Ещё одно доказательство теоремы Морлея

Афанасьев А. Н.

29 января 2023 г.

Аннотация

В статье приводится доказательство Теоремы Морлея, основанное на свойствах ориентированных углов.

Теорема Морлея является одной из красивейших теорем геометрии, привлекающих интерес любителей математики начиная со школьников и заканчивая известными математиками. О теореме можно прочитать в известной любителям геометрии книге [1]. Многие проводили часы, дни и даже месяцы в поисках своего доказательства этой теоремы. Некоторые из этих доказательств можно найти в сайте http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/. Так же стоит отметить статьи из отечественных журналов [2], [3].

В настоящей статье приводится еще одно доказательство этой теоремы. Важное место в доказательстве занимает понятие ориентированного угла. Об ориентированных углах можно прочитать в [4].

Теорема 1 *Пусть точки A_0, B_0 и C_0 внутри треугольника ABC таковы, что*

$$\angle B_0AC = \angle C_0AB_0 = \angle BAC_0 = \frac{1}{3}\angle A,$$
$$\angle C_0BA = \angle A_0BC_0 = \angle CBA_0 = \frac{1}{3}\angle B,$$
$$\angle A_0CB = \angle B_0CA_0 = \angle ACB_0 = \frac{1}{3}\angle C.$$

Тогда, треугольник $A_0B_0C_0$ — равносторонний.

Доказательство. Пусть $\frac{1}{3}\angle A = \alpha$, $\frac{1}{3}\angle B = \beta$ и $\frac{1}{3}\angle C = \gamma$. Тогда $\alpha + \beta + \gamma = 60°$.

Далее, пусть точки A_1 A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 — точки пересечения прямых, выходящих из вершин данного треугольника и делящих углы при этих вершинах на три равные части, с прямыми A_0B_0, A_0C_0 и C_0B_0, как показано на рисунке 1, и пусть

$$\angle BA_1B_2 = \alpha_1,\ \angle C_1A_2C = \alpha_2,$$
$$\angle CB_1C_2 = \beta_1,\ \angle A_1B_2A = \beta_2,$$
$$\angle AC_1A_2 = \gamma_1,\ \angle B_1C_2B = \gamma_2.$$

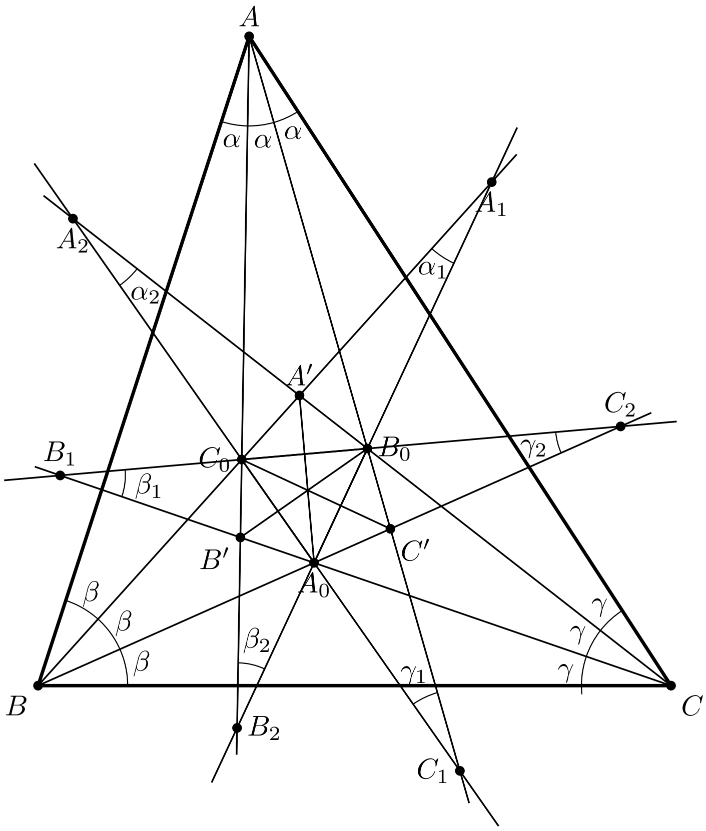

Рис. 1

Так как у треугольников ABC_0 и $A_1B_2C_0$ общий внешний угол при вершине C_0, то

$$\alpha_1 + \beta_2 = \alpha + \beta. \tag{1}$$

Аналогично:

$$\beta_1 + \gamma_2 = \beta + \gamma \tag{2}$$

$$\alpha_2 + \gamma_1 = \alpha + \gamma. \tag{3}$$

Пусть A' — точка пересечения прямых BA_1 и CA_2, B' — точка пересечения прямых AB_2 и CB_1, C' — точка пересечения прямых AC_1 и BC_2.

Так как A_0 — точка пересечения биссектрис треугольника $BA'C$, то

$$\angle BA'A_0 = \angle A_0A'C = 90^\circ - \beta - \gamma. \tag{4}$$

Аналогично:

$$\angle B_0B'C_0 = \angle A_0B'B_0 = 90^\circ - \alpha - \gamma \tag{5}$$

$$\angle B_0C'C_0 = \angle C_0C'A_0 = 90^\circ - \alpha - \beta. \tag{6}$$

Найдем угол между прямыми A_0A' и B_0B':

$$\begin{aligned}\measuredangle(A_0A', B_0B') &= \measuredangle(A_0A', CA_2) + \measuredangle(CA_2, CB_1) + \measuredangle(CB_1, B_0B') = \\ &= (90^\circ - \beta - \gamma) + \gamma + (90^\circ - \alpha - \gamma) = \\ &= 180^\circ - \alpha - \beta - \gamma = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ. \quad (7)\end{aligned}$$

Аналогично:

$$\begin{aligned}\measuredangle(C_0C', A_0A') &= \measuredangle(C_0C', AC_1) + \measuredangle(AC_1, CA_2) + \measuredangle(CA_2, A_0A') = \\ &= -(90^\circ - \beta - \alpha) + (\alpha + \gamma) - (90^\circ - \beta - \gamma) = \\ &= -180^\circ + 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = -180^\circ + 120^\circ + 180^\circ = 120^\circ \quad (8)\end{aligned}$$

и следовательно,

$$\begin{aligned}\measuredangle(B_0B', C_0C') &= \measuredangle(B_0B', A_0A') + \measuredangle(A_0A', C_0C') = \\ &= 180^\circ - 120^\circ + 180^\circ - 120^\circ = 120^\circ. \quad (9)\end{aligned}$$

Далее выразим углы $\angle C'C_0B_0$ и $\angle C_0B_0B'$:

$$\begin{aligned}\angle C'C_0B_0 &= \measuredangle(C_0C', B_1C_2) = \\ &= \measuredangle(C_0C', BC_2) + \measuredangle(BC_2, CB_1) + \measuredangle(CB_1, B_1C_2) = \\ &= (90^\circ - \alpha - \beta) - (\beta + \gamma) + \beta_1 = \\ &\quad 90^\circ - \alpha - 2\beta - \gamma + \beta_1 = 30^\circ - \beta + \beta_1, \quad (10)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\angle C_0B_0B' &= \measuredangle(B_1C_2, B_0B') = \\ &= \measuredangle(B_1C_2, CB_1) + \measuredangle(CB_1, B_0B') = \\ &= -\beta_1 + (90^\circ - \alpha - \gamma) = 30^\circ - \beta + \beta_1. \quad (11)\end{aligned}$$

Из (10) и (11) следует, что $\angle C'C_0B_0 = \angle C_0B_0B'$. Следовательно,

$$\angle C'C_0B_0 = \angle C_0B_0B' = 30^\circ. \quad (12)$$

Аналогично докажем, что

$$\angle B'B_0A_0 = \angle B_0A_0A' = 30^\circ \quad (13)$$

и

$$\angle A'A_0C_0 = \angle A_0C_0C' = 30^\circ. \quad (14)$$

Из (12), (13) и (14), учитывая (7), (8) и (9) следует, что

$$\angle B_0A_0C_0 = \angle C_0B_0A_0 = \angle A_0C_0B_0 = 60^\circ. \quad (15)$$

После знакомства с этой теоремой возникает естественный вопрос: «какой четырехугольник получится, построенном аналогичным образом в произвольном четырехугольнике?» Проверка показывает если в теореме Морлея поменять исходный треугольник на четырехугольник, то получающийся четырехугольник далеко не всегда квадрат, и даже не всегда четырехугольник в общепринятом смысле. Часто вместо четырехугольника получаем самопересекающуюся замкнутую ломанную.

Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = 3\alpha$, $\angle B = 3\beta$, $\angle C = 3\gamma$, $\angle D = 3\delta$, а точки A_0, B_0, C_0, D_0 внутри него таковы, что

$$\angle BAB_0 = \angle A_0AC = \alpha,$$
$$\angle ABB_0 = \angle CBC_0 = \beta,$$
$$\angle C_0CB = \angle DCD_0 = \gamma,$$
$$\angle D_0DC = \angle ADA_0 = \delta.$$

Далее, учитывая выше сказанное, будем рассматривать только выпуклые четырехугольники, причем такие, $A_0B_0C_0D_0$ — тоже выпуклый четырехугольник. Легко проверить, что если $ABCD$ — квадрат, то и $A_0B_0C_0D_0$ —квадрат. Проверим, может ли оказаться так, что исходный четырехугольник $ABCD$ не является квадратом, а $A_0B_0C_0D_0$ — квадрат.

Предположим, что $A_0B_0C_0D_0$ — квадрат, и пусть $\angle BB_0C_0 = \phi$. Выразим углы неизвестные углы треугольников BC_0B_0, AB_0A_0, DA_0D_0, CD_0C_0 через α, β, γ, δ:

$$\begin{aligned} \angle B_0C_0C &= 180^\circ - \beta - \delta, \\ \angle A_0B_0A &= 360^\circ - 90^\circ - \phi - (180^\circ - \alpha - \beta) = 90^\circ + \alpha + \beta - \phi \\ \angle AA_0B_0 &= 180^\circ - \alpha - (90^\circ + \alpha + \beta - \phi) = 90^\circ - 2\alpha - \beta + \phi \\ \angle D_0A_0D &= 360^\circ - 90^\circ - () \end{aligned}$$

Список литературы

[1] Грейтцер С. Л. Коксетер Г. С. М. *Новые встречи с геометрией.* Наука, 1978.

[2] Яглом И. Тоноян Г. Теорема Морлея. *Квант*, (8), 1978.

[3] Л. Штейнгарц. Снова о теореме Морлея. *Квант*, (5), 2009.

[4] Evan Chen. *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads.* The Mathematical Association of America, 2016.

Афанасьев Александр Николаевич,

доцент кафедры теории и методики обучения математике и информатике

Института математики и информатики
Северо-Восточного Федерального Университета
им. М.К. Аммосова, г. Якутск,
кандидат педагогических наук.
E-mail: an.afanasev@s-vfu.ru, afalnik@mail.ru