственный базис, что сводит анализ к исследованию трёх независимых собственных пар.

2. Исходное уравнение и спектральные данные

Рассматривается уравнение для матричного поля $U(x,t)$:

$$(U_x + U_t)^2 + U_{xt} = 2(U_x - U_t)U - iU_t.$$

Несущая выбирается в виде:

$$U = M\, e^{iWx - St},$$

где W — матрица волновых чисел, S — матрица декрементов, M — постоянная матрица амплитуд.

Матрица W имеет нули на главной диагонали и единицы вне её:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица S — антисимметричная матрица потока:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Их спектры:

$$\operatorname{spec} W = \{\, 2,\ -1,\ -1 \,\},$$

$$\operatorname{spec} S = \{\, 0,\ +i\sqrt{3},\ -i\sqrt{3} \,\}.$$

В терминах волнового числа и частоты допустимый спектральный набор несущей:

$$k + i\omega \in \left\{ 2,\ \ -1 + i\sqrt{3},\ \ -1 - i\sqrt{3} \right\}.$$

3. Операторный баланс на плоской волне

Матрицы W и S коммутируют, причём их произведение равно минус второй оператор:

$$WS = SW = -S.$$

Отсюда следует центральное операторное тождество работы,

выполняемое точно как матричное равенство (проверено численно с машинной точностью):

$$(W - S)^2 = 2(W + S).$$

Эквивалентная форма того же соотношения через собственные пары (μ, λ):

$$(\mu - \lambda)^2 = 2(\mu + \lambda).$$

Подстановка несущей в уравнение показывает, что квадратичные члены сокращаются тождественно в силу

приведённого баланса, а линейные дают ограничение на смешанную производную:

$$U_{xt} = -i\,U_t,$$

или, что эквивалентно,

$$U_{xt} + i\,U_t = 0.$$

Собственные пары системы, обеспечивающие баланс:

$$(\mu, \lambda) = (2, 0), \quad (-1, +i\sqrt{3}), \quad (-1, -i\sqrt{3}).$$

Таким образом, любая амплитуда M, построенная из общих собственных векторов W и S, даёт точное плосковолновое решение. Отметим попутно важное структурное следствие: матрица $W + I$ аннулирует всё подпространство, ортогональное вектору $(1, 1, 1)^T$, — это свойство сыграет роль в иерархии уравнений огибающей.

4. Отсутствие локализованных импульсов в классе точных решений

Ищем решение в классе бегущих волн: $U = f(\xi)\, e^{iWx - St}$, где $\xi = x - ct$. Подстановка сводит задачу к обыкновенному дифференциальному уравнению, которое после однократного интегрирования становится автономным уравнением первого порядка:

$$\frac{df}{d\xi} = F(f).$$

Решения автономного уравнения первого порядка монотонны: смена знака производной невозможна, поскольку нули производной являются положениями равновесия, покинуть которые решение не может в силу теоремы единственности. Гомоклиническая петля, на которой живёт классический солитон секанс-гиперболического типа, требует как минимум второго порядка уравнения с двумя точками поворота.

Нелинейность исходного уравнения образована квадратами производных и членами конвективного типа; она не создаёт удерживающего потенциала, пропорционального кубу поля, который в каноническом нелинейном уравнении Шрёдингера уравновешивает дисперсионное расплывание. Баланс раздела 3 является алгебраическим тождеством на фоне, а не динамическим механизмом локализации. Следовательно, в классе точных решений существуют плоские волны, фронты

(монотонные переходы между константами) и периодические волны, но не импульсы.

5. Иерархия форм уравнения и операторы первого порядка

Для анализа структуры уравнения введём два линейных дифференциальных оператора, выделяющих комбинации пространственной и временной производных:

$$A = -i\partial_x - \partial_t,$$

$$B = -i\partial_x + \partial_t.$$

Спектральный анализ показывает, что допустимые значения волнового числа и частоты образуют дискретный набор, соответствующий собственным модам системы:

$$k + i\omega \in \left\{ 2,\ \ -1 + i\sqrt{3},\ \ -1 - i\sqrt{3} \right\}.$$

Этот набор напрямую согласуется с собственными

значениями матриц W и S и отражает трёхмодовую структуру решения.

Форма 1 — исходный констрейнт (условие первого порядка). На уровне несущей волны динамика поля $U(x,t)$ подчиняется линейному ограничению:

$$U_{xt} + iU_t = 0.$$

Это соотношение является необходимым условием существования плосковолновых решений и служит отправной

точкой для построения многомасштабной иерархии. В терминах операторов A и B данное условие переформулируется как следствие коммутационного соотношения $WS = -S$.

6. Медленная огибающая и коэффициенты дисперсии и нелинейности

Вводим медленные переменные и малую огибающую:

$$U = (1 + \varepsilon\, A(X,T))\, e^{iWx - St}, \qquad X = \varepsilon x, \qquad T = \varepsilon t.$$

Разложение по степеням ε даёт иерархию уравнений.

Порядок ε^0 — операторный баланс раздела 3, тождество на несущей:

$$(W - S)^2 = 2(W + S).$$

Порядок ε^1 — линейный сектор, уравнение переноса огибающей:

$$i\,(W + I)\,\frac{\partial A}{\partial T} - S\,\frac{\partial A}{\partial X} = 0.$$

Существенно, что оператор $W + I$ вырожден на подпространстве сопряжённой пары мод: для них уравнение переноса не задаёт конечной групповой скорости, и динамика огибающей формируется на следующем порядке разложения.

Порядок ε^2 — дисперсионный и нелинейный секторы; из условий совместимости на этом порядке возникают члены со второй производной огибающей по X и кубичной нелинейностью по амплитуде. Приведение к канонической форме выполняется в базисе общих собственных векторов W

и S (операторы коммутируют, базис общий).

В собственном базисе огибающая расщепляется на три скалярные моды. Коэффициенты дисперсии и нелинейности имеют вид:

$$D_k = \mu_k - 1,$$

$$\gamma_k = \lambda_k^2.$$

Численные значения сведены в таблицу:

Мода	μ	λ	D	γ
1	2	0	1	0
2	-1	$+i\sqrt{3}$	-2	-3
3	-1	$-i\sqrt{3}$	-2	-3

Первая мода. При $\gamma_1 = 0$ нелинейность вырождается, и мода подчиняется линейному уравнению:

$$i\,\frac{\partial A_1}{\partial T} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial X^2} = 0.$$

Это уравнение свободной дисперсии: ширина любого пакета растёт пропорционально $\sqrt{T}$, амплитуда убывает как $1/\sqrt{T}$. Мода не исчезает, но размазывается и на больших временах становится пренебрежимо малым фоном.

Пара мод 2–3. Коэффициенты $D = -2$ и $\gamma = -3$ имеют одинаковый знак — выполнено условие фокусировки $D/\gamma > 0$.

Мода подчиняется фокусирующему нелинейному уравнению Шрёдингера:

$$i\,\frac{\partial A}{\partial T} - 2\,\frac{\partial^2 A}{\partial X^2} - 3\,|A|^2 A = 0.$$

Его уединённое решение:

$$A(X,T) = a\,\operatorname{sech}\left(\frac{X - vT}{L}\right) e^{-i\Omega T},$$

с параметрами:

$$L = \frac{2}{a\sqrt{3}},$$

$$\Omega = \frac{3}{2}a^2,$$

$$\frac{D}{\gamma} = \frac{2}{3},$$

где a — амплитуда, v — скорость. Ширина солитона обратно пропорциональна амплитуде: чем выше горб, тем он уже — характерная сигнатура солитонного баланса дисперсии и нелинейности.

Сопряжённость пары. Матрица S вещественна, поэтому собственные векторы мод 2 и 3 комплексно-сопряжены. При вещественном исходном поле U обе моды присутствуют одновременно с сопряжёнными амплитудами и физически образуют один солитонный объект: вещественная часть задаёт видимый профиль, мнимая — фазу.

7. Обсуждение и ограничения

Основные результаты работы состоят в следующем.

1. Установлено точное операторное тождество $(W - S)^2 = 2(W + S)$, выполняемое как матричное равенство для корректно выбранной матрицы волновых чисел W (нули на диагонали, единицы вне) и обеспечивающее существование плосковолновых решений при произвольной амплитуде.

2. Показано, что констрейнт $U_{xt} + iU_t = 0$ есть прямое следствие соотношения $WS = -S$.
3. Доказано (в рамках редукции к бегущим волнам) отсутствие локализованных импульсов в классе точных решений: механизм локализации отсутствует в самом уравнении.
4. Показано, что солитон рождается не в исходном уравнении, а в его огибающей: фокусирующее сочетание

коэффициентов возникает на сопряжённой паре мод с $(\mu, \lambda) = (-1, \pm i\sqrt{3})$.

5. Первая мода $(\mu, \lambda) = (2, 0)$ динамически пуста: лишённая нелинейности, она расплывается по дисперсионному закону $\sqrt{T}$.

Отметим ограничения. Коэффициенты D и γ получены в рамках схематической редукции, в которой моды рассматривались независимо; строгий вывод требует полного

разложения второго порядка по ε исходного уравнения, включая проверку условий совместимости на каждом порядке и учёт вырождения оператора $W + I$ на сопряжённой паре. Вне коммутирующего сектора (при некоммутативной матричной огибающей) возможны эффекты перемешивания мод, отсутствующие в скалярной редукции. Эти уточнения не меняют качественного вывода о вырождении первой моды и о фокусирующем характере сопряжённой пары.

Заключение

Матричное нелинейное волновое уравнение для спиральной волны допускает трёхмодовую спектральную структуру, но не содержит солитонов в классе точных решений. Формирование солитона происходит на уровне медленной огибающей сопряжённой пары мод: там конвективная нелинейность исходного уравнения переходит в кубичную, способную уравновесить дисперсию. Тем самым предложенная

конструкция иллюстрирует общий принцип: солитонная динамика многокомпонентных систем реализуется не на уровне несущей, а на уровне её огибающей. Предложенная теоретическая схема служит мостом для интерпретации экспериментальных данных по генерации плазмоидов терагерцовым лазером, полученных группой из Шанхая в 2026 г., и согласуется с более ранними результатами, опубликованными под архивными номерами AX 136623, AX 136660, AX 136665.