

Уточнённый расчёт сдвига перигелия Меркурия в косоугольной эксцентрической системе координат

В. М. Беляев

Свободный исследователь, 634045 Томск, Россия

2026

Аннотация

Работа является продолжением статьи «Косоугольная эксцентрическая система координат и небесная механика» и посвящена уточнённому расчёту сдвига перигелия Меркурия без разложения уравнения движения в ряд по малому параметру. Ключевую роль играет статья Н. Н. Носкова «Явление запаздывания потенциала», связывающая сдвиг перигелия с конечной скоростью распространения гравитации и содержащая критику специальной теории относительности. Цель работы — показать, что наблюдаемый сдвиг $\Delta\varphi \approx 43''/\text{столетие}$ воспроизводится численно в замкнутой (неразложенной) форме уравнения Бине, полученного в плоском пространстве из геометрии косоугольной эксцентрической системы координат (КЭСК) галилеева типа (КЭСК-Г), не прибегая ни к кривизне пространства-времени, ни к пертурбативному разложению. Рассматриваются и сопоставляются альтернативные подходы Трунева, Смутьского, Акимова и Купряева. Все вычисления воспроизводятся приведёнными в приложении программами на языке Python.

Ключевые слова: КЭСК, уравнение Бине, сдвиг перигелия, запаздывание потенциала, уравнение Бине без разложения в ряд, специальная теория относительности, критический обзор.

Abstract: The paper is a continuation of the article “Oblique eccentric coordinate system and celestial mechanics” and is devoted to a refined calculation of the perihelion shift of Mercury without expanding the equation of motion in a series in a small parameter. A key role is played by the article of N. N. Noskov “The phenomenon of the potential retardation”, relating the perihelion shift to the finite velocity of gravity propagation and containing a critique of the special theory of relativity. The aim is to show that the observed shift $\Delta\varphi \approx 43''/\text{century}$ is reproduced numerically in the closed (non-expanded) form of the Binet equation obtained in flat space from the geometry of the oblique eccentric coordinate system of the Galilean type (CECC-G), using neither the curvature of spacetime nor perturbative expansion. Alternative approaches of Trunev, Smulsky, Akimov and Kupryaev are reviewed and compared. All calculations are reproduced by the Python programs given in the appendix.

Keywords: CECC, Binet equation, perihelion shift, potential retardation, Binet equation without series expansion, special theory of relativity, critical review.

Лицензия: CC BY 4.0 (Creative Commons Attribution 4.0 International).

1 Введение: обзор литературы и постановка задачи

Аномальная прецессия перигелия Меркурия — исторически первый наблюдательный факт, потребовавший выхода за рамки ньютоновской небесной механики. Обнаруженная Лемверье в 1859 г. как невязка в $38\text{--}43''$ за столетие, она стала главным эмпирическим аргументом общей теории относительности (ОТО) [1]. Однако, как будет показано ниже, та же величина сдвига возникает в плоском $\mathbb{R}^3$ с нулевым тензором Римана из геометрии косоугольной эксцентрической системы координат (КЭСК), что подробно изложено в основной статье [2]. Настоящая работа уточняет результат, вычисляя сдвиг *без* разложения уравнения движения в ряд по малому параметру.

Роль явления запаздывания потенциала

Центральное место в обсуждении занимает работа Н. Н. Носкова «Явление запаздывания потенциала» [3]. Автор показывает, что идея конечной скорости распространения взаимодействия восходит к Гауссу (1835), затем была развита Вебером (1846) и Гербером (1898). Именно потенциал Гербера

$$V = \frac{\mu}{r \left(1 - \frac{1}{c} \frac{dr}{dt}\right)^2}, \quad (1)$$

содержащий *двойное* запаздывание, приводит к сдвигу перигелия

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - e^2)}, \quad (2)$$

численно тождественному формуле Эйнштейна (1915). Носков обращает внимание на то, что конечность скорости взаимодействия имеет фундаментальный характер и распространяется на все виды взаимодействий, в первую очередь на гравитацию.

Особую ценность для настоящей статьи представляет критика Носковым основ специальной теории относительности (СТО). В его трактовке

1. множитель Лоренца $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ корректно описывает эксперименты лишь до $v \lesssim 0,85c$, а при $v \rightarrow c$ предсказывает бесконечный рост массы и энергии, тогда как последовательный учёт запаздывания потенциала даёт *конечную* предельную энергию $E_{\max} = m_e c^2 \cdot f^2/2$, где $f = v_{\text{лин. макс}}/v_{\text{фаз}}$ — коэффициент, зависящий от конкретного закона запаздывания потенциала и принимающий при $v \rightarrow c$ конечное значение α ;
2. гипотеза о росте релятивистской массы электрона, положенная в основу СТО, не имела независимого обоснования и была принята из совпадения с множителем Лоренца в ограниченном диапазоне скоростей;
3. эксперименты Майкельсона–Морли, по мнению Носкова, были интерпретированы Лоренцем неверно, а прямое измерение анизотропии фонового излучения (движение Земли ≈ 400 км/с) опровергает релятивистскую формулу сложения скоростей.

Мы не разделяем всех категоричных выводов Носкова, однако считаем принципиально важным его наблюдение: *запаздывание потенциала — естественный механизм сдвига перигелия, не требующий кривизны пространства-времени*. Именно этот тезис положен в основу геометрической трактовки КЭСК в основной статье и детально проверяется ниже численным расчётом без приближений.

Критика традиционных подходов

Работы Трунева [4], Смутьского [5], Акимова [6] и Купряева [7] вносят важные предостережения, которые следует учитывать при интерпретации результата.

Трунев. В работе «Аномальное движение орбит в общей теории относительности» (2014) отмечается, что поле точечной массы в ОТО определяется не единственным образом: помимо метрики Шварцшильда существует решение Катанаева с δ -функциональным тензором энергии-импульса. Трунев показывает, что смещение перигелия в обеих метриках при разложении по малым параметрам сводится к одной и той же формуле (2), но обращает внимание на то, что стандартный вывод требует подгоночной замены переменной $R(R - 2m) = R'^2$, то есть до некоторой степени *знание ответа заранее*. Его собственная альтернатива — объяснение прецессии аномальными радиальными колебаниями, порождаемыми уравнением состояния *тёмной энергии*. Для нашей постановки вывод Трунева означает, что формула (2) получается во многих теориях и сама по себе не служит однозначным подтверждением какой-то одной из них.

Смутьский. В работе «Тяготение, поле и вращение перигелия Меркурия» автор даёт более жёсткую критику. Он:

- считает механизм Герберера умозрительным и необоснованным;
- показывает, что перенос электромагнитной аналогии (сила вида закона Лоренца) даёт лишь $0,23''/\text{столетие}$, то есть в 200 раз меньше наблюдаемой величины;
- утверждает, что конечная скорость тяготения должна приводить к вдвое большему изменению периода и большой полуоси, что не наблюдается;
- предлагает объяснить всю прецессию $582,3''/\text{столетие}$ вращением Солнца, моделируемым составной осесимметричной моделью, без какой-либо конечной скорости тяготения.

Аргумент Смутьского о неоднозначности механизма важен: он показывает, что даже отказ от запаздывания не лишает прецессию объяснения в рамках ньютоновской механики. Мы возвращаемся к этой альтернативе в разделе «Обсуждение».

Акимов. О. Е. Акимов в трактате по критике теории относительности (раздел «Аномальное движение перигелия Меркурия») подвергает сомнению сам наблюдательный базис: согласно сопоставлению расчётов Леверье, Клеменса и Роузвера, остаточная невязка «гуляет» в диапазоне $38\text{--}50''/\text{столетие}$ в зависимости от набора учитываемых возмущений. Кроме того, он указывает на методическую несостоятельность приёма, при котором общий сдвиг вычисляется классической механикой, а невязка — уже релятивистской. Эти замечания ограничивают точность, с которой формула (2) может быть сопоставлена наблюдениям, и потому применимы и к нашему результату: совпадение с точностью до нескольких десятых секунды следует рассматривать как разумное подтверждение, а не как абсолютную проверку.

Купряев. Н. В. Купряев в работе «Расчёт прецессии перигелия орбиты Меркурия в рамках закона всемирного тяготения Ньютона» [7] (2015) предпринимает независимое численное моделирование орбиты Меркурия *исключительно* в рамках ньютоновского взаимодействия с Солнцем и планетами, с шагом итерации $0,0005$ с и повышенной точностью

вычислений. Его ключевой результат состоит в том, что средняя ньютоновская прецессия перигелия Меркурия за 100 лет по его расчёту составляет не общепринятые $+532''$, а $+553,08''$, то есть *на $21''$ больше*. При этом вклад Солнца (калибровка) в пределах ошибки метода равен нулю, а наибольший вклад дают Венера ($\approx 291''/\text{век}$) и Юпитер ($\approx 157''/\text{век}$), что находится в согласии с классическими оценками Леверье и Клеменса.

Это замечание существенно для интерпретации результатов настоящей работы. Если принять величину Купряева $+553''/\text{век}$ за ньютоновскую динамическую составляющую, то наблюдаемая остаточная невязка (при полной прецессии $\approx 575''/\text{век}$ и прецессии равноденствий $\approx 5026''/\text{век}$) окажется ближе к $\approx 22''/\text{век}$, чем к общепринятым $43''/\text{век}$. Иными словами, вопрос о точной величине гравитационной поправки оказывается ещё менее определённым, чем это принято считать: по Купряеву релятивистский вклад, подлежащий объяснению, может быть вдвое меньше классического значения. Отметим, что результат Купряева опирается на допущение о мнимом гравитационном заряде и на метод усреднения положения планет по 16 фиксированным точкам орбиты, в силу чего величину $+553''/\text{век}$ следует рассматривать как верхнюю оценку ньютоновской составляющей, требующую независимой проверки. Приём его расчёта, однако, ценен тем, что, как и наша постановка, опирается на численное интегрирование без разложения в ряд.

Постановка задачи настоящей работы

Таким образом, из обзора следует, что:

1. сдвиг перигелия не является однозначным признаком кривизны пространства-времени — его даёт и запаздывание потенциала (носковский механизм), и геометрия КЭСК (основная статья), и даже ньютоновская механика с вращающимся Солнцем (Смольский);
2. величина самой ньютоновской составляющей и, соответственно, остаточной невязки не определена однозначно: по Купряеву достигается $+553''/\text{век}$ вместо $+532''/\text{век}$, так что подлежащая объяснению поправка может быть вдвое меньше общепринятых $43''/\text{век}$;
3. существующие выводы формулы (2) во многом опираются на разложение в ряд и в ряде случаев — на знание конечного результата (критика Трунева и Акимова).

Задача настоящей работы — *устранить вторую слабость*: вычислить сдвиг перигелия численно, интегрируя замкнутую (неразложенную) форму уравнения Бине, полученного из геометрии КЭСК, и показать, что он даёт наблюдаемые $42,98''/\text{столетие}$ без какого-либо разложения в ряд. Мы также сравниваем КЭСК-Г и КЭСК-Л, чтобы обосновать выбор галилеевой версии системы для практического расчёта.

2 Методика расчёта в КЭСК-Г

2.1 Геометрия КЭСК и уравнение Бине

Косоугольная эксцентрическая система координат (R, Θ) задаётся отображением в плоскость орбиты: если ρ — расстояние до оси орбитальной плоскости, а z — смещение вдоль оси, направленной к аписде (см. также основную статью [2]), то

$$z = R(\cos \Theta - \beta), \quad \rho = R \sin \Theta, \quad (3)$$

где R — эксцентрисический радиус, Θ — эксцентрисическая аномалия. Связь с полярными (фокальными) координатами (r, θ) в плоскости орбиты устанавливается через модуль радиус-вектора $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ и угол θ из фокуса: где β — параметр (для кеплеровской орбиты $\beta = e$ — эксцентриситет). Фокальный радиус выражается через эксцентрисический соотношением

$$r = R\lambda, \quad \lambda = \sqrt{1 - 2\beta \cos \Theta + \beta^2}. \quad (4)$$

Как показано в основной статье [2], геометрия преобразования (3)–(4) вносит в уравнение Бине $u'' + u = \mu/h^2$ замкнутую поправку $3GMu^2/c^2$:

$$u'' + u = \frac{1}{p} + \frac{3GM}{c^2}u^2, \quad (5)$$

где $u = 1/r$, $p = a(1 - e^2)$ — фокальный параметр, $h = \sqrt{\mu p}$ — удельный момент. Ключевой момент: слагаемое $3GMu^2/c^2$ является *полной, замкнутой* поправкой, возникающей из точного преобразования (4), а не первым членом разложения. Рядовое решение $u = u_0 + \varepsilon u_1$ вводится лишь для аналитической записи ответа; численное интегрирование уравнения (5) целиком не требует никакого разложения.

Поскольку $u = 1/r$, уравнение (5) эквивалентно радиальному уравнению

$$r'' = \frac{h^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2} - \frac{3\mu h^2}{c^2 r^4}, \quad (6)$$

которое и интегрируется численно. Сдвиг перигелия измеряется по положениям минимума r на последовательных оборотах.

2.2 КЭСК-Г и КЭСК-Л

В основной статье различаются две версии системы:

- **КЭСК-Г** (галилеева): эксцентрисические окружности $R = \text{const}$ не растягиваются; они остаются окружностями, центр которых смещён назад на βR . Координатные линии $R = \text{const}$ изохронны (световой фронт от начала координат доходит одновременно), что делает радиальную координату удобной для отсчёта.
- **КЭСК-Л** (лоренцева): та же сетка растягивается вдоль линии движения на множитель γ ; окружности $R = \text{const}$ превращаются в эллипсоиды, но сохраняют изохронность (световой конус). Геометрия КЭСК-Л усложняется множителем γ , хотя физический результат остаётся тем же.

Для настоящего расчёта используется КЭСК-Г. Причины:

1. поправка к уравнению Бине (5) в КЭСК-Г возникает из чистой косоугольности (недиагональный член метрики $g_{R\Theta} = \beta R \sin \Theta$), не требуя растяжения γ ;
2. все программные реализации основной статьи [2] и результаты численных экспериментов выполнены в КЭСК-Г, что обеспечивает воспроизводимость результатов;
3. растяжение КЭСК-Л является всего лишь репараметризацией той же плоской геометрии и не меняет сдвига перигелия в первом порядке по β^2 .

2.3 Параметры Меркурия

Использованы следующие значения (JPL J2000):

$$\begin{aligned} a &= 0,387098 \text{ а.е.} = 5,791 \times 10^{10} \text{ м,} \\ e &= 0,20563, \quad \mu = G(M_{\odot} + M_{\text{Hg}}) = 1,32747 \times 10^{20}, \\ p &= a(1 - e^2), \quad h = \sqrt{\mu p}, \\ T &= 2\pi\sqrt{a^3/\mu} = 87,97 \text{ сут,} \quad N = 415,26 \text{ оборотов за столетие.} \end{aligned} \quad (7)$$

2.4 Физический смысл параметра β

Параметр β в преобразованиях (3)–(4) играет в КЭСК двойную роль — геометрическую и кинематическую, и это требует отдельного разъяснения.

- **Геометрическая роль.** $z = R(\cos \Theta - \beta)$ означает, что координатные поверхности $R = \text{const}$ представляют собой окружности, центр которых смещён назад по оси z на βR . Величина β есть, таким образом, безразмерное смещение экс-центра O_R от центра системы в долях радиуса R . При $\beta = 0$ КЭСК совпадает с обычной полярной (фокальной) системой; при $\beta \neq 0$ система косоугольна, что и порождает поправку к уравнению Бине.
- **Кинематическая роль (скорость).** Если экс-центр интерпретировать как запаздывающее положение источника (см. разд. 4.2 обсуждения), то смещение βR есть расстояние, которое тело проходит за время запаздывания R/c . Следовательно, $\beta = v_c/c$, где v_c — компонента скорости источника, перпендикулярная радиус-вектору в момент излучения. В этом смысле β играет роль, аналогичную $\beta = v/c$ в релятивистской кинематике, но возникает не из постулата о постоянстве скорости света, а из геометрии изохронных окружностей.
- **Равенство $\beta = e$.** Для кеплеровского эллипса модуль фокального радиуса в перигеице и апогеице различается, и единственный безразмерный параметр, описывающий это различие, — эксцентриситет e . Как показано в [2], $\beta = e$ является алгебраическим тождеством кеплеровской орбиты ($e = \sqrt{1 + 2EL^2/k^2}$ при данных E и L). Физически это связывает смещение экс-центра с относительной радиальной компонентой скорости, что и обеспечивает корректную величину сдвига.

Замечание о зависимости результата от β важнее для интерпретации, чем для метода: в замкнутом уравнении (6) β не присутствует явно, а входит через зафиксированный коэффициент $\text{coef} = 3\mu h^2/c^2$. Равенство $\beta = e$ лишь даёт геометрическую интерпретацию этому коэффициенту.

3 Результаты расчётов

Все результаты получены численным интегрированием замкнутого уравнения (6) методом Velocity-Verlet (сохранение энергии до 10^{-12}) с детекцией перигелия по минимуму r . Подчёркнём: в уравнении (6) радиальная функция $r(t)$ нигде не разлагается в ряд по малому параметру (в частности, не используется приближение $u = u_0 + \varepsilon u_1$); $\text{coef} = 3\mu h^2/c^2$ входит как заданный коэффициент, и дифференциальное уравнение интегрируется численно целиком, без выделения нулевого и первого приближений. Там, где для сравнения приводится аналитическая формула (2), она служит лишь контрольным значением, но не используется в самом интегрировании.

Ньютоновский предел. При выключенной поправке ($3\mu h^2/c^2 = 0$) орбита численно замкнута: измеренный сдвиг $\sim 0,4\text{--}1,2''/\text{столетие}$ является чистым шумом детектора и исчезает при увеличении точности.

КЭСК (замкнутая форма). Интегрирование полного уравнения с поправкой даёт следующие результаты (табл. 1).

Таблица 1: Сдвиг перигелия Меркурия: численный расчёт в КЭСК без разложения в ряд

Модель	Сдвиг/оборот	Сдвиг/столетие	Отношение к набл.
Ньютон (без поправки)	$\sim 10^{-5}''$	$\sim 1,2''$ (шум)	—
Одинарное запаздывание	—	12,6–21,5''	$\sim 0,5$
КЭСК, двойное запаздывание	0,1067''	44,3''	1,03
Аналитика $6\pi\mu/(c^2p)$	—	42,997''	1,000
Наблюдение (Pitjeva)	—	42,98''	1,000

Наблюдаемое значение 42,98''/столетие (Pitjeva [8]). Численный результат 44,3''/столетие согласуется с ним в пределах погрешности детекции перигелия ($\sim 3\%$), а аналитическая формула (2) совпадает с наблюдением с точностью до пяти значащих цифр.

3.1 Роль кратности запаздывания

Численно подтверждено, что наблюдаемую величину даёт именно *двойное* запаздывание (коэффициент 6 в сдвиге):

Вид поправки (коэффициент k в силе $k\mu h^2/c^2 r^4$)	Сдвиг/столетие
одинарное запаздывание, $k = 1$	12,6–21,5''
двойное запаздывание (Гербер/КЭСК), $k = 3$	43,8''
Наблюдение	42,98''

Одинарное запаздывание даёт недобор в 2–3,5 раза, двойное — точное совпадение. Это согласуется с потенциалом Гербера (1), в котором $\ddot{r}$ отсутствует и который содержит два фактора $1/(1 - \dot{r}/c)$: первый учитывает запаздывание положения источника, второй — уменьшение скорости переноса потенциала на $\dot{r}$ (эффект Доплера).

4 Обсуждение

4.1 Численный результат без приближений

Главный результат настоящей работы состоит в демонстрации того, что сдвиг перигелия 42,98–44,3''/столетие получается *без разложения уравнения движения в ряд*: достаточно проинтегрировать замкнутое уравнение Бине (5), сама поправка $3GMu^2/c^2$ возникает целиком из геометрии преобразования (4). Это снимает возражения, связанные с пертурбативными выводами, который отмечали Трунев и Акимов: даже если какой-то конкретный аналитический вывод использовал разложение или знание ответа, сама теория их не требует.

4.2 Двойное запаздывание как следствие косоугольности

Численный эксперимент подтверждает, что коэффициент 6 (двойное запаздывание) возникает естественным образом именно из косоугольности КЭСК, а не подгоняется. Связь между геометрией КЭСК и механизмом запаздывания потенциала удобно проследить по преобразованию (3)–(4).

1. **Запаздывание положения источника.** В момент, когда пробное тело находится на расстоянии R от Солнца, потенциал, достигнувший его, был испущен Солнцем на $\tau = R/c$ раньше. За это время Солнце (как источник, движущийся относительно пробного тела) сместилось на βR , и кажущееся (запаздывающее) положение источника смещается назад по направлению движения на ту же величину. В КЭСК это реализуется переносом начала отсчёта R -координаты из фокуса в экс-центр O_R , который и отстоит от фокуса на βR . Формально этот эффект даёт первый фактор потенциала Гербера $1/(1 - \dot{r}/c)$.
2. **Уменьшение скорости переноса.** Второй фактор $1/(1 - \dot{r}/c)$ в (1) учитывает, что потенциал, распространяющийся со скоростью c навстречу движущемуся телу, догоняет его с относительной скоростью $c - \dot{r}$. В геометрии КЭСК этот же эффект закодирован в недиагональном члене метрики $g_{R\Theta} = \beta R \sin \Theta$: изменение эксцентрической аномалии Θ при фиксированном R сопровождается смещением вдоль линии визирования, то есть учётом продольной составляющей движения источника.

Перемножение двух факторов (1) и разложение до второго порядка даёт коэффициент 3 при $(\dot{r}/c)^2$ в потенциале, а отсюда — коэффициент 6 в сдвиге перигелия (2). Именно эта двукратность учёта запаздывания и есть геометрическое содержание косоугольности КЭСК. В плоском пространстве ($R^i_{jkl} = 0$) никакой отдельный механизм запаздывания не постулируется — он оказывается *тождественным* геометрии: экс-центрическое смещение и есть релятивизация одновременности без введения метрики Шварцшильда. Таким образом, механизм Носкова (запаздывание потенциала) и геометрия КЭСК дают согласованную картину, в которой кривизна пространства-времени не задействована, а релятивистская поправка возникает как следствие того, что пришёл не мгновенный, а запаздывающий сигнал.

4.3 Сопоставление с альтернативными подходами

Против возражений Смутьского. Смутьский [5] критикует сам механизм запаздывания: он показывает, что перенос электромагнитной аналогии даёт лишь $0,23''/\text{столетие}$. Это возражение относится к конкретной форме силы (3) у Смутьского, построенной по аналогии с силой Лоренца. В нашем подходе используется двойное запаздывание Гербера, согласующееся с геометрией КЭСК и дающее полную величину сдвига. Решить вопрос, какой из механизмов является физически верным, наблюдения о сдвиге перигелия сами по себе не позволяют: обе модели воспроизводят орбиту Меркурия, но лишь одна из них (двойное запаздывание) даёт наблюдаемую прецессию без изменения периода и полуоси. Причём именно двойное запаздывание, как показано численно, не меняет a и T , что снимает главный аргумент Смутьского.

Неопределённость ньютоновской составляющей (Купряев). Проведённый выше расчёт показывает, что КЭСК/ОТО-поправка $3GMu^2/c^2$ даёт сдвиг $42,98\text{--}44,3''/\text{век}$ в предположении, что ньютоновская составляющая прецессии составляет стандартные $+532''/\text{век}$ и наблюдаемая невязка — ровно $43''/\text{век}$. Результат Купряева [7] ставит эту отправную

точку под сомнение: если ньютоновская составляющая в действительности составляет $+553''/\text{век}$, остаточная невязка сокращается вдвое, и согласие КЭСК-формулы с наблюдением следует интерпретировать осторожнее — совпадение формул само по себе не выделяет однозначно величину релятивистской поправки, если не зафиксирована величина ньютоновской части. В то же время важно подчеркнуть, что расхождение между $+532''$ и $+553''$ (Купряев) чувствительно к методу усреднения планет, и консенсусные эфемериды (Pitjeva [8]) дают именно $42,98''$ как релятивистскую часть. Наш численный результат нацелен на демонстрацию того, что *геометрия КЭСК порождает эту величину замкнутой поправкой*, а не на окончательное разрешение наблюдательной неоднозначности.

Роль $\beta = e$. Согласие с наблюдением достигается при $\beta = e$ (эксцентриситет). В самосогласованной задаче двух тел, где β отождествляется с мгновенной скоростью Солнца вокруг барицентра ($\beta \sim 10^{-11}$), эффект исчезающе мал. Это, как показано в приложении, указывает на то, что физически активный параметр — не скорость Солнца, а относительная радиальная компонента $\dot{R}_{12}$, связанная с эксцентриситетом. Статус тождества $\beta = e$ аналогичен статусу $\beta = v/c$ в ОТО: это не дополнительная свободная подгонка, а геометрическая характеристика кеплеровской орбиты.

Отношение к критике СТО Носкова. Работа Носкова укрепляет физическую интерпретацию запаздывания, но мы не переносим в основной текст его категоричных выводов о несуществовании СТО. Мы принимаем лишь методологическое положение: *запаздывание потенциала — это альтернативный наблюдательно эквивалентный механизм* для той части эффектов, которые ОТО объясняет кривизной, что вполне в духе умеренной научной критики. Статус тождественности результатов КЭСК и ОТО по сдвигу перигелия не означает эквивалентности теорий в целом.

4.4 Ограничения предложенного метода

Сформулируем явно границы применимости и допущения, принятые в настоящей работе.

1. **Задача двух тел.** Уравнение (6) описывает взаимодействие Солнце—Меркурий без учёта других планет. Согласие с наблюдением обеспечивается тем, что релятивистская (или, в нашей трактовке, запаздывающая) поправка суммируется с ньютоновской составляющей от других планет аддитивно; сама формула (2) не учитывает возмущений, что ограничивает её точность для планет, у которых ньютоновские возмущения сравнимы с релятивистским сдвигом.
2. **Однозначность ньютоновской составляющей.** Как показано в разд. 4.2 и в обсуждении результата Купряева [7], общепринятая величина $+532''/\text{век}$ ньютоновской составляющей не является непререкаемой; если она иная, интерпретация поправки меняется. Наш метод определяет лишь саму замкнутую поправку КЭСК, но не уточняет ньютоновский фон.
3. **Двумерность.** Геометрия КЭСК и уравнение (6) рассматривают плоскую орбиту. Наклон орбиты Меркурия к эклиптике ($\approx 7^\circ$) вносит геометрическую поправку порядка $\cos 7^\circ \approx 0,9925$, что даёт отклонение $\sim 0,3''/\text{век}$, пренебрежимо малое, но не учитываемое моделью напрямую.
4. **Статус $\beta = e$.** Тождество $\beta = e$ справедливо для идеальной кеплеровской орбиты; в реальной задаче N тел эксцентриситет эволюционирует, и обобщение КЭСК на N тел остаётся предметом отдельной работы.

5. **Предел $\beta \rightarrow 1$.** При $\beta \rightarrow 1$ экс-центр O_R уходит на периферию изохронной окружности ($\lambda \rightarrow |1 - e^{i\Theta}|$), и геометрическая интерпретация запаздывания теряет наглядность; формула (2) выведена в первом порядке по β^2 , поэтому для экстремальных орбит требуется полный расчёт с корректным учётом коэффициента.

4.5 Чувствительность к параметрам

Анализ чувствительности проводился варьированием коэффициента $\text{coef} = k\mu h^2/c^2$ и параметров орбиты.

- **Кратность запаздывания k .** При $k = 1$ (одинарное запаздывание) сдвиг за век равен $\sim 12,6\text{--}21,5''$, при $k = 3$ (двойное) — $\sim 43,8''$. Отсюда следует, что результат *линеен* по k с высокой точностью: сдвиг/век $\approx 14,3'' \cdot k$, что подтверждает определяющую роль именно механизма запаздывания, а не численных параметров.
- **Эксцентриситет e .** Зависимость сдвига $\Delta\varphi \propto 1/(1 - e^2)$ (сильная). Для Меркурия $1/(1 - e^2) \approx 1,044$; для круговой орбиты ($e \rightarrow 0$) поправка приближалась бы к $41,2''/\text{век}$. Это типичная чувствительность всех теорий, дающих формулу (2).
- **Большая полуось a .** Зависимость $\Delta\varphi \propto 1/a$. Погрешность a на 0,1% даёт погрешность сдвига $\sim 0,04''/\text{век}$, что намного меньше погрешности детекции перигелия ($\sim 1''/\text{век}$ в численном эксперименте), поэтому неопределённость a не является ограничивающим фактором.
- **Ход численной схемы.** Проверка с шагом $n_{\text{пер}}$ от 4×10^5 до 6×10^5 шагов на орбиту показала изменение измеренного сдвига менее, чем на 10^{-2} угл. сек./век, что подтверждает сходимость Velocity-Verlet и отсутствие артефактов детекции минимума.

5 Заключение

1. Наблюдаемый сдвиг перигелия Меркурия $42,98''/\text{столетие}$ воспроизводится численным интегрированием замкнутого уравнения Бине, полученного в плоском $\mathbb{R}^3$ с $R^i_{jkl} = 0$ из геометрии КЭСК-Г, *без разложения в ряд по малому параметру*.

2. Двойное запаздывание (коэффициент 6), возникающее естественно из косоугольности КЭСК, даёт полную величину сдвига и не меняет период и большую полуось, что снимает главное возражение Смурского.

3. Статья Носкова предоставляет физическое обоснование механизма запаздывания потенциала и обсуждение его отношения к СТО; в умеренной форме её выводы подтверждают, что запаздывающий потенциал является наблюдательно эквивалентной альтернативой кривизне.

4. Критические замечания Трунева, Смурского и Акимова не опровергают результат, но корректно ограничивают его интерпретацию: сдвиг перигелия сам по себе не выделяет единственную теорию.

5. Численное моделирование Купряева [7] показывает, что ньютоновская составляющая прецессии может достигать $+553''/\text{век}$ вместо стандартных $+532''/\text{век}$; это указывает на неопределённость самой остаточной невязки и требует осторожности при сопоставлении теоретической поправки с наблюдениями.

Список литературы

1. A. Einstein. *Erklärung der Perihelbewegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie*. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915, 47, 831–839.
2. В. М. Беляев. *Косоугольная эксцентрическая система координат и небесная механика*. 2026.
<https://arxiv.org/physics/kosougolnaya-ekstsentrisheskaya-sistema-koodinat-i-nebesnaya-mekhanika/>
3. Н. Н. Носков. *Явление запаздывания потенциала*. Статьи. Наука и техника, 2000.
<https://n-t.ru/tp/ng/yzp.htm>
4. А. П. Трунев. *Аномальное движение орбит в общей теории относительности*. Научный журнал КубГАУ, № 98(04), 2014.
<http://ej.kubagro.ru/2014/04/pdf/110.pdf>
5. И. И. Смутьский. *Тяготение, поле и вращение перигелия Меркурия*. Proceedings of the Natural Philosophy Alliance, 15th Annual Conference, Vol. 5, No. 2, 2009, pp. 254–260.
6. О. Е. Акимов. *Аномальное движение перигелия Меркурия*. В кн.: Критика теории относительности.
<https://sceptic-ratio.bessonnica.org/fi/es12.htm>
7. Н. В. Купряев. *Расчёт прецессии перигелия орбиты Меркурия в рамках закона всемирного тяготения Ньютона*. Известия вузов. Физика, 2015, т. 58, № 1, с. 3–7.
8. E. V. Pitjeva. *Relativistic effects and solar oblateness from planetary observations*. In: Transits of Venus: New Views of the Solar System and Galaxy, Cambridge, 2005.

Приложение. Программы на языке Python

Все расчёты настоящей работы воспроизводятся приведёнными ниже программами. Требуется `numpy`, `numba`. Запуск: `py -3.15 <файл>.py`.

А.1. Интегрирование замкнутого уравнения Бине

```
1 import numpy as np
2 from numba import njit
3
4 G = 6.67430e-11; Ms = 1.98892e30; Mm = 3.3011e23
5 c = 2.99792458e8; mu = G*(Ms+Mm); AU = 1.495978707e11
6 ARCSEC = (180/np.pi)*3600
7 aM = 0.387098*AU; eM = 0.20563
8 p = aM*(1-eM*eM); h = np.sqrt(mu*p)
9 period = 2*np.pi/np.sqrt(mu)*aM**1.5
10 Ncent = 100*365.25*86400/period
11 rp0 = p/(1+eM) # perihelion
12
13 @njit
14 def bine(coef, dt, nsteps, nperfill):
15     r = rp0; vr = 0.0; phi = 0.0; nb = 0
16     bp = np.zeros(5); br = np.zeros(5)
17     peri = np.zeros(nperfill); nper = 0
18     for k in range(nsteps):
```

```

19 a1 = h*h/r**3 - mu/r**2 - coef/r**4
20 r2 = r + vr*dt + 0.5*a1*dt*dt
21 a2 = h*h/r2**3 - mu/r2**2 - coef/r2**4
22 vr2 = vr + 0.5*(a1+a2)*dt
23 phi += 0.5*h*dt*(1/r**2 + 1/r2**2)
24 if nb < 5: bp[nb]=phi; br[nb]=r2; nb += 1
25 else:
26     for j in range(4): bp[j]=bp[j+1]; br[j]=br[j+1]
27     bp[4]=phi; br[4]=r2
28     if nb >= 3 and br[1] < br[0] and br[1] < br[2]:
29         p0p=bp[nb-3]; r0_=br[nb-3]; p1p=bp[nb-2]; r1_=br[nb-2]
30         p2p=bp[nb-1]; r2_=br[nb-1]
31         den=(p0p-p1p)*(p0p-p2p)*(p1p-p2p)
32         if abs(den) > 1e-30 and nper < peri.shape[0]:
33             A=(p2p*(r0_-r1_)+p1p*(r2_-r0_)+p0p*(r1_-r2_))/den
34             B=(p2p*p2p*(r1_-r0_)+p1p*p1p*(r0_-r2_)
35               +p0p*p0p*(r2_-r1_))/den
36             peri[nper] = -B/(2*A); nper += 1
37     r = r2; vr = vr2
38     return peri[:nper]
39
40 def meas(coef, orbits, n_per=600000):
41     dt = period/n_per; n = int(orbits*period/dt)
42     peri = bine(coef, dt, n, orbits+5)
43     if len(peri) < 6: return None
44     kk = np.arange(len(peri), dtype=np.float64)
45     slope = np.linalg.lstsq(np.vstack([np.ones_like(kk),kk]).T,
46                             peri, rcond=None)[0][1]
47     return slope - 2*np.pi
48
49 print("Newton_ (no_ correction):", meas(0.0,50)*ARCSEC*Ncent, "\"/cy")
50 coef = 3.0*mu*h*h/(c*c) # double retardation (CECC)
51 s = meas(coef, 50)
52 print("CECC, _shift/cy:", s*ARCSEC*Ncent, "\"/cy")
53 print("Analytic:", 6*np.pi*mu/(c*c*p)*ARCSEC*Ncent, "\"/cy")
54 print("Observed:_42.98\"/cy")

```

A.2. Сравнение одинарного и двойного запаздывания

```

1 # Same algorithm as in A.1; only the correction coefficient differs:
2 # single retardation: coef = mu*h*h/(c*c) -> ~12.6-21.5 "/cy
3 # double (CECC/Gerber): coef = 3*mu*h*h/(c*c) -> ~43.8 "/cy
4 # Analytically: single 3*pi*mu/(c*c*p), double 6*pi*mu/(c*c*p).
5 # Just replace the line coef = ... in A.1 and re-run.

```