

Глобальная теорема о n -мерных близнецах (расширенная версия)

В. П. Воеводов

Аннотация

В работе предлагается новый подход к исследованию структуры множества натуральных чисел на основе концепции альтернативных и связанных числовых множеств, одним из которых является множество простых чисел. Описан метод динамических сит. С помощью предложенной кинематической модели и теории связанных множеств доказывается теорема о бесконечности множеств n -мерных простых близнецов произвольной длины и конфигурации. Если теория связанных множеств расширяет теорему, то теория альтернативных множеств углубляет её, делая теорему глобальной.

Ключевые слова: простые близнецы, простые кортежи, альтернативные множества, связанные множества, связующий код, метод динамических сит.

Keywords: twin primes, prime tuples, alternative sets, bound sets, binding code, dynamic sieve method, arithmetic density.

1 Введение

Классический подход к исследованию распределения простых чисел часто требует значительных вычислительных мощностей и анализа сложных аналитических структур. Долгое время в теории чисел доминировало представление, согласно которому точное описание плотности распределения кортежей высших порядков (таких как квадруплеты и более широкие конфигурации) находится на границе возможностей элементарных методов. Однако детальный численный анализ и интуитивные обобщения позволяют обнаружить масштабные закономерности в распределении простых чисел в отдалённых участках натурального ряда.

Ситуация кардинально меняется с введением концепции альтернативных числовых множеств. В рамках этой теории множество простых чисел перестаёт быть изолированной аномалией: оно оказывается лишь частным случаем («каплей в море») широкого класса альтернативных множеств, подчиняющихся единым фундаментальным законам плотности.

Ключевым шагом, позволившим преодолеть проблему расходимости бесконечных произведений вида $\prod (p_i - n)/p_i$, стало связывание воедино n -мерных множеств близнецов различной конфигурации с произвольными внутренними интервалами. Это

позволило отказаться от вычисления бесконечных асимптотических «хвостов», поскольку они оказываются инвариантными для всех связанных множеств. Возникает прямая аналогия с механическим редуктором: нет практической необходимости подсчитывать абсолютное число зубьев на шестернях, когда определяющую роль играют инвариантные отношения их диаметров.

Разработанный подход позволяет применить методы элементарной комбинаторики к динамическим сдвигам систем вычетов и свести доказательство бесконечности n -мерных близнецов свободной конфигурации к лаконичному и строгому алгоритму — подобно классическому доказательству бесконечности множества простых чисел Евклида. Но сначала потребуется ввести ряд определений.

2 Концепция связующего кода и альтернативных множеств

Каждое натуральное число при своем вхождении в числовой ряд однозначно проецируется на бесконечную систему вычетов по всем простым модулям.

Определение 1. *Связующим кодом (СК) натурального числа x называется бесконечная последовательность его вычетов по модулю всех простых чисел, взятых в порядке их возрастания:*

$$СК(x) = (r_1, r_2, r_3, \dots), \quad (1)$$

где $r_i \equiv x \pmod{p_i}$, а p_i — i -е простое число ($p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$).

Определение 2. *Пересечение двух связующих кодов*

$СК(A) = (a_i)$ и $СК(B) = (b_i)$ не является пустым тогда и только тогда, когда существует хотя бы один общий индекс $i \in \mathbb{N}$, для которого значения координат совпадают:

$$СК(A) \cap СК(B) \neq \emptyset \iff \exists i \in \mathbb{N} : (a_i = b_i) \quad (2)$$

Рассмотрим начальный отрезок СК по базису первых четырех простых чисел: $P = \{2, 3, 5, 7\}$. Произведение этих модулей задает праймориал интервала

$$P_4\# = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$$

. Согласно Китайской теореме об остатках, на любом интервале величиной 210 существует ровно 210 уникальных вариантов СК. Покажем фундаментальную гармонию натурального ряда на данном интервале:

1. Количество СК в диапазоне 210, не содержащих вычета 0 (не делящихся на 2, 3, 5, 7), равно: $210 \cdot 1/2 \cdot 2/3 \cdot 4/5 \cdot 6/7 = 48$. Это прототип множества простых чисел.
2. Количество СК, которые принципиально не содержат вычета 1 на тех же позициях, рассчитывается аналогично: $210 \cdot 1/2 \cdot 2/3 \cdot 4/5 \cdot 6/7 = 48$.

3. Общий закон непересечения: для любого произвольно выбранного фиксированного СК на интервале 210 существует ровно 48 других СК, которые не пересекают его ни по одному элементу (вычету). Эти правила инвариантны для любого интервала величиной 210.

Простые числа отличаются лишь тем, что их СК не пересекается с СК(0), состоящего из одних нулей(рис.1). Однако такому множеству противостоит бесконечный класс множеств, чьи СК не пересекаются с любым (произвольно выбранным) СК(рис.2).

Определение 3. (СК множества) Связующий код множества A (обозначается как $СК(A)$) представляет собой множество, состоящее из связующих кодов отдельных элементов этого множества:

$$СК(A) = \{СК(x) \mid x \in A\} \quad (3)$$

Определение 4. (Условие пересечения СК множества и СК числа). Связующий код множества A пересекается со связующим кодом конкретного числа ω , если в множестве A существует по крайней мере один элемент a_i , индивидуальный связующий код которого имеет непустое пересечение с кодом числа ω :

$$СК(A) \cap СК(\omega) \neq \emptyset \iff \exists a_i \in A : (СК(a_i) \cap СК(\omega) \neq \emptyset) \quad (4)$$

Определение 5. (Альтернативные множества). Числовые множества называются альтернативными, если их связующие коды определены в общей области СК, они обладают равными асимптотическими плотностями, но их структуры ограничены условиями непересечения с различными связующими кодами чисел (альтернативами):

$$СК(A) \cap СК(\omega) = \emptyset, \quad \text{где } \omega \text{ — индивидуальный код-альтернатива.} \quad (5)$$

При этом элементы альтернативных множеств инвариантно подчиняются единому глобальному закону распределения плотности:

$$\mu(A) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{p_i - 1}{p_i} \quad (6)$$

где $\mu(A)$ — асимптотическая плотность множества, а p_i — i -е простое число.

Пусть задана альтернатива:

$$СК(\Omega) = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_i, \dots), \quad \omega_i \in \mathbb{Z}_{p_i} \quad (7)$$

Изменение даже одного знака $\omega_k \rightarrow \omega'_k$ порождает новую альтернативу и новое альтернативное множество A' , для которого:

$$СК(A') \cap СК(\Omega') = \emptyset \quad (8)$$

						16	16
						14	14
						13	13
					12	12	12
					11	11	11
				10	10	10	10
				9	9	9	9
				8	8	8	8
				7	7	7	7
			6	6	6	6	6
			5	5	5	5	5
		4	4	4	4	4	4
		3	3	3	3	3	3
	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0

Рис.1
Область свободы СК простых чисел

							18
							17
						16	16
						15	15
						14	14
						13	13
					12	12	12
					11	11	11
				10	10	10	10
				9	9	9	9
				8	8	8	8
				7	7	7	7
			6	6	6	6	6
			5	5	5	5	5
		4	4	4	4	4	4
		3	3	3	3	3	3
	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0

Рис.2
Произвольная альтернатива(СК = (0, 0, 1, 2, 2, 6, 5, 4...))
и
пространство альтернативных СК

3 Концепция связанных множеств

Определение 6. (*Связанные множества*). Два бесконечных подмножества натуральных чисел называются связанными, если их асимптотические плотности на любом инвариантном интервале числовой прямой соотносятся через постоянный конечный коэффициент $k > 0$:

$$\mu(A_1) = k \cdot \mu(A_2), \quad \text{где } k \in \mathbb{R}^+, k \neq \infty. \quad (9)$$

Такие множества функционируют инвариантно, как шестерни единого механизма: динамика их распределения взаимозависима. Например, множества чисел, кратных 5 и 101, связаны конечным коэффициентом $k = 101/5$.

В рамках регулярных кортежей простых чисел свойства связанных множеств раскрываются следующим образом:

- **Стабильность при степенных сдвигах ($k = 1$):** Пары близнецов с интервалом в две единицы $(a, a + 2)$ и пары с интервалом восемь $(a, a + 8)$ имеют идентичную структуру вычетов по малым простым модулям. Они обладают равной плотностью ($k = 1$) и являются связанными. Для обеспечения эквивалентных начальных условий («старта») конфигураций с различными внутренними интервалами необходимо совмещение центров их симметрии в начальном состоянии модели.
- **Линейное масштабирование плотности ($k = 2$):** Пары с интервалом два $(a, a + 2)$ и пары с интервалом шесть $(a, a + 6)$ обладают различной плотностью. Модуль $p = 3$ блокирует два класса вычетов для интервала 2 (доля выживания составляет $(3 - 2)/3 = 1/3$). Однако для интервала 6, поскольку его длина делится на 3, элементы кортежа попадают в один класс вычетов по модулю 3, освобождая дополнительную фазу. Доля выживания возрастает до $(3 - 1)/3 = 2/3$. Таким образом, их локальные плотности отличаются ровно в конечное число раз ($k = 2$). Они жёстко связаны в детерминированном «редукторе» числовой прямой.
- **Обобщение на n -мерные кортежи произвольной конфигурации:** Произвольные n -мерные близнецы свободной конфигурации могут иметь различные масштабирующие коэффициенты k . Однако коэффициент k всегда остаётся строго конечным. Поскольку любой внутренний интервал кортежа раскладывается на конечное число простых множителей, а общее число элементов в n -мерном кортеже конечно, результирующий коэффициент комбинаторного совмещения рядов всегда выражается конечным числом. Следовательно, все подобные множества асимптотически связаны через конечные коэффициенты.

4 Метод динамических сит

Рассмотрим регулярное множество пар $A_k = \{k, k + 2\}$. Представим две числовые прямые, расположенные вертикально и со смещением по вертикали на две единицы друг относительно друга. Для множества из n элементов строятся n смещенных и совмещенных между собой вертикальных прямых. При этом каждая пара из множества A_k примет строго горизонтальное положение. Представим, что эти прямые жестко связаны в единый блок и синхронно движутся вниз мимо горизонтального и неподвижного луча-детектора(рис.3). Луч мгновенно проверяет пробегающие кортежи чисел на делимость по последовательному базису простых чисел $2, 3, 5, 7, \dots$

При делении на число 7: левое число из 7 случаев делится только в одном, в 6 других — не делится. Правое число также в 6 случаях из 7 не делится. Но так как из-за взаимно простого сдвига они не могут делиться на 7 одновременно, запрет правого числа попадает на один из благоприятных случаев левого. Из 6 вариантов правое число не делится в 5 случаях. То есть в 5 случаях из 7 оба числа одновременно не делятся на 7.

22		24
21		23
20		22
19		21
18		20
17		19
16		18
15		17
14		16
13		15
12		14
11		13
10		12
9		11
8		10
7		9
6		8
5		7
4		6
3		5

Рис.3

Демонстрация метода динамических сит

104		106		110		112
103		105		109		111
102		104		108		110
101		103		107		109
15		17		21		23
14		16		20		22
13		15		19		21
12		14		18		20
11		13		17		19
10		12		16		18
9		11		15		17
8		10		14		16
7		9		13		15
6		8		12		14
5		7		11		13
4		6		10		12
3		5		9		11

Рис.4
Демонстрация метода динамических сит

Для пары доля «выживания» сквозь фильтры луча составляет:

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{9}{11} \cdots = \frac{1}{2} \prod_{i=2}^{\infty} \frac{p_i - 2}{p_i} \quad (10)$$

Для квадруплетов(рис.4): при прохождении через фильтры простых чисел одна из 5 четвёрок просеивается через модуль 5, 3 из 7 четвёрок просеиваются через модуль 7, 7 из 11 — через модуль 11. Общий поток вычисляется бесконечным произведением:

$$\Pi_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{9}{13} \cdots = \frac{1}{6} \prod_{i=3}^{\infty} \frac{p_i - 4}{p_i} \quad (11)$$

Подобный алгоритм применим и для больших размерностей. Нас не интересуют сами вычисления. Нас интересует коэффициент перед знаком произведения. Он будет отличаться для разных конфигураций одной размерности(рис.5–7), но правая часть уравнивает всех независимо от «статуса». Это как шестерни в редукторе: нам не надо считать количество зубьев в шестернях—достаточно знать отношения их диаметров.

4.1 Инвариантность хвостовых структур и проективный анализ кортежей

В силу неразрывного единства альтернативных и связанных числовых множеств, бесконечные произведения вычетов описывают фазовые состояния целостной связанной системы натурального ряда. Необходимо подчеркнуть, что предмет данного исследования лежит за пределами классической теории простых чисел: последние представляют собой лишь частный случай («каплю в море») в невидимом океане альтернативных и связанных множеств. Примеры, оперирующие простыми числами, используются исключительно как репрезентативная демонстрация общих закономерностей.

Рассмотрим подробнее механизм сопоставления на примере двумерных простых кортежей (пар близнецов). Бесконечные произведения плотностей для различных конфигураций (интервалов) отличаются исключительно конечной «головной» частью, структура числителей в которой детерминирована геометрией интервала. При этом длина «головной» части инвариантна относительно абсолютной величины интервала между элементами пары: она находится в строгой функциональной зависимости только от простых делителей, на которые раскладывается данная величина.

Для математической формализации этого свойства применим метод табличной редукции:

1. Сформируем бесконечную систему, содержащую все возможные конечные конфигурации пар простых чисел (или альтернативных элементов).
2. Сопоставим каждой конфигурации её характеристическое бесконечное произведение плотности распределения. Мысленно упорядочим эти цепочки произведений в виде структурированной бесконечной таблицы, где строки расположены строго друг под другом.
3. Заметим, что асимптотический «хвост» бесконечного произведения (за вычетом начального конечного сегмента) полностью совпадает для абсолютно всех строк данной таблицы, независимо от внутренней конфигурации кортежа.

Выполнив операцию нормировки — то есть сократив все бесконечные цепочки произведения на их общую, неизменную «хвостовую» компоненту, — мы элиминируем расходящуюся часть процесса. В результате редукции бесконечная задача сводится к анализу матрицы индивидуальных конечных коэффициентов.

61		69		73		81
59		67		71		79
19		27		31		37
17		25		29		35
15		23		27		33
13		21		25		31
11		19		23		29

Рис.5
Демонстрация с шагом 8–4–8

65		71		77		83
63		69		75		81
61		67		73		79
45		51		57		63
43		49		55		61
41		47		53		59
17		23		29		35
15		21		27		33
13		19		25		31
11		17		23		29
9		15		21		27
7		13		19		25
5		11		17		23

Рис.6
Демонстрация с шагом 6

67		97		127		157
41		71		101		131
39		69		99		129
37		67		97		127
15		45		75		105
13		43		73		103
11		41		71		101
9		39		69		99
7		37		67		97

Рис.7
Демонстрация с шагом 30

5 Глобальная теорема о простых близнецах

Теорема 1. (В. П. Воеводов). Для любого упорядоченного кортежа из n произвольно выбранных простых чисел (или элементов, принадлежащих к альтернативному множеству по отношению к множеству простых чисел), удовлетворяющего условию $n < P_1 < P_2 < \dots < P_n$, задаваемый им фиксированный шаблон расстояний повторяется в натуральном ряду бесконечное число раз.

Доказательство. Применим метод доказательства от противного. Допустим, что для некоторого фиксированного числа элементов n заданный регулярный кортеж имеет лишь конечное число точных копий (двойников) в натуральном ряду. В силу конечности этого подмножества его асимптотическая плотность равна нулю. Из этого предположения следует, что асимптотические плотности всех связанных с ним множеств также должны быть строго нулевыми, поскольку их локальные плотности могут превышать исходную плотность лишь в конечное число раз ($k < \infty$).

Однако данное следствие опровергается следующими детерминированными свойствами системы:

1. Согласно классической теореме Евклида, за любой наперёд заданной границей простые числа продолжают распределяться бесконечно. Из этого бесконечного базиса элементов всегда можно конструктивно выделить подмножества из двух, трёх или произвольных n простых чисел, принадлежащих конкретному связанному множеству.
2. Поскольку плотности альтернативных и связанных множеств инвариантно соотносятся друг с другом через постоянные конечные коэффициенты, непрерывный бесконечный процесс распределения элементов в базисе неизбежно, автоматически и с фиксированной частотой заполняет свободные фазы связанных шаблонов, формируя точные геометрические копии исходного кортежа.

Таким образом, предположение о конечности числа двойников кортежа полностью разрушает жёсткую арифметическую связь между бесконечным базисом простых чисел и структурой связанных множеств, однозначно задаваемых числом n .

Полученное противоречие опровергает исходное допущение. Следовательно, любой n -мерный кортеж свободной конфигурации, удовлетворяющий условию $n < P_1 < P_2 < \dots < P_n$, повторяется в натуральном ряду бесконечное число раз. $\square$

6 Заключение

В данной работе представлен принципиально новый взгляд на основания структурной арифметики и распределение числовых последовательностей. Разработанная концепция альтернативных и связанных множеств, управляемых связующими кодами (СК), позволяет преодолеть традиционный «аналитический барьер» теории чисел. Главный методологический вывод работы заключается в том, что исследование

распределения простых чисел невозможно проводить изолированно: они представляют собой лишь локальную проекцию («каплю в море») глобального, детерминированного океана инвариантных числовых структур.

Метод динамических сит и кинематическая модель редуктора числовой прямой позволили перевести сложнейшую проблему расходимости бесконечных произведений в плоскость конечного комбинаторного анализа. Доказанная Глобальная теорема о n -мерных близнецах свободной конфигурации не только обобщает классические гипотезы о простых кортежах, но и демонстрирует, что высшие теоретико-множественные абстракции (в духе идей Г. Кантора) могут принимать абсолютно конкретные, конструктивные арифметические формы на множестве натуральных чисел. Автор выражает глубокую признательность Заочной юношеской математической школе (ЗЮМШ) при Пермском государственном университете, заложившей фундаментальную базу комбинаторного и теоретико-множественного мышления, сделавшую возможным данное открытие.

Список литературы

- [1] *Евклид. Начала. Книги VII–IX* / Перевод с древнегреческого Д. Д. Мордухай-Болтовского. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. — С. 88–104.
- [2] *Яковлев В. И., Скачкова Е. А. Введение в комбинаторику и теорию множеств: Учебное пособие.* — Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ), 2012. — 114 с.

References

Список литературы

- [1] Euclid, *Elements. Books VII–IX*, Translated by D. D. Mordukhay-Boltovskogo, Moscow-Leningrad: GITTL, 1950, pp. 88–104 (in Russian).
- [2] V. I. Yakovlev, E. A. Skachkova, *Vvedenie v kombinatoriku i teoriyu mnozhestv: Uchebnoe posobie* [Introduction to Combinatorics and Set Theory: A Textbook], Perm: Perm State University, 2012, 114 p. (in Russian).