

Дефекты трансляции, логарифмическая арифметика и метрическая ригидность на конечном окне

Alexander P. Emelyanov
alex.emelyanov@proton.me

Сентябрь 2026

Аннотация

Рассматривается нормированное функциональное состояние

$$v \in H_0^1(-a, a), \quad \|v\|_2 = 1,$$

нулевым продолжением заданное на всей прямой $\mathbb{R}$. Для трансляций

$$(T_h v)(x) = v(x - h)$$

вводится дефект трансляции

$$D_v(h) = 1 - \operatorname{Re} \langle T_h v, v \rangle = \frac{1}{2} \|T_h v - v\|_2^2.$$

Показывается, что этот дефект задаёт естественную метрическую структуру на трансляционной орбите состояния и обладает локальной асимптотикой

$$D_v(h) = \frac{h^2}{2} \|v'\|_2^2 + o(h^2), \quad h \rightarrow 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2D_v(h)}{h^2} = \|v'\|_2^2.$$

Тем самым соболевская энергия состояния является инфинитезимальным коэффициентом метрической стоимости трансляции.

Далее вводится логарифмическая параметризация $h = \log r$. Разность двух логарифмических координат имеет вид

$$\log m - \log n = \log \frac{m}{n},$$

что приводит к естественной метрике на положительных рациональных числах

$$d_v(m, n) = \sqrt{2D_v\left(\log \frac{m}{n}\right)}.$$

Точная инвариантность нетривиального состояния относительно ненулевой трансляции оказывается невозможной. В приближённой постановке естественным становится вопрос о поведении дефекта вдоль арифметически порождённых последовательностей

$$h_k = \log \frac{p_k}{q_k} \rightarrow 0.$$

Основной критический масштаб определяется квадратом h_k . Полученная конструкция связывает геометрию конечного окна, логарифмическую арифметику и метрическую стоимость трансляционных воздействий.

1. Введение

Результат, идентифицируемый по номеру **AX-135945**, устанавливает точную геометрическую границу трансляций на конечном интервале

$$I_a = [-a, a].$$

Если величина смещения обозначена через ℓ , то пересечение исходного и сдвинутого интервалов возможно тогда и только тогда, когда

$$|\ell| \leq 2a.$$

Таким образом, величина $2a$, равная диаметру окна, задаёт точную геометрическую границу видимого сдвига.

При логарифмической параметризации

$$\ell = \log n, \quad n \geq 1,$$

это условие принимает вид

$$\log n \leq 2a,$$

или эквивалентно

$$n \leq e^{2a}.$$

Результат AX-135945 является чисто геометрическим и не требует дополнительных аналитических, спектральных или численных предположений. В настоящей работе он принимается как исходный факт.

Нас интересует следующий вопрос: если конечное окно определяет, какой логарифмический сдвиг вообще может быть виден, то какова метрическая стоимость такого сдвига для конкретного функционального состояния?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим нормированную функцию

$$v \in H_0^1(-a, a), \quad \|v\|_2 = 1,$$

и после нулевого продолжения будем считать её функцией на всей прямой $\mathbb{R}$. Для каждого $h \in \mathbb{R}$ определим трансляцию

$$(T_h v)(x) = v(x - h).$$

Естественной количественной характеристикой изменения состояния является величина

$$D_v(h) = 1 - \operatorname{Re} \langle T_h v, v \rangle.$$

Для нормированного состояния она совпадает с половиной квадрата L^2 -расстояния:

$$D_v(h) = \frac{1}{2} \|T_h v - v\|_2^2.$$

Тем самым геометрическое понятие видимости получает метрическое продолжение.

Основная цель статьи состоит в том, чтобы последовательно выделить три уровня структуры: геометрию конечного окна, метрическую структуру трансляций и арифметику логарифмических отношений.

2. Дефект трансляции на конечном окне

Пусть

$$a > 0, \quad I_a = [-a, a],$$

и

$$v \in H_0^1(I_a), \quad \|v\|_2 = 1.$$

Рассматриваем нулевое продолжение v как функцию на $\mathbb{R}$. Её носитель содержится в $[-a, a]$.

Для $h \in \mathbb{R}$ определим

$$(T_h v)(x) = v(x - h).$$

Трансляции сохраняют L^2 -норму:

$$\|T_h v\|_2 = \|v\|_2 = 1.$$

Определим дефект трансляции

$$D_v(h) = 1 - \operatorname{Re} \langle T_h v, v \rangle.$$

Из тождества

$$\|T_h v - v\|_2^2 = \|T_h v\|_2^2 + \|v\|_2^2 - 2 \operatorname{Re} \langle T_h v, v \rangle$$

следует

$$D_v(h) = \frac{1}{2} \|T_h v - v\|_2^2.$$

Поэтому

$$D_v(h) \geq 0, \quad D_v(0) = 0, \quad D_v(-h) = D_v(h).$$

Предложение 1. Для любого $h \in \mathbb{R}$

$$0 \leq D_v(h) \leq 2.$$

Причём

$$D_v(h) = 0$$

тогда и только тогда, когда

$$T_h v = v$$

в $L^2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Неотрицательность следует из равенства

$$D_v(h) = \frac{1}{2} \|T_h v - v\|_2^2.$$

Кроме того,

$$|\langle T_h v, v \rangle| \leq \|T_h v\|_2 \|v\|_2 = 1,$$

поэтому $D_v(h) \leq 2$. Наконец, $D_v(h) = 0$ эквивалентно $\|T_h v - v\|_2 = 0$, то есть $T_h v = v$ почти всюду. $\square$

Для полноты отметим также спектральное представление

$$D_v(h) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{v}(\xi)|^2 (1 - \cos h\xi) d\xi.$$

Оно показывает, что дефект определяется распределением частот состояния, однако в дальнейшем эта форма непосредственно не используется.

3. Локальная метрическая асимптотика

Следующий результат связывает дефект трансляции с дифференциальной структурой состояния.

Теорема 1. Пусть

$$v \in H_0^1(-a, a), \quad \|v\|_2 = 1.$$

Тогда при $h \rightarrow 0$

$$D_v(h) = \frac{h^2}{2} \|v'\|_2^2 + o(h^2).$$

Эквивалентно,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2D_v(h)}{h^2} = \|v'\|_2^2.$$

Доказательство. После нулевого продолжения имеем $v \in H^1(\mathbb{R})$. Для группы трансляций справедливо

$$\frac{T_h v - v}{h} \longrightarrow -v' \quad \text{в } L^2(\mathbb{R})$$

при $h \rightarrow 0$. Следовательно,

$$\frac{1}{h^2} \|T_h v - v\|_2^2 \longrightarrow \|v'\|_2^2.$$

Используя

$$D_v(h) = \frac{1}{2} \|T_h v - v\|_2^2,$$

получаем требуемое утверждение. □

Таким образом, в окрестности тождества трансляционной группы

$$\|T_h v - v\|_2 = |h| \|v'\|_2 + o(|h|),$$

а дефект имеет квадратичный ведущий порядок

$$D_v(h) = \frac{h^2}{2} \|v'\|_2^2 + o(h^2).$$

Следовательно, величина $\|v'\|_2^2$ является инфинитезимальным коэффициентом метрической стоимости трансляции.

4. Метрика на трансляционной орбите

Рассмотрим орбиту состояния

$$\mathcal{O}_v = \{T_h v : h \in \mathbb{R}\}.$$

Для параметров $s, t \in \mathbb{R}$ определим

$$d_v(s, t) = \|T_s v - T_t v\|_2.$$

Предложение 2. Величина d_v является метрикой на трансляционной орбите $\mathcal{O}_v$.

Доказательство. Неотрицательность, симметричность и неравенство треугольника следуют из соответствующих свойств нормы в $L^2(\mathbb{R})$. Если $d_v(s, t) = 0$, то $T_s v = T_t v$, а значит

$$v = T_{t-s} v.$$

Если $t - s \neq 0$, функция v была бы периодической с ненулевым периодом. Ненулевая периодическая функция не принадлежит $L^2(\mathbb{R})$. Поскольку $\|v\|_2 = 1$, получаем противоречие. Следовательно, $s = t$. □

Используя унитарность трансляций, получаем

$$d_v(s, t) = \|v - T_{t-s}v\|_2 = \sqrt{2D_v(t-s)}.$$

В частности,

$$d_v(0, h) = \sqrt{2D_v(h)}.$$

Неравенство треугольника поэтому принимает вид

$$\sqrt{2D_v(s+t)} \leq \sqrt{2D_v(s)} + \sqrt{2D_v(t)},$$

или

$$\sqrt{D_v(s+t)} \leq \sqrt{D_v(s)} + \sqrt{D_v(t)}.$$

Таким образом, субаддитивность квадратного корня из дефекта является непосредственным следствием метрической структуры трансляционной орбиты.

5. Логарифмическая параметризация

Введём логарифмическую координату

$$h = \log r, \quad r > 0.$$

Тогда

$$\log m - \log n = \log \frac{m}{n}.$$

Обозначим через

$$\mathbb{Q}_{>0} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

множество положительных рациональных чисел. Тогда

$$\log \mathbb{Q}_{>0} = \left\{ \log \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Лемма 1. Множество $\log \mathbb{Q}_{>0}$ плотно в $\mathbb{R}$.

Доказательство. Множество $\mathbb{Q}_{>0}$ плотно в $(0, \infty)$. Функция $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывным взаимно однозначным отображением с непрерывным обратным отображением $x \mapsto e^x$. Поэтому $\log \mathbb{Q}_{>0}$ плотно в $\mathbb{R}$. $\square$

Для последующего обсуждения полезен также следующий факт.

Лемма 2. Пусть p и q — различные простые числа. Тогда

$$\frac{\log p}{\log q} \notin \mathbb{Q}.$$

Следовательно, группа

$$\mathbb{Z} \log p + \mathbb{Z} \log q$$

плотна в $\mathbb{R}$.

Доказательство. Если бы $\log p / \log q = r/s$ для некоторых целых $r, s, s \neq 0$, то

$$p^s = q^r,$$

что невозможно для различных простых чисел. Последующее утверждение является стандартным следствием несоизмеримости двух порождающих. $\square$

Существенно, что в настоящей работе плотность логарифмических рациональных параметров используется не как самостоятельный результат, а как естественная арифметическая среда для трансляционного дефекта.

6. Точная трансляционная ригидность

Сначала рассмотрим точную инвариантность.

Теорема 2. Пусть

$$v \in L^2(\mathbb{R}), \quad v \not\equiv 0.$$

Тогда для любого $h \neq 0$

$$D_v(h) > 0.$$

Доказательство. Предположим, что $D_v(h) = 0$ для некоторого $h \neq 0$. Тогда

$$T_h v = v,$$

то есть v периодична с ненулевым периодом h . Ненулевая периодическая функция не может иметь конечную L^2 -норму на всей прямой, что противоречит $v \in L^2(\mathbb{R})$. Следовательно, $D_v(h) > 0$. $\square$

В частности, для нормированного состояния с носителем в $[-a, a]$ точная инвариантность относительно любого ненулевого логарифмического сдвига невозможна.

7. Приближённая ригидность

Пусть

$$h_k \rightarrow 0.$$

Непрерывность трансляций в L^2 автоматически даёт

$$D_v(h_k) \rightarrow 0.$$

Поэтому само по себе условие $D_v(h_k) \rightarrow 0$ не содержит ригидности.

Существенным является сравнение дефекта с его естественным квадратичным масштабом.

Предложение 3. Пусть

$$v \in H_0^1(-a, a), \quad \|v\|_2 = 1,$$

и $h_k \rightarrow 0$. Если

$$D_v(h_k) = o(h_k^2),$$

то возникает противоречие.

Доказательство. По теореме 3.1

$$\frac{2D_v(h_k)}{h_k^2} \longrightarrow \|v'\|_2^2.$$

Условие $D_v(h_k) = o(h_k^2)$ означает, что левая часть стремится к нулю. Поэтому

$$\|v'\|_2 = 0.$$

Следовательно, v почти всюду постоянна. Так как $v \in H_0^1(-a, a)$, эта постоянная равна нулю, что противоречит $\|v\|_2 = 1$. $\square$

Итак, для любого нетривиального нормированного состояния естественным критическим масштабом является

$$D_v(h) \asymp h^2.$$

8. Конечное окно и относительные логарифмические сдвиги

Идентификатор AX-135945 фиксирует абсолютную геометрическую границу

$$|\ell| \leq 2a.$$

При $\ell = \log p$ условие видимости имеет вид

$$\log p \leq 2a.$$

Тем самым конечное окно выделяет множество доступных абсолютных логарифмических координат.

Метрическая конструкция настоящей работы сравнивает не одну координату, а две. Если

$$\ell_1 = \log m, \quad \ell_2 = \log n,$$

то относительный сдвиг равен

$$\ell_1 - \ell_2 = \log m - \log n = \log \frac{m}{n}.$$

Поэтому из семейства абсолютных логарифмических координат естественно возникает семейство относительных координат.

Никакого дополнительного преобразования здесь не вводится: речь идёт только о переходе к разностям параметров.

Связь с AX-135945 тем самым имеет простой вид. Геометрический результат фиксирует, какие абсолютные логарифмические сдвиги допустимы внутри конечного окна, а настоящая работа исследует метрическую стоимость сравнения соответствующих состояний.

Таким образом, возникает последовательность

геометрическая видимость $\longrightarrow$ логарифмические координаты $\longrightarrow$ относительные логарифмические сдвиги

9. Псевдометрика на положительных рациональных числах

Для

$$m, n \in \mathbb{Q}_{>0}$$

определим

$$d_v(m, n) = \|T_{\log m} v - T_{\log n} v\|_2.$$

Из свойств трансляционной метрики следует

$$d_v(m, n) = \sqrt{2D_v(\log m - \log n)}.$$

Поскольку

$$\log m - \log n = \log \frac{m}{n},$$

получаем

$$d_v(m, n) = \sqrt{2D_v\left(\log \frac{m}{n}\right)}.$$

Для нетривиального состояния эта псевдометрика является метрикой. Действительно, если $d_v(m, n) = 0$, то

$$T_{\log(m/n)} v = v.$$

При $m \neq n$ сдвиг $\log(m/n)$ ненулевой, что невозможно по теореме 6.1. Поэтому

$$m = n.$$

Кроме того, для любого $r > 0$

$$d_v(rm, rn) = d_v(m, n),$$

поскольку

$$\frac{rm}{rn} = \frac{m}{n}.$$

Таким образом, индуцированная геометрия зависит только от относительного масштаба двух аргументов.

10. Арифметические малые сдвиги

Рассмотрим последовательность рациональных отношений

$$r_k = \frac{p_k}{q_k}$$

такую, что

$$r_k \rightarrow 1.$$

Тогда

$$h_k = \log \frac{p_k}{q_k} \rightarrow 0.$$

Для соответствующих состояний

$$d_v(p_k, q_k) = \sqrt{2D_v\left(\log \frac{p_k}{q_k}\right)}.$$

Из локальной асимптотики следует

$$D_v\left(\log \frac{p_k}{q_k}\right) = \frac{1}{2}\|v'\|_2^2 \left(\log \frac{p_k}{q_k}\right)^2 + o\left(\left(\log \frac{p_k}{q_k}\right)^2\right).$$

Следовательно,

$$d_v(p_k, q_k) = \|v'\|_2 \left|\log \frac{p_k}{q_k}\right| + o\left(\left|\log \frac{p_k}{q_k}\right|\right).$$

Таким образом, та же величина $\|v'\|_2$, которая управляет локальными трансляциями, определяет и локальную геометрию арифметических параметров.

Возникает естественный вопрос: может ли специальная арифметическая структура приводить к дополнительному подавлению дефекта относительно его универсального квадратичного масштаба?

11. Количественная арифметическая ригидность

Пусть

$$h_k = \log \frac{p_k}{q_k} \rightarrow 0.$$

Локальная теория даёт

$$\frac{D_v(h_k)}{h_k^2} \rightarrow \frac{1}{2}\|v'\|_2^2.$$

Поэтому обычное условие

$$D_v(h_k) \rightarrow 0$$

слишком слабо: оно автоматически следует из $h_k \rightarrow 0$.

Критическим является условие

$$D_v(h_k) = o(h_k^2),$$

которое уже невозможно для нетривиального нормированного состояния.

Тем самым естественная количественная задача состоит в поиске нижних оценок для

$$D_v\left(\log \frac{p}{q}\right)$$

в зависимости от

$$\left|\log \frac{p}{q}\right|$$

и, возможно, дополнительных арифметических характеристик отношения p/q .

Настоящая работа не предполагает решения этой количественной задачи. Здесь устанавливается её естественная формулировка и универсальный локальный масштаб.

12. Почему одной плотности недостаточно

Плотность множества

$$\log \mathbb{Q}_{>0}$$

в $\mathbb{R}$ сама по себе не означает существования ригидности. Для любой последовательности

$$h_k \rightarrow 0$$

сильная непрерывность трансляций даёт

$$D_v(h_k) \rightarrow 0.$$

Следовательно, плотность позволяет приближать малые вещественные сдвиги арифметическими параметрами, но ничего не говорит о скорости уменьшения дефекта относительно h_k^2 .

Именно поэтому центральным объектом количественной теории должно быть отношение

$$\frac{D_v(h_k)}{h_k^2},$$

а не сам факт

$$D_v(h_k) \rightarrow 0.$$

Это разграничение отделяет уже доказанную локальную метрическую теорию от дополнительной арифметической задачи, требующей собственных количественных оценок.

13. Основные выводы

Основные результаты можно свести к следующей цепочке:

$$D_v(h) = \frac{1}{2} \|T_h v - v\|_2^2,$$

$$D_v(h) = \frac{h^2}{2} \|v'\|_2^2 + o(h^2),$$

$$d_v(s, t) = \sqrt{2D_v(t - s)},$$

$$d_v(m, n) = \sqrt{2D_v\left(\log \frac{m}{n}\right)},$$

и

$$h \neq 0 \implies D_v(h) > 0 \quad (v \neq 0 \text{ в } L^2(\mathbb{R})).$$

Первая формула определяет дефект трансляции, вторая задаёт его локальный масштаб, третья интерпретирует квадратный корень из дефекта как расстояние на трансляционной орбите, четвёртая переносит эту геометрию на положительные рациональные числа, а последняя выражает точную ригидность ненулевого L^2 -состояния.

14. Обсуждение

В настоящей работе конечное окно рассматривается не только как область, ограничивающая возможный сдвиг, но и как исходная геометрическая среда для построения метрической структуры на функциональных состояниях.

Основной объект $D_v(h)$ имеет одновременно три интерпретации: как отклонение корреляции, как половина квадрата L^2 -расстояния и как локальный измеритель соболевской энергии.

Логарифмическая параметризация добавляет к этой геометрии арифметическую структуру. Абсолютные координаты $\log t$ при сравнении двух состояний переходят в относительные координаты $\log(m/n)$.

Поэтому функциональное состояние v индуцирует естественную геометрию на положительных рациональных числах. Плотность логарифмических рациональных параметров при этом не является самостоятельным источником ригидности; существенным становится вопрос о количественной стоимости малых арифметических сдвигов.

Универсальный локальный закон

$$D_v(h) \sim \frac{1}{2} \|v'\|_2^2 h^2$$

задаёт точный критический порядок. Любое дополнительное подавление до порядка $o(h^2)$ несовместимо с нетривиальным нормированным состоянием.

15. Заключение

Результат АХ-135945 устанавливает точную геометрическую границу видимого сдвига в конечном окне:

$$|\ell| \leq 2a,$$

а при

$$\ell = \log n$$

получается

$$n \leq e^{2a}.$$

Настоящая работа придаёт этой геометрической границе метрическое продолжение. Для нормированного состояния $v \in H_0^1(-a, a)$ вводится дефект трансляции

$$D_v(h) = \frac{1}{2} \|T_h v - v\|_2^2,$$

который индуцирует естественную метрику на трансляционной орбите и удовлетворяет локальной асимптотике

$$D_v(h) = \frac{h^2}{2} \|v'\|_2^2 + o(h^2).$$

После логарифмической параметризации возникает арифметическая метрика

$$d_v(m, n) = \sqrt{2D_v\left(\log \frac{m}{n}\right)}.$$

Тем самым отношения положительных рациональных чисел получают естественную метризацию через трансляционную геометрию функционального состояния.

Точная инвариантность относительно ненулевого сдвига несовместима с нетривиальным L^2 -состоянием. В приближённой постановке существенным оказывается сравнение дефекта с квадратичным масштабом сдвига.

Количественный механизм, посредством которого арифметическая структура могла бы принудительно создавать дополнительную приближённую трансляционную инвариантность, остаётся отдельной задачей.

Список литературы

- [1] Alexander P. Emelyanov, “Геометрический результат для конечного логарифмического окна”, identifier AX-135945, 2026.