

**Операторная геометрия модели GS6 и
стандартной волновой модели для нахождения
дискретных собственных значений наборов
матриц W и R**

Аннотация

В работе представлена операторная геометрическая интерпретация дискретного спектра волновых моделей: обобщённой модели GS6 и классической стандартной волновой модели. Показано, что в рамках операторной гиперболы $(\lambda_W - 1)^2 - \lambda_R^2 = 1$ дискретные собственные значения возникают как точки пересечения гиперболы с семейством окружностей, центры и радиусы которых

параметризуют сдвиги по оси частот λ_W . Построены наборы диагональных матриц W_n и R_n размерности 3×3 , демонстрирующие принципиальное различие между моделями: наличие в GS6 автономной стоячей моды $(2, 0)$ наряду с парами бегущих волн, тогда как в стандартной модели стоячие моды возникают исключительно как результат суперпозиции пар бегущих решений.

1. Введение

Дискретизация спектра собственных значений в волновых задачах традиционно связывается с граничными условиями и интерференцией бегущих волн. В классической постановке стоячая волна формируется как сумма двух бегущих волн с противоположными волновыми числами. Модель GS6 расширяет этот подход, вводя операторную геометрию, в которой наряду с интерференционными стоячими модами

существуют автономные стоячие решения, не требующие суперпозиции.

Цель настоящей работы — формализовать операторную геометрическую схему нахождения дискретных мод для обеих моделей и представить их в виде наборов матриц W_n, R_n , что позволяет использовать аппарат линейной алгебры и теории операторов для анализа волновых структур.

2. Операторная гипербола и геометрия пересечений

Рассмотрим операторную гиперболу, определяющую дисперсионное соотношение модели:

$$(\lambda_W - 1)^2 - \lambda_R^2 = 1.$$

Это уравнение эквивалентно дисперсионному соотношению волнового уравнения $V_{tt} - V_{xx} = 2iV_t$ при подстановке решений вида $V \sim e^{i(\lambda_W t \pm \lambda_R x)}$.

Дискретные моды определяются как точки пересечения этой гиперболы с семействами окружностей в параметрическом пространстве (λ_W, λ_R) . Такой подход позволяет визуализировать и алгебраически параметризовать дискретный спектр.

3. Модель GS6: семейство окружностей со сдвигом влево

Для модели GS6 рассматривается семейство окружностей с центрами на оси λ_W в точках $(a, 0)$, где $a = 0, -1, -2, \dots$, каждая из которых проходит через фиксированную точку $(2, 0)$. Уравнение окружности:

$$(\lambda_W - a)^2 + \lambda_R^2 = (2 - a)^2.$$

Решая совместно с гиперболой, получаем два решения по λ_W :
 $\lambda_W = 2$ (фиксированная автономная стоячая мода) и $\lambda_W = a - 1$. Для каждого λ_W находим λ_R из гиперболы:

$$\lambda_R = \pm \sqrt{(\lambda_W - 1)^2 - 1}.$$

Таким образом, при сдвиге центра окружности влево ($a = 0, -1, -2$) получаем последовательность дискретных мод с целочисленными $\lambda_W = -1, -2, -3, \dots$ и соответствующими λ_R .

Наборы матриц для GS6

Построим три диагональные матрицы W_n и соответствующие им R_n (3×3), где первая диагональ — автономная стоячая мода $(2, 0)$, а две другие — пары бегущих волн:

- $W_1 = \text{diag}(2, -1, -1), R_1 = \text{diag}(0, \sqrt{3}, -\sqrt{3});$
- $W_2 = \text{diag}(2, -2, -2), R_2 = \text{diag}(0, 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2});$
- $W_3 = \text{diag}(2, -3, -3), R_3 = \text{diag}(0, \sqrt{15}, -\sqrt{15}).$

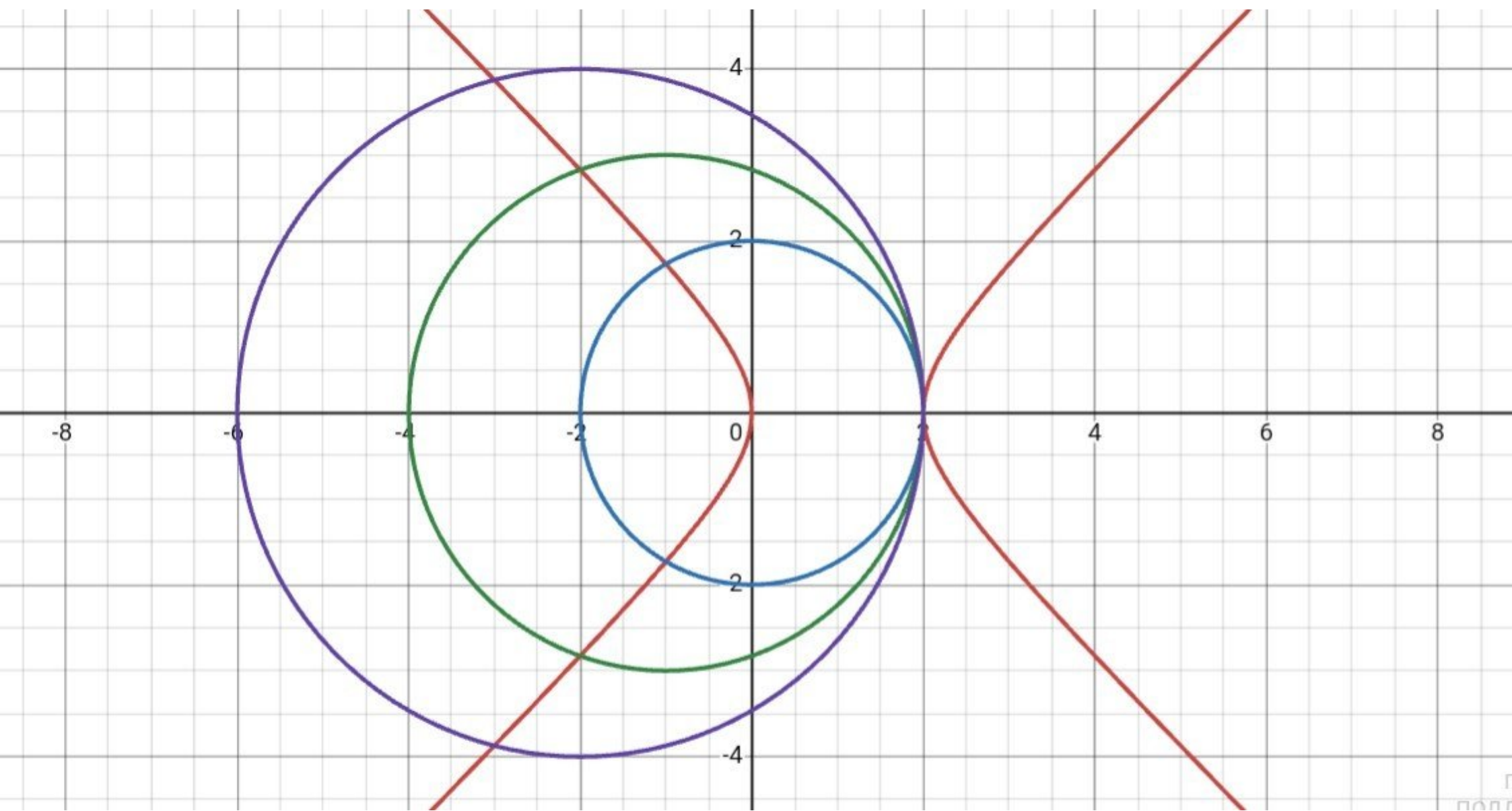
В явном виде:

$$W_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix};$$

$$W_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix};$$

$$W_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{15} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{15} \end{pmatrix}.$$

Такая структура матриц отражает ключевую особенность GS6: наличие выделенной стоячей моды $\lambda_W = 2$, $\lambda_R = 0$, и пар бегущих волн для остальных мод.



4. Стандартная волновая модель: семейство окружностей со сдвигом вправо

Для стандартной модели рассматривается семейство окружностей с центрами в $(b, 0)$, $b = 1, 2, 3, \dots$, проходящих через точку $(0, 0)$. Уравнение:

$$(\lambda_W - b)^2 + \lambda_R^2 = b^2.$$

Совместное решение с гиперболой даёт корни $\lambda_W = 0$ и

$\lambda_W = b + 1$. При этом $\lambda_W = 0$ соответствует тривиальной (нулевой) моде, а остальные — парам бегущих волн.

Наборы матриц для стандартной модели

Аналогично строим три матрицы:

- $W_1 = \text{diag}(0, 3, 3), R_1 = \text{diag}(0, \sqrt{3}, -\sqrt{3});$
- $W_2 = \text{diag}(0, 4, 4), R_2 = \text{diag}(0, 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2});$
- $W_3 = \text{diag}(0, 5, 5), R_3 = \text{diag}(0, \sqrt{15}, -\sqrt{15}).$

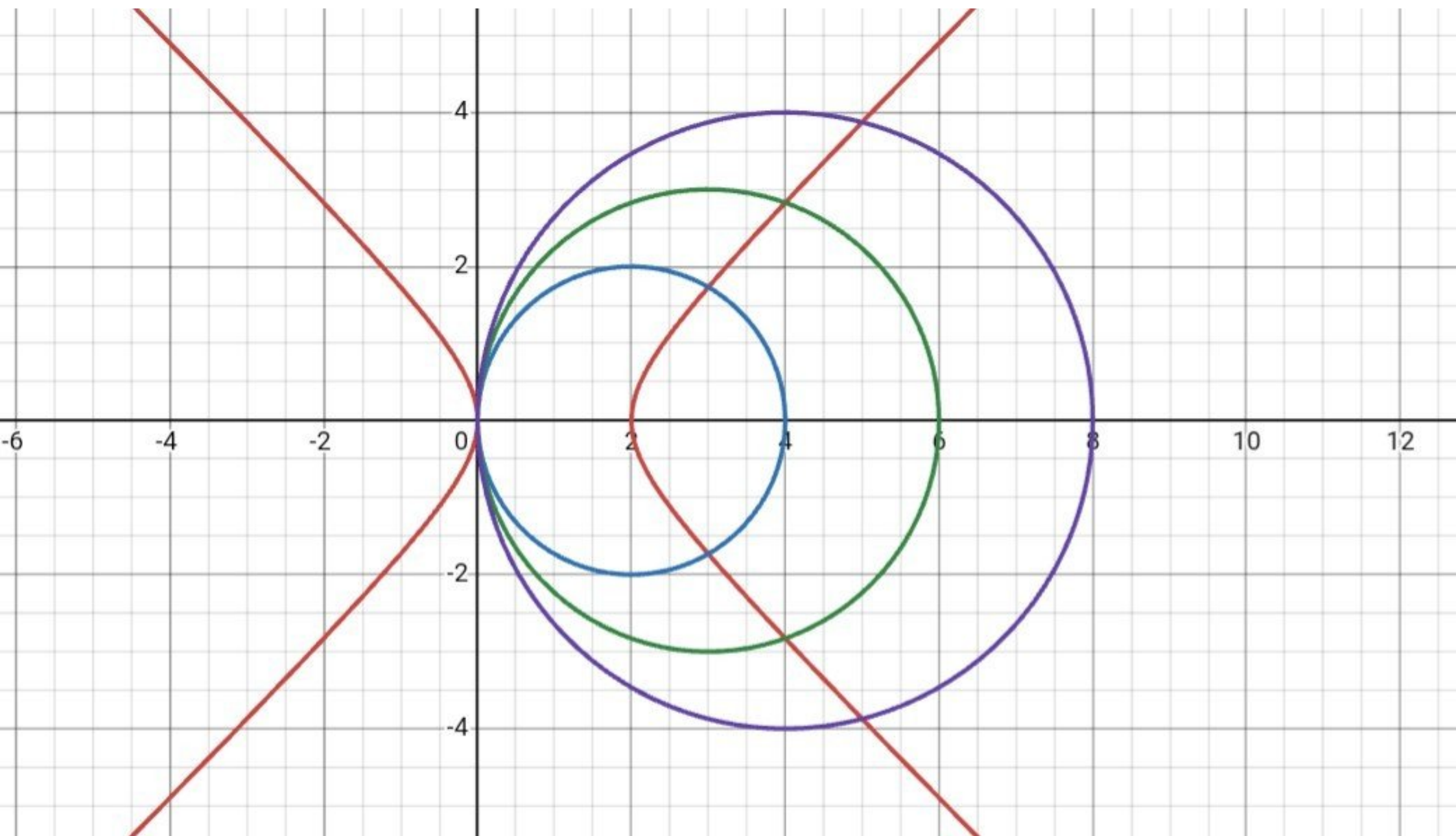
В явном виде:

$$W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix};$$

$$W_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix};$$

$$W_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{15} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{15} \end{pmatrix}.$$

Здесь отсутствует нетривиальная автономная стоячая мода:
стоячие структуры возникают только как результат
суперпозиции пар бегущих волн.



5. Сравнение моделей и интерпретация

Характеристика	Модель GS6	Стандартная модель
Фиксированная точка	$(2, 0)$ — нетривиальная стоячая мода	$(0, 0)$ — тривиальная/нулевая мода

Механизм стоячести	Автономная мода + суперпозиция пар бегущих	Только суперпозиция пар бегущих
Дискретный спектр λ_W	$2, -1, -2, -3, \dots$	$0, 3, 4, 5, \dots$

Структура
матриц W_n, R_n

Первая диагональ —
стоячая мода,
остальные — пары
бегущих

Первая
диагональ —
нулевая мода,
остальные —
пары бегущих

Таким образом, модель GS6 оказывается более общей: она включает в себя стандартный механизм формирования стоячих волн через интерференцию, но дополнительно допускает существование автономных стоячих мод как отдельных точек дискретного спектра.

6. Практический механизм регуляризации спектра

Сдвиг центров окружностей на единицу по оси λ_W приводит к дискретному изменению собственных значений λ_W с шагом 1. Это можно рассматривать как регуляризацию спектра:

- для GS6: $\Delta\lambda_W = -1$ при сдвиге центра влево;
- для стандартной модели: $\Delta\lambda_W = +1$ при сдвиге центра вправо.

Такой подход позволяет систематически генерировать дискретные моды и строить соответствующие операторные матрицы, что удобно для численного моделирования и анализа устойчивости решений.

7. Заключение

В работе продемонстрирована операторная геометрическая схема нахождения дискретных собственных значений для модели GS6 и стандартной волновой модели. Построены наборы матриц W_n , R_n , наглядно показывающие принципиальное отличие GS6: наличие автономной стоячей моды наряду с парами бегущих волн. Предложенный подход позволяет формализовать переход от геометрической картины пересечений к операторному описанию волновых

процессов и может быть использован для дальнейшего анализа спектральных свойств, построения базисов собственных функций и численного моделирования.

Особую практическую ценность представляет возможность управления пространственной структурой волнового поля в модели GS6. Так, изменяя частоту колебаний волны с шагом 1 (что соответствует дискретному сдвигу собственных значений λ_W пары бегущих волн также с шагом 1), можно целенаправленно смещать положение пучностей стоячей

волны в пространстве. Это даёт прямой и легко реализуемый механизм пространственного перестроения интерференционной картины без изменения граничных условий — за счёт выбора нужной дискретной моды из спектра GS6. Такая возможность подчёркивает гибкость модели и её перспективность для задач активного управления волновыми процессами, включая формирование заданных профилей поля и динамическое переключение между различными конфигурациями стоячих структур.

