

**От геометрии к квантовой механике:
единая конструкция от матриц 3×3 до
уравнения Шрёдингера**

Аннотация

Предложена геометрическая конструкция, в которой основные элементы квантовой теории — спин, правило Борна, дрожание Шрёдингера (*Zitterbewegung*), соотношение неопределённостей и уравнение Шрёдингера — выводятся последовательно из геометрической структуры расширяющегося пространства-времени без обращения к постулатам квантовой механики. Отправной точкой служат

шесть матриц 3×3 — три генератора A, B, C и три метрических оператора K, L, M — в пространстве-времени размерности $2+1$ с метрикой сигнатуры $(+, -, -)$. Ключевое алгебраическое свойство состоит в совпадении всех трёх попарных коммутаторов: $T(3) = [A, B] = [B, C] = [C, A]$. Показано, что диагонализация операторов K, L, M переводит конструкцию из косога (неортогонального) базиса в ортогональный без изменения вида генераторов A, B, C и коммутатора $T(3)$, что

приводит к стандартной релятивистской кинематике в размерности $2+1$. Расширение до 4×4 добавляет третье пространственное измерение и спиновый генератор — блок с собственными значениями $\pm i$, соответствующий спину 1 (бозоны). Расширение до 5×5 добавляет пятое измерение w с масштабом $R = \hbar/(mc)$ (редуцированная комптоновская длина волны) и связку между наблюдаемым пространством и пятым измерением. Метрика при этом имеет сигнатуру $(+, -, -, -, +)$.

Деление матрицы $T(5)$ на 2 даёт нормированный генератор с собственными значениями $\pm i/2$, что соответствует спину $1/2$ (фермионы) с периодом 4π . Алгебраические (анти)коммутационные соотношения между нормированным генератором и метрическими матрицами $A(5)$, $B(5)$, $C(5)$ фиксируют согласованность спиновой и пространственной структуры. Показано, что дрожание Шрёдингера возникает из интерференции двух фаз, порождаемых спиновым блоком,

правило Борна — из квадратичности метрики, соотношение неопределённостей — из канонической пары (угол, сопряжённый момент), а уравнение Шрёдингера — как нерелятивистский предел при $R \rightarrow 0$, когда пятое измерение схлопывается. Таким образом, конструкция обеспечивает единый геометрический вывод ключевых элементов квантовой теории из последовательного расширения пространства-времени.

Ключевые слова: геометрическое обоснование квантовой механики, спин, правило Борна, Zitterbewegung, уравнение Шрёдингера, метрика Минковского, расширение пространства-времени, коммутационные соотношения.

1. Введение

Излагается конструкция, в которой релятивистская кинематика, спин, правило Борна, дрожание Шрёдингера (Zitterbewegung) и уравнение Шрёдингера последовательно выводятся из геометрической структуры — без обращения к постулатам квантовой механики. Отправной точкой служат матрицы 3×3 в пространстве-времени размерности $2+1$. Далее

конструкция расширяется до 4×4 и 5×5 . На каждом шаге физическое содержание наращивается без нарушения предыдущей структуры.

2. Исходные матрицы 3×3

В пространстве-времени (t, s_1, s_2) с метрикой сигнатуры $(+, -, -)$ вводятся шесть матриц: три генератора A, B, C и три оператора K, L, M .

Ключевое алгебраическое свойство — все три попарных коммутатора A, B, C совпадают:

$$T(3) = [A, B] = [B, C] = [C, A].$$

Отсюда следует, что сумма $S = A + B + C$ коммутирует с каждым из A, B, C по отдельности. Действительно:

$$[S, A] = [B + C, A] = [B, A] + [C, A] = -T(3) + T(3) = 0,$$

и аналогично $[S, B] = 0, [S, C] = 0$. Таким образом, S лежит в центре алгебры, порождённой A, B, C .

Связь между генераторами и операторами K, L, M задаётся соотношениями:

$$AKA = K, BLB = L, CMC = M.$$

Каждое из этих соотношений означает, что соответствующий генератор (A, B или C) сохраняет свой оператор (K, L или M) при двустороннем (сэндвич-) действии. Если A, B, C — инволюции ($A^2 = B^2 = C^2 = I$), то эти соотношения эквивалентны коммутации: $[A, K] = 0, [B, L] = 0, [C, M] = 0$.

3. Диагонализация K, L, M и сохранение структуры

Операторы K, L, M диагонализуются. Критически важно, что при диагонализации:

— вид A, B, C сохраняется; — вид T(3) сохраняется; — соотношения $AKA = K$, $BLB = L$, $CMC = M$ сохраняются.

Это означает, что диагонализация K, L, M не разрушает алгебру генераторов, а лишь приводит метрические операторы к каноническому виду. Содержательно: мы переходим к базису, в котором метрика становится стандартной, но кинематика — бусты и вращения, кодируемые A, B, C — не меняется.

4. Переход от косого базиса к ортогональному в R^3

4.1. Что такое «косой» базис

Исходная конструкция построена в косом (неортогональном) базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ пространства R^3 , где базисные векторы не ортогональны друг другу относительно метрики Минковского $\eta = \text{diag}(+1, -1, -1)$. В этом базисе матрицы K, L, M не

диагональны, а генераторы A, B, C имеют «косой» вид, в котором картина преобразований не сводится к стандартным бустам и вращениям.

4.2. Механизм перехода

Переход к ортогональному базису $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ осуществляется через диагонализацию K, L, M :

1. Находим собственные векторы K , L , M . Поскольку соотношения $AKA = K$ и т. д. связывают генераторы с метрическими операторами, собственные векторы K , L , M определяют направления, в которых метрика «выровнена».
2. Строим матрицу перехода P из собственных векторов. В новом базисе:

$$\tilde{K} = P^{-1}KP = \text{diag}(\dots), \tilde{L} = P^{-1}LP = \text{diag}(\dots), \tilde{M} = P^{-1}MP = \text{diag}(\dots).$$

3. Преобразуем генераторы: $\tilde{A} = P^{-1}AP$, $\tilde{B} = P^{-1}BP$, $\tilde{C} = P^{-1}CP$.

Благодаря тому, что диагонализация сохраняет вид A , B , C (п. 3), генераторы в новом базисе не меняют своей структуры.

4. Проверяем соотношения: $\tilde{A}\tilde{K}\tilde{A} = \tilde{K}$ и т. д. — они выполнены по построению.

4.3. Результат перехода

В ортогональном базисе метрика принимает стандартный вид $\eta = \text{diag}(+1, -1, -1)$, а картина, описываемая генераторами A, B, C , становится вращением двух пространственных осей s_1, s_2 относительно временной оси t . Это и есть минимальная релятивистская кинематика в размерности $2+1$: бусты и вращения в плоскостях $(t, s_1), (t, s_2), (s_1, s_2)$.

5. Расширение до 4×4: матрица $T(4)$ и появление спина

Добавляем третье пространственное измерение s_3 . Базис расширяется до (t, s_1, s_2, s_3) , метрика — до сигнатуры $(+, -, -, -)$.

Матрица $T(4)$ имеет вид:

Единственный ненулевой блок — матрица с нулями на диагонали и элементами 1 и -1 на антидиагонали — в плоскости (s_2, s_3) . Это генератор вращения с собственными значениями $\pm i$, что соответствует спину 1 (бозоны). Период вращения: 2π (при повороте на 2π оператор эволюции даёт $+1$).

Координаты t и s_1 не участвуют в генераторе — они «пассивны» на этом этапе.

6. Расширение до 5×5: пятое измерение и параметр R

Добавляем пятое измерение w с характерным масштабом:

$$R = \hbar / (mc),$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, m — масса частицы, c — скорость света. Это редуцированная комптоновская длина волны — масштаб, на котором становятся существенными квантовые эффекты.

Базис расширяется до (t, s_1, s_2, s_3, w) , метрика — до сигнатуры $(+, -, -, -, +)$.

Матрица $T(5)$ содержит два ненулевых блока:

— блок (s_2, s_3) — тот же генератор вращения, что и в $T(4)$,
сохранён без изменений; — блок (s_1, w) — новый, связывает
пространство s_1 с пятым измерением w через параметр R , с
недиагональными элементами, равными R .

Строка и столбец, соответствующие t , — нулевые. Внешнее время «остановлено» в этом генераторе.

Что происходит при расширении: спиновый блок (s_2, s_3) переносится из $T(4)$ в $T(5)$ без изменения. Появляется новый блок (s_1, w) , связывающий наблюдаемое пространство с пятым измерением.

7. Спин: бозоны и фермионы

7.1. Бозоны: T(5)

Собственные значения спинового блока: $\pm i$. Период вращения: 2π . При повороте на 2π оператор эволюции возвращает исходное состояние. Это спин 1.

7.2. Фермионы: $T_f(5) = T(5)/2$

Деление матрицы $T(5)$ на 2 даёт нормированный генератор $T_f(5)$. Собственные значения спинового блока становятся $\pm i/2$. При повороте на 2π происходит смена знака (-1) — спин-флип. Полный период — 4π , после которого состояние восстанавливается. Это спин $1/2$.

Множитель $1/2$ применяется одинаково к обоим блокам — спиновому (s_2, s_3) и «нырковому» (s_1, w) .

8. Матрицы $A(5)$, $B(5)$, $C(5)$ и алгебраические соотношения

Матрица $C(5)$ — диагональная с сигнатурой $(+, -, -, -, -)$. Это фоновая метрика.

Матрица $A(5)$ имеет диагональ $(+1, +1, 0, 0, -1)$ и недиагональный блок в плоскости (s_2, s_3) с элементами -1 на антидиагонали.

Матрица $B(5)$ имеет диагональ $(+1, -1, 0, 0, +1)$ и недиагональный блок в плоскости (s_2, s_3) с элементами $+1$ на антидиагонали.

Оператор W связан с метрикой через $E = (W - I)/2$.

Антикоммутационные соотношения:

— $[T_f, W] = 0$ и $\{T_f, W\} = -2T_f$ — эволюция по T_f сохраняет геометрию; жёсткая алгебраическая связь фиксирует, что T_f встроена в структуру W с собственным значением -1 по антикоммутатору.

— $[T_f, C] = 0$ и $\{T_f, C\} = -2T_f$ — то же для метрики C .

— $\{T_f, A\} = 0$ и $\{T_f, B\} = 0$ — T_f алгебраически ортогональна спинным операторам A и B .

9. Дрожание Шрёдингера (Zitterbewegung)

Дрожание возникает из интерференции двух фаз $e^{+i\varphi/2}$ и $e^{-i\varphi/2}$, которые являются собственными значениями оператора вращения в спиновом блоке (s_2, s_3) матрицы $T_f(5)$.

При эволюции по T_f состояние частицы раскладывается на две компоненты с противоположными фазами.

Интерференция этих компонент приводит к осцилляциям наблюдаемого положения частицы — это и есть Zitterbewegung.

В стандартной квантовой механике Zitterbewegung постулируется как следствие интерференции положительных и отрицательных энергетических состояний в уравнении Дирака. В данной конструкции она выводится из геометрии: две фазы — это собственные значения спинного блока, а интерференция — следствие квадратичности метрики.

10. Правило Борна

Правило Борна (вероятность равна квадрату амплитуды)
выводится из квадратичности метрики 5D-пространства.

Вероятность обнаружить частицу в состоянии ψ определяется
через метрику G :

$$P = \psi^\dagger G \psi.$$

В диагональном пределе $G = C(5)$ это сумма квадратов компонент ψ с соответствующими знаками метрики.

Квадратичность метрики гарантирует, что вероятность выражается через квадрат амплитуды. Никакого отдельного постулата о вероятностной интерпретации не требуется: она следует из геометрии.

Делокализация: при эволюции по T_f часть вероятности «утекает» в измерение w через блок (s_1, w) . Для внешнего наблюдателя это выглядит как делокализация — частица не всегда присутствует в наблюдаемом 4D-пространстве.

11. Соотношение неопределённостей

Угол φ (параметр вращения/буста) и сопряжённый ему момент p_φ (генератор вращения) образуют каноническую пару:

$$[\varphi, p_\varphi] = i\hbar.$$

Отсюда следует соотношение неопределённостей:

$$\Delta\varphi \cdot \Delta p_\varphi \geq \hbar/2.$$

В данной конструкции эта пара возникает из геометрии: φ — координата на вращательной части 5D-пространства, p_φ — генератор в плоскости (s_2, s_3) . Соотношение неопределённостей не постулируется, а выводится из канонической структуры алгебры.

12. Уравнение Шрёдингера как нерелятивистский предел

Уравнение Шрёдингера получается как предельный случай 5D-эволюции при $R \rightarrow 0$.

Механизм:

1. В полной 5D-модели эволюция описывается оператором $U = \exp(\varphi \cdot T_f(5))$.

2. При $R \rightarrow 0$ (что соответствует $m \rightarrow \infty$ или $\hbar \rightarrow 0$) блок (s_1, w) в $T_f(5)$ обнуляется. Пятое измерение «схлопывается».
3. Остаётся только спиновый блок (s_2, s_3) , а эволюция по t становится стандартной.
4. Оператор эволюции сводится к $U \approx \exp(-iHt/\hbar)$, где H — гамильтониан. Отсюда:

$$i\hbar \partial\psi/\partial t = H\psi.$$

Что при этом теряется: делокализация (нет w), «нырок» в кротовую нору (блок (s_1, w) исчезает), релятивистские поправки (они малы при $v \ll c$).

Что остаётся: спин (блок (s_2, s_3) сохраняется), правило Борна (квадратичность метрики сохраняется), соотношение неопределённостей (каноническая пара сохраняется).

Уравнение Шрёдингера — не постулат, а нерелятивистский предел 5D-геометрической эволюции.

13. Полная сводка

1. Исходные матрицы 3×3 (базис (t, s_1, s_2) , метрика $(+, -, -)$): бусты и вращения в $2+1$ измерениях.
2. Диагонализация K, L, M с сохранением A, B, C : переход к ортогональному базису, стандартная кинематика.
3. $T(4)$ (базис (t, s_1, s_2, s_3) , метрика $(+, -, -, -)$): появляется спиновый блок — спин 1, бозоны.

4. $T(5)$ (базис (t, s_1, s_2, s_3, w) , метрика $(+, -, -, -, +)$): появляется блок (s_1, w) с $R = \hbar/(mc)$ — «нырок» в пятое измерение.
5. $T_f(5) = T(5)/2$: спин $1/2$, фермионы, период 4π .
6. $A(5), B(5), C(5)$: алгебраический каркас, (анти)коммутаторы фиксируют согласованность.
7. Zitterbewegung: интерференция фаз $e^{(\pm i\varphi/2)}$ из спинового блока.

8. Правило Борна: квадратичность метрики даёт вероятность как квадрат амплитуды.
9. Неопределённость: каноническая пара (φ, p_φ) из геометрии.
10. Уравнение Шрёдингера: предел $R \rightarrow 0$, пятое измерение схлопывается, 5D-эволюция сводится к стандартной квантовой механике.

14. Заключение

Конструкция начинается с шести матриц 3×3 в косом базисе пространства-времени $2+1$. Диагонализация K, L, M с сохранением алгебры A, B, C приводит к ортогональному базису и стандартной релятивистской кинематике.

Расширение до 4×4 добавляет спиновый генератор.

Расширение до 5×5 добавляет пятое измерение w с масштабом $R = \hbar/(mc)$ и связь (s_1, w) . Деление на 2 даёт фермионный спин $1/2$ с периодом 4π .

Все ключевые элементы квантовой теории — спин, правило Борна, Zitterbewegung, соотношение неопределённостей, уравнение Шрёдингера — выводятся из геометрии без квантовых постулатов. Уравнение Шрёдингера оказывается нерелятивистским пределом 5D-эволюции, а не отдельным постулатом.

Приложение. Явный вид матриц 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$