Близкодействие и задача двух тел

Владимир Браун

11.12.2020, 2026

Закон всемирного тяготения, понимаемый как непосредственное взаимодействие тел, это лишь внешняя сторона явления. Истинная же суть явления состоит в том, что каждое тело взаимодействует с полем тяготения другого тела. Тяготение, как и всякое другое взаимодействие, есть близкодействие.

С этой точки зрения известная формула выражающая закон всемирного тяготения,

$$F = \mathrm{G}\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

есть объединение двух, почти одинаковых, формул:

$$F_1 = \frac{\mathrm{G}m_1}{r^2}m_2 \quad \text{и} \quad F_2 = \frac{\mathrm{G}m_2}{r^2}m_1,$$

где $\frac{\mathrm{G}m_1}{r^2}$ и $\frac{\mathrm{G}m_2}{r^2}$ – напряжённость поля тяготения, по размерности и величине совпадающая с гравитационным ускорением.

Рассмотрим с точки зрения близкодействия задачу двух тел – задачу о движении двух гравитационно-связанных тел.

При её решении мы исходим из того, что нам известны закономерности кеплерового движения – закономерности движения тела в центральном поле тяготения, или, по-другому – закономерности движения лёгкого пробного тела в поле тяготения массивного центрального тела [1]. Зная эти закономерности, мы хотим выяснить, как будут двигаться тела с равноправными массами.

С точки зрения непосредственного взаимодействия тел задача кажется сложной. Так как массы равноправны, то никакое из тел не может быть центральным. Система отсчёта связанная с любым из тел неинерциальна, и поведение другого тела в ней кажется непредсказуемым.

С другой стороны, при отсутствии внешних сил суммарный импульс системы тел, приложенный к центру масс, или центру инерции, сохраняется – центр масс движется по инерции, и невращающаяся система отсчёта связанная с центром масс инерциальна. Естественным образом возникает идея: обобщить кеплерово движение, т.е. движение в поле центрального тела, на движение в системе отсчёта связанной с центром масс.

Здесь нам на помощь приходит изложенное выше представление об истинной сути гравитационного взаимодействия тел. На самом деле, каждое из тел ничего не знает о другом теле и просто взаимодействует с полем тяготения в месте своего нахождения. Откуда исходит это поле – тело не знает. Поэтому мы можем считать, что поле исходит из центра масс.

Таким образом мы приходим к вопросу: тело какой массы в центре инерции создаст в месте нахождения одного тела поле той же напряжённости что создаёт второе тело? Назовём такое тело в центре инерции равносильным (второму телу).

Для каждого из двух тел заменим другое тело равносильным ему телом в центре инерции. Тогда каждое из тел будет двигаться в поле центрального тела, и задача двух тел распадётся на две отдельные задачи о движении тела в центральном поле:

$$m_1 \text{ ..... } m_2$$

$$\downarrow\downarrow$$

$$m_1 \text{ ..... } M_2$$

$$M_1 \text{ ..... } m_2$$

Центр масс, или центр инерции, двух тел определяется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} r = r_1 + r_2 \\ r_1 m_1 = r_2 m_2 \end{aligned}\right\},$$

откуда получаем:

$$r_1 = r\frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{и} \quad r_2 = r\frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Приравняем теперь силу, с которой равносильная масса M_1 притягивает тело m_2, к силе притяжения тел:

$$\mathrm{G}\frac{M_1 m_2}{r_2^2} = \mathrm{G}\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

откуда получаем для M_1 выражение:

$$M_1 = \frac{m_1 r_2^2}{r^2}.$$

Подставив сюда $\frac{r_2}{r} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$, получим для M_1 окончательно:

$$M_1 = \frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Аналогично для M_2 получаем выражение:

$$M_2 = \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Заметим, что полученные выражения не зависят от расстояния между телами и имеют размерность массы. Равносильное тело в центре инерции действительно возможно.

Итак, два гравитационно-связанных тела движутся в системе отсчёта связанной с центром инерции тел таким образом, как будто каждое из тел движется в центральном поле расположенного в центре инерции тела равносильного другому телу. Каждое тело движется по (своему) эллипсу, один из фокусов которого находится в центре инерции.

Получив решение задачи в барицентрической системе отсчёта, мы можем теперь вернуться к вопросу о движении тел в относительной системе отсчёта – невращающейся системе отсчёта связанной с одним из тел.

Мы имеем для расстояния между телами выражения:

$$r = r_1 \frac{m_1 + m_2}{m_2} \quad \text{и} \quad r = r_2 \frac{m_1 + m_2}{m_1},$$

т.е. расстояние между телами в любой момент времени пропорционально расстоянию любого из тел от центра инерции (центра масс, барицентра).

Так как в барицентрической системе отсчёта тела движутся по эллипсам, то из этой пропорциональности расстояний следует, что и в относительной системе отсчёта связанной с одним из тел, другое тело также движется по эллипсу, подобному любому из "барицентрических" эллипсов.

Таким образом, имея решение в барицентрической системе отсчёта, мы вместе с тем имеем решение и в относительной системе отсчёта.

Однако, воспользовавшись полученными соотношениями, мы можем получить и прямое решение задачи двух тел в относительной системе отсчёта.
Заметим, что период обращения тела не зависит от системы отсчёта. Движение тела в разных системах отсчёта это не разные движения, но лишь разные точки зрения на одно и то же движение. Т.е. период обращения в барицентрической и относительной системе отсчёта один и тот же.
Воспользуемся этим обстоятельством для получения решения задачи двух тел в относительной системе отсчёта.

Напомню, что период обращения тела в центральном поле массы M даётся формулой:

$$T = \pi \sqrt{\frac{(a+p)^3}{2GM}},$$

где a и p – апоцентр и перицентр эллиптической траектории тела, сумма которых равна большой оси эллипса.

В случае задачи двух тел, для периода обращения тела m_2 вокруг тела M_1 в центре инерции, имеем соответственно:

$$T = \pi \sqrt{\frac{(a_2 + p_2)^3}{2GM_1}}.$$

И имеем также соотношения:

$$M_1 = \frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2} \quad \text{и} \quad r_2 = r \frac{m_1}{m_1 + m_2},$$

а поскольку a и p – суть максимальное и минимальное значение r, то имеем также и

$$a_2 + p_2 = (a + p) \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Поэтому период обращения двух тел может быть представлен в виде:

$$T = \pi\sqrt{\frac{(a_2 + p_2)^3}{2GM_1}} = \pi\sqrt{\frac{\left((a+p)\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\right)^3}{2G\dfrac{m_1^3}{(m_1+m_2)^2}}} = \pi\sqrt{\frac{(a+p)^3}{2G(m_1+m_2)}}.$$

Что можно интерпретировать так, что период обращения в относительной системе отсчёта (в которой большая ось траектории равна $a + p$) есть период обращения в центральном поле тела массой $m_1 + m_2$.

Таким образом, в относительной системе отсчёта, связанной с одним из тел, второе тело движется так, как будто оно движется в центральном поле тела массой $m_1 + m_2$.

Как видим, представление о гравитационном взаимодействии тел как о близкодействии позволяет получить очень простое решение задачи двух тел, как в системе центра масс, так и в относительной системе отсчёта.

Ссылка

1. Бутиков Е. И. Закономерности кеплеровых движений. 2006.