Анализ динамики пространства-времени в пятимерной модели

Аннотация. В работе представлена математическая модель динамической среды, в которой колебательные моды реализуются непосредственно в геометрии пространства, а не в виде возмущений на её фоне. Модель базируется на паре сопряжённых профилей $F(x)$ и $S(x)$, связанных глобальным параметром $J = 1/x^4$. Динамическое уравнение

формулируется в терминах фазового ускорения $\varphi_{\tau\tau}$ и инерционного коэффициента среды $\left(J - \frac{\ln J}{2}\right)$. Установлено, что указанный коэффициент строго положителен при всех $J > 0$, а на границе $x = 1$ принимает единичное значение, обеспечивая естественную нормировку уравнения. Проведён полный анализ решений для пульсирующего ($\sin$) и однократного ($\sinh$) режимов. Показано, что существование локализованной колебательной моды однозначно выделяет критическую размерность $n = 4$.

1. Статическая структура модели

Рассматривается радиально-симметричная конфигурация в n -мерном пространстве с радиальной координатой $x = |X|$. Пространственные профили задаются следующим образом:

$$F(x) = \frac{\ln(x^2)}{x^2}, \quad x \geq 1; \qquad S(x) = x^2 \ln(x^2), \quad 0 < x \leq 1.$$

Функции F и S удовлетворяют уравнениям:

$$F_{xx} + \frac{n-1}{x} F_x = -\frac{4}{x^4}, \qquad S_{xx} - \frac{n-1}{x} S_x = -4\ln(x^2).$$

Вводится отношение профилей $J(x) = F(x)/S(x)$. При $\ln(x^2) \neq 0$ выполняется $J(x) = 1/x^4$, причём $J(\pm 1) = 1$ по непрерывности. Определяются комбинации $G = F + S$, $R = F - S$. Подстановка производных приводит к единому статическому уравнению, справедливому на всей области определения:

$$G_{xx} + \frac{n-1}{x} R_x = 2 \ln J - 4J, \qquad J = \frac{1}{x^4}.$$

---

2. Сшивка на границе и роль мембраны

На границе $x = 1$ значения и первые производные профилей совпадают:

$$F(1) = S(1) = 0, \qquad F_x(1) = S_x(1) = 2.$$

При этом вторые производные терпят конечный скачок:

$$S_{xx}(1) = 6, \qquad F_{xx}(1) = -10, \qquad [V_{xx}]_{x=1} = 16.$$

Наличие скачка второй производной при непрерывности функции и её первой производной интерпретируется как присутствие поверхностного источника $16\,\delta(x-1)$, соответствующего упругой мембране на границе. Мембрана обеспечивает согласование пространственных мод внутри и

вне границы и выступает необходимым элементом замыкания колебательной конфигурации.

---

3. Динамическое уравнение в пятимерной постановке

Переход к динамике осуществляется посредством введения фазовой переменной τ и представления полного поля в виде $V(x,\tau) = u(x)\varphi(\tau)$. Динамическое уравнение модели имеет

вид:

$$G_{xx} + \frac{n-1}{x} R_x = \left(J - \frac{\ln J}{2} \right) \varphi_{\tau\tau}, \qquad J = \frac{1}{x^4}.$$

Подстановка $J = 1/x^4$ и $\ln J = -4 \ln x$ приводит к явной форме инерционного коэффициента:

$$J - \frac{\ln J}{2} = \frac{1}{x^4} + 2 \ln x.$$

Таким образом, уравнение динамики записывается как:

$$G_{xx} + \frac{n-1}{x} R_x = \left(\frac{1}{x^4} + 2 \ln x \right) \varphi_{\tau\tau}.$$

3.1. Упрощение уравнения на границе $x = 1$

При $x = 1$ выполняется $J = 1, \ln J = 0$, следовательно:

$$\left(J - \frac{\ln J}{2} \right) \Big|_{x=1} = 1.$$

Уравнение на границе принимает компактную форму:

$$G_{xx} + \frac{n-1}{x} R_x = \varphi_{\tau\tau}, \quad x = 1.$$

Это соотношение демонстрирует отсутствие дополнительных масштабных множителей на границе: пространственная кривизна напрямую уравновешивает фазовое ускорение.

---

4. Свойства инерционного коэффициента

Исследуется поведение коэффициента $\left(J - \frac{\ln J}{2}\right)$ при $J > 0$.

Условие обращения его в нуль эквивалентно уравнению:

$$2J = \ln J \quad \Leftrightarrow \quad e^{2J} = J.$$

Рассмотрим функцию $f(J) = 2J - \ln J$, $J > 0$. Производная $f'(J) = 2 - 1/J$ обращается в нуль при $J = 1/2$. Значение функции в этой точке:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \ln 2 \approx 1{,}693 > 0.$$

Поскольку минимум $f(J)$ положителен, уравнение $2J = \ln J$

не имеет решений. Следовательно,

$$J - \frac{\ln J}{2} > 0 \quad \text{при всех } J > 0.$$

Коэффициент строго положителен на всей области, что исключает существование вырожденных точек, в которых инерционный отклик среды обращался бы в нуль.

Поведение коэффициента в различных областях:

- при $x \to 0$ ($J \to \infty$) доминирует слагаемое $1/x^4$;
- при $x = 1$ коэффициент равен 1;
- при $x > 1$ ($J < 1$) коэффициент остаётся положительным за счёт вклада логарифмического слагаемого.

5. Пульсирующий режим ($\varphi = \sin(2\tau)$)

Для фазовой функции $\varphi(\tau) = \sin(2\tau)$ выполняется $\varphi_{\tau\tau} = -4\varphi$. Подстановка в динамическое уравнение даёт:

$$G_{xx} + \frac{n-1}{x} R_x = -4 \left(J - \frac{\ln J}{2} \right) \varphi(\tau).$$

Пространственная часть уравнения разделяется на внутреннюю и внешнюю области:

- внутренняя область ($0 < x \leq 1$):

$$u_{xx} - \frac{3}{x}u_x + \frac{4}{x^2}u = 0;$$

- внешняя область ($x \geq 1$):

$$u_{xx} + \frac{3}{x}u_x + \frac{4}{x^2\ln(x^2)}u = 0.$$

Решение внутреннего уравнения имеет вид:

$$u_{\text{in}}(x) = C_1x^2 + C_2x^2\ln(x^2).$$

Внешнее уравнение допускает решение через логарифмический интеграл $\mathrm{li}(x^2)$. Условия регулярности в центре, затухания на бесконечности и C^1-сшивки на границе $x = 1$ однозначно определяют решение с точностью до амплитуды:

$$V(x,\tau) = A x^2 \ln(x^2) \sin(2\tau), \quad 0 < x \le 1;$$

$$V(x,\tau) = A \frac{\ln(x^2)}{x^2} \sin(2\tau), \quad x \ge 1.$$

6. Однократный режим ($\varphi = \sinh(2\tau)$)

Для гиперболического режима $\varphi(\tau) = \sinh(2\tau)$, $\varphi_{\tau\tau} = +4\varphi$, уравнение принимает вид:

$$G_{xx} + \frac{n-1}{x} R_x = +4 \left(J - \frac{\ln J}{2} \right) \varphi(\tau).$$

Структура пространственных уравнений и условия сшивки совпадают с пульсирующим режимом, что приводит к решению:

$$V(x,\tau) = Ax^2 \ln(x^2) \sinh(2\tau), \quad 0 < x \leq 1;$$

$$V(x,\tau) = A\frac{\ln(x^2)}{x^2} \sinh(2\tau), \quad x \geq 1.$$

Данный режим описывает необратимый переходный процесс с экспоненциальным нарастанием возмущения.

---

7. Критическая размерность $n = 4$

Характеристическое уравнение внутренней задачи:

$$k^2 - nk + 4 = 0$$

имеет двойной корень $k = 2$ при $n = 4$. При $n < 4$ корни комплексные, при $n > 4$ — два различных вещественных корня. При этом тождество для внешней функции F с правой частью $-4/x^4$ выполняется только при $n = 4$. Таким образом, существование локализованной моды с логарифмическим профилем однозначно выделяет размерность $n = 4$.

8. Геометрическое запирание и эффективная скорость

Эффективная скорость распространения возмущения определяется как $v(x) = 1/\sqrt{c(x)}$, где $c(x)$ — коэффициент при u в пространственном уравнении:

$$v_{\text{in}}(x) = x, \qquad v_{\text{out}}(x) = x\sqrt{\ln(x^2)}.$$

На границе $x = 1$ скорость во внешней области обращается в

нуль, формируя бесконечное волновое сопротивление. В совокупности с условием $v_{\text{in}} \to 0$ при $x \to 0$ это создаёт геометрический резонатор, обеспечивающий локализацию моды без привлечения нелинейных эффектов.

---

9. Сравнение режимов

Пульсирующий и однократный режимы различаются исключительно знаком фазового ускорения ($\varphi_{\tau\tau} = \mp 4\varphi$), что

определяет обратимость либо необратимость динамики. Пространственная структура, инерционный коэффициент и механизм геометрического запирания остаются неизменными. Судьба системы определяется дискретным выбором фазовой функции.

10. Космологические интерпретации

Модель допускает две интерпретации:

1. Чёрная дыра в открытой Вселенной: внутренняя область — внутренность чёрной дыры, граница — горизонт событий с мембраной.
2. Замкнутая Вселенная: внутренняя область — замкнутый мир, мембрана — интерфейс между топологиями.

Математическая структура в обоих случаях идентична; различие заключается в интерпретации центра $x = 0$ как сингулярности либо как регулярной точки.

---

11. Заключение

В работе построена и проанализирована модель динамики пространства-времени в пятимерной постановке. Основные результаты:

1. Статическое уравнение приведено к глобальной форме, использующей параметр $J = 1/x^4$ и комбинации профилей G и R.

2. Динамическое уравнение сформулировано с фазовым ускорением в правой части и инерционным коэффициентом $\left(J - \frac{\ln J}{2}\right)$, строго положительным при всех $J > 0$.

3. На границе $x = 1$ инерционный коэффициент равен 1, что обеспечивает естественную нормировку уравнения.
4. Условия сшивки и локализации однозначно определяют пространственную моду с точностью до амплитуды.
5. Существование локализованной колебательной моды выделяет критическую размерность $n = 4$.

6. Два динамических режима (пульсирующий и однократный) различаются знаком фазового ускорения и описывают соответственно обратимые колебания и необратимый переходный процесс.
7. Механизм геометрического запирания, основанный на контрасте эффективных скоростей, обеспечивает локализацию возмущения без нелинейных эффектов.

Дальнейшее развитие модели предполагает анализ наблюдательных следствий, учёт нелинейных поправок и исследование применимости конструкции к атомарным и субатомным масштабам.