

БАРИЦЕНТРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ БАРИЦЕНТРИЧЕСКАЯ ГРУППА

М. А. Степанова, канд. физ.-мат. наук, доцент
Российский государственный педагогический
университет им. А. И. Герцена
Санкт-Петербург, Россия
e-mail:ratkebug@yandex.ru

Аннотация. В аффинном пространстве можно ввести барицентрическую систему координат, которая каждой точке пространства сопоставляет упорядоченный набор из чисел, сумма которых равна единице. В статье изучаются матрицы перехода от одной барицентрической системы координат к другой барицентрической системе координат.

Ключевые слова. Аффинное пространство, барицентрическая комбинация точек, симплекс, барицентрическая система координат, барицентрическая группа.

Barycentric coordinate system Barycentric group

M. A. Stepanova, PhD in Maths, Ass. Prof.
Herzen State Pedagogical University

Abstract. In affine space, a barycentric coordinate system can be introduced, which assigns to each point in space an ordered set of numbers whose sum equals one. The article examines the matrices of transition from one barycentric coordinate system to another barycentric coordinate system.

Keywords. affine space, barycentric combination of points, simplex, barycentric coordinate system, barycentric group

1. Барицентрическая комбинация точек.

Пусть $(\check{A}, V^n, \nu)$ – аффинное пространство, где $\check{A}$ – множество точек, V^n – ассоциированное с аффинным пространством n -мерное линейное пространство, $\nu : \check{A} \times \check{A} \rightarrow V^n$ – отображение, сопоставляющее паре точек вектор. Далее примем более привычную запись: вместо $\nu(M, N)$ будем записывать $\overrightarrow{MN}$.

Теорема 1. (см., например [4]). Пусть для точек $A_1, A_2, \dots, A_k, O \in \check{A}$ выполняется следующее равенство $\overrightarrow{OA} = \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{OA_k} (*)$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ и $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1$. Тогда для любой точки $Q \in \check{A}$ справедливо $\overrightarrow{QA} = \lambda_1 \overrightarrow{QA_1} + \lambda_2 \overrightarrow{QA_2} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{QA_k}$.

Итак, соотношение (*) зависит только от расположения точек $A_1, A_2, \dots, A_k$.

Будем говорить, что *точка* A – *барицентрическая комбинация точек* $A_1, A_2, \dots, A_k$ с *коэффициентами* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ и $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1$, если для некоторой точки O выполняется следующее равенство $\overrightarrow{OA} = \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{OA_k}$.

Далее для краткости будем применять следующую запись: $A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k$ ($\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = 1$), которая означает, что точка A это барицентрическая комбинация точек $A_1, A_2, \dots, A_k$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Выражение $\lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{OA_k}$ тоже будем называть барицентрической комбинацией точек $A_1, A_2, \dots, A_k$.

Теорема 2. (см., например [1, 4]) Пусть $A_0, A_1, \dots, A_n$ – точки общего положения в n -мерном аффинном пространстве. Тогда для любой точки M существует и при том только одно представление ее в виде барицентрической комбинации точек $A_0, A_1, \dots, A_n$.

2. Барицентрическая система координат (см., например, [1, 2, 4])

Зафиксируем в n -мерном аффинном пространстве упорядоченный набор $A_0, A_1, \dots, A_n$ точек общего положения. Определим функцию

$$\beta : \check{A} \rightarrow \{(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1\},$$

такую что для каждой точке $M \in \check{A}$

$$\beta(M) = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

если $M = \lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n$, $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$.

Функцию β будем называть *барицентрической системой координат*, а симплекс с вершинами $A_0, A_1, \dots, A_n$ будем называть *базисным симплексом системы координат* β .

Легко видеть, что барицентрическая система координат – это биекция, и по барицентрическим координатам точка аффинного пространства определяется однозначно.

3. Преобразование барицентрических координат. Барицентрическая группа.

Пусть β – барицентрическая система координат с базисным симплексом $A_0 A_1 \dots A_n$, и β' – барицентрическая система координат с базисным симплексом $A'_0 A'_1 \dots A'_n$. Составим матрицу B такую, что в i -м столбце этой матрицы барицентрические координаты точки A'_{i-1} ($i = 1, \dots, n$). Тогда

$$(A_0 \dots A_n)B = (A'_0 \dots A'_n).$$

Пусть $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – барицентрические координаты точки M в системе координат β , $(\lambda'_0, \lambda'_1, \dots, \lambda'_n)$ – барицентрические координаты точки M в системе координат

β' . Тогда

$$(\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_n) = B(\lambda'_0 \lambda'_1 \dots \lambda'_n).$$

Матрицу B будем называть *матрицей перехода от системы координат β к системе координат β'* . Так же матрицу B будем называть *матрицей перехода от базисного симплекса $A_0 \dots A_n$ к базисному симплексу $(A'_0 \dots A'_n)$* . Легко видеть, что сумма элементов в каждом столбце матрицы B равна единице и $\det B \neq 0$.

Теорема 3. Пусть матрица B – квадратная матрица размера $(n+1) \times (n+1)$ такая, что сумма элементов в каждом столбце матрицы B равна единице и $\det B \neq 0$. Тогда в аффинном n -мерном пространстве существуют два базисных симплекса такие, что B – матрица перехода к одного базисному симплексу к другому.

Доказательство.

1) Пусть $A_0, A_1, \dots, A_n$ – точки общего положения в n -мерном аффинном пространстве. Так как сумма элементов в каждом столбце матрицы B равна единице, то существуют точки $A'_0, A'_1, \dots, A'_n$ такие, что барицентрические координаты точки A'_{i-1} элементы i -го столбца этой матрицы.

2) Так как $\det B \neq 0$, то точки $A'_0, A'_1, \dots, A'_n$ – точки общего положения, то есть вершины нового базисного симплекса.

Пусть $B(n) (n \geq 1)$ – множество невырожденных квадратных матриц размера $n \times n$ таких, что сумма элементов в каждом столбце матрицы равна единице.

Теорема 4. $B(n)$ – группа относительно умножения.

Доказательство теоремы 4 представляет собой прямую проверку.

Группу $B(n)$ будем называть *барицентрической группой порядка n* .

Заметим, что в группе $B(n)$ можно выделить подгруппу $SB(n)$ матриц с положительным определителем (аналогично случаю групп $SO(n)$ и $O(n)$).

Два базисных симплекса будем называть *одинаково ориентированными*, если матрица перехода от первого симплекса ко второму имеет положительный определитель.

Легко видеть, что быть одинаково ориентированными – это отношение эквивалентности на множестве базисных симплексов, при этом классов эквивалентности ровно два.

Будем говорить, что *две барицентрические системы координат одинаково ориентированы*, если одинаково ориентированы их базисные симплексы.

Например, на евклидовой плоскости треугольники ABC и BAC ориентированы не одинаково, а треугольники ABC и BCA ориентированы одинаково. В этом случае можно говорить о порядке обхода вершин треугольника по часовой стрелке или против часовой стрелки.

Теорема 5. Пусть $B \in B(n)$. Тогда в каждой строке матрицы B есть хотя бы два различных элемента.

Доказательство.

Предположим, что в матрице есть строка вида $(a \ a \dots a)(a \in \mathbb{R})$. Заметим, что это не нулевая строка, так как $\det B \neq 0$. Так как сумма всех строк в матрице B равна строке $(1 \ 1 \dots 1)$, то строки матрицы B линейно зависимы (строку $(a \ a \dots a)$ можно представить в виде линейной комбинации остальных строк). Получаем противоречие с условием невырожденности матрицы B .

Пусть $Aff(n)$ – группа аффинных преобразований аффинного n -мерного пространства. Каждому элементу группы $Aff(n)$ можно сопоставить элемент барицентрической группы $B(n+1)$, и наоборот, каждому элементу группы $B(n+1)$ можно сопоставить элемент группы $Aff(n)$.

Действительно, пусть $A_0 A_1 \dots A_n$ – n -мерный симплекс. Введем аффинную систему координат с началом в точке A_0 и базисными векторами $\overrightarrow{A_0 A_i}(i = 1, \dots, n)$.

Сопоставим преобразованию $f \in Aff(n)$ матрицу перехода от базисного симплекса $A_0 A_1 \dots A_n$ к базисному симплексу $f(A_0) f(A_1) \dots f(A_n)$. Пусть $A = (a_{ij})$ – матрица линейной части Df преобразования f , $(b_1, \dots, b_n)$ – координаты точки $f(A_0)$. Тогда матрица перехода от базисного симплекса $A_0 A_1 \dots A_n$ к базисному симплексу $f(A_0) f(A_1) \dots f(A_n)$ будет следующая

$$\begin{pmatrix} 1 - \sum_{i=1}^n b_i & 1 - \sum_{i=1}^n (a_{i1} + b_i) & \dots & 1 - \sum_{i=1}^n (a_{in} + b_i) \\ b_1 & a_{11} + b_1 & \dots & a_{1n} + b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n1} + b_n & \dots & a_{nn} + b_n \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, по матрице $B \in B(n+1)$ можно найти симплекс $A'_0 A'_1 \dots A'_n$ такой, что $(A'_0 A'_1 \dots A'_n) = (A_0 A_1 \dots A_n) B$. Существует, и при том только одно аффинное преобразование $f \in Aff(n)$ такое, что $f(A_i) = A'_i (i = 1, \dots, n)$. Запишем матрицу B в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} 1 - \sum_{i=1}^n b_i & 1 - \sum_{i=1}^n b_{i1} & \dots & 1 - \sum_{i=1}^n b_{in} \\ b_1 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

При этом аффинные координаты точки $f(A'_0)$ будут равны $(b_1 \dots b_n)$, а элемент a_{ij} матрицы (a_{ij}) линейной части Df преобразования f будет следующим: $a_{ij} = b_{ij} - b_i$.

Пусть полупрямое произведение $\mathbb{R}^n \rtimes GL(n)$ – это представление группы $Aff(n)$. Элементами $\mathbb{R}^n \rtimes GL(n)$ являются всевозможные пары $(\bar{b}, (a_{ij})) : \bar{b} \in \mathbb{R}^n, A = (a_{ij}), A \in GL(n)$. Задана операция

$$(\bar{b}_1, A_1) \rtimes (\bar{b}_2, A_2) = (A_1 \bar{b}_2 + \bar{b}_1, A_1 A_2).$$

Построим отображение $g : \mathbb{R}^n \rtimes GL(n) \rightarrow B(n+1)$ такое, что

$$g((\bar{b}, (a_{ij}))) = \begin{pmatrix} 1 - \sum_{i=1}^n b_i & 1 - \sum_{i=1}^n (a_{i1} + b_i) & \cdots & 1 - \sum_{i=1}^n (a_{in} + b_i) \\ b_1 & a_{11} + b_1 & \cdots & a_{1n} + b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n1} + b_n & \cdots & a_{nn} + b_n \end{pmatrix}.$$

Теорема 6. Отображение g – изоморфизм групп.

4. Благодарности. Автор выражает благодарность Кальницкому Вячеславу Степановичу за ценные советы, которые помогли дополнить статью новыми фактами о барицентрической группе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- [1] Балк М. Б., Болтянский В. Г. Геометрия масс. – М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 160 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 61)
- [2] Болтянский В. Г. Элементарная геометрия: Книга для учителя – М: Просвещение, 1985. – 320 с.
- [3] Ефимов Н. В. Высшая геометрия. – 7-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 584 с.
- [4] Понарин Я. П. Элементарная геометрия: В 2т. – Т.2: Стереометрия, преобразования пространства. – М.: МЦНМО, 2006. – 256 с.