
Операторная алгебра модели GS6

Аннотация

В работе представлена строгая операторная конструкция модели GS6 на базе перестановочных матриц A, B, C размерности 3×3 . Установлена двойственная природа оператора $W = J - I$: он одновременно выражается как сумма базовых матриц ($W = A + B + C - I$) и как антикоммутатор любой пары из них ($W = \{A, B\} = \{B, C\} = \{C, A\}$). Введён оператор $P = BA = CB = AC$,

реализующий циклическую перестановку базисных векторов.
 Введён эрмитов оператор R , определяемый через
 коммутаторы матриц A, B, C и имеющий спектр
 $(0, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$. Установлено операторное тождество $W^2 -$
 $R^2 = 2W$, из которого выводится волновое уравнение $V''_{tt} -$
 $V''_{xx} = 2iV'_t$. Введены операторы A^*, B^*, C^* , получаемые из A
 $, B, C$ заменой внедиагональных единиц на -1 . Через
 смешанные антикоммутаторы определены операторы $M, L,$
 N , совпадающие с геометрическими модификациями W

посредством инверсии симметричных внедиагональных пар. Проведена полная спектральная характеристика всех операторов, включая явные собственные значения и собственные векторы. Спектральная двойственность $(2, -1, -1)$ для W и $(-2, 1, 1)$ для M, L, N интерпретируется в терминах сигнатурной аналогии с метрикой Минковского.

1. Введение

Модель GS6 строится на дискретном операторном базисе, порождённом матрицами A, B, C , удовлетворяющими жёстким алгебраическим соотношениям. Ключевыми объектами являются:

- оператор W , имеющий множественные эквивалентные определения;

- оператор перестановки P , реализующий циклический сдвиг индексов;
- эрмитов оператор R , определённый через коммутаторы базовых матриц и обладающий вещественным спектром $(0, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$, что необходимо для корректной динамической интерпретации.

2. Базовые матрицы и их свойства

Определим матрицы $A, B, C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Они являются инволюциями:

$$A^2 = B^2 = C^2 = I.$$

Спектры:

$$\text{Spec}(A) = \text{Spec}(B) = \text{Spec}(C) = (1, 1, -1).$$

Циклические соотношения:

$$ABC = B, \quad BCA = C, \quad CAB = A.$$

Оператор P (циклическая перестановка):

$$P = BA = CB = AC = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Оператор W : определения и спектр

W определяется двумя эквивалентными способами:

1. $W = A + B + C - I = J - I$, где J — матрица из единиц.
2. $W = \{A, B\} = \{B, C\} = \{C, A\}$.

Явный вид:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристический полином:

$$\det(W - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0.$$

Собственные значения:

$$\lambda \in \{2, -1, -1\}.$$

Собственные векторы:

- $\lambda = 2: v_1 = (1, 1, 1)^T;$
- $\lambda = -1: v_2 = (1, -1, 0)^T, v_3 = (1, 0, -1)^T.$

4. Сопряжённые матрицы A^* , B^* , C^* и смешанные соотношения

Операторы A^* , B^* , C^* строятся из A , B , C путём замены на -1 всех единиц, расположенных вне главной диагонали:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Свойства:

- Инволюции: $(A^*)^2 = (B^*)^2 = (C^*)^2 = I$.
- Спектры: $\text{Spec}(A^*) = \text{Spec}(B^*) = \text{Spec}(C^*) = (1, 1, -1)$.
- Сумма: $A^* + B^* + C^* = W - I$.

Смешанные матричные соотношения:

$$A^*BC^* = B,$$

$$C^*BA^* = B,$$

$$B^*CA^* = C,$$

$$A^*CB^* = C,$$

$$C^*AB^* = A,$$

$$B^*AC^* = A.$$

5. Операторы M, L, N : явный вид и спектры

5.1. Алгебраическое определение: явные матрицы

Операторы вводятся через смешанные антикоммутаторы:

$$\{A, B^*\} = -M, \quad \{B, C^*\} = -L, \quad \{C, A^*\} = -N.$$

Вычисления дают:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.2. Геометрическая интерпретация

Операторы получаются из W заменой симметричной пары внедиагональных элементов $+1 \rightarrow -1$:

- M : замена W_{23}, W_{32} ;
- L : замена W_{13}, W_{31} ;
- N : замена W_{12}, W_{21} .

Полученные матрицы совпадают с алгебраическими определениями, что подтверждает эквивалентность подходов.

5.3. Спектральные характеристики

Характеристический полином для каждого из операторов:

$$\det(X - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda - 2 = 0, \quad X \in \{M, L, N\}.$$

Корни полинома:

$$\lambda \in \{-2, 1, 1\}.$$

6. Собственные векторы операторов M, L, N

Для M :

- $\lambda = -2: v_M^{(1)} = (-1, 1, 1)^T$;
- $\lambda = 1: v_M^{(2)} = (1, 1, 0)^T, v_M^{(3)} = (1, 0, 1)^T$.

Для L и N собственные векторы получаются циклической перестановкой координат векторов M .

7. Оператор R : определение через коммутаторы и эрмитовость

Определим R через коммутаторы:

Вычислим $[A, B]$:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{Spec}(R) = (0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}),$$

и R — эрмитов, как и требуется.

Явный вид R :

$$R = -i[A, B] = -i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ -i & 0 & i \\ i & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Операторное тождество и волновое уравнение

Проверим тождество:

$$W^2 - R^2 = 2W.$$

Это тождество лежит в основе динамической интерпретации модели. Рассмотрим вектор-функцию $V(t, x)$, компоненты которой удовлетворяют операторным уравнениям с участием

W и R . Тогда из указанного тождества следует волновое уравнение:

$$V''_{tt} - V''_{xx} = 2iV'_t.$$

Оно обобщает стандартное волновое уравнение за счёт первого производного по времени, обусловленного некоммутативной структурой операторов.

9. Спектральная двойственность и аналогия с метрикой Минковского

Наблюдается чёткая сигнатурная двойственность спектров:

- $W: (2, -1, -1)$ — одно положительное и два отрицательных собственных значения;
- $M, L, N: (-2, 1, 1)$ — одно отрицательное и два положительных собственных значения.

Формальная аналогия с сигнатурой метрики Минковского $(+, -, -, -)$ позволяет трактовать W как «временноподобный» оператор, а M, L, N — как «пространственноподобные». Оператор P несёт информацию о циклической перестановке индексов, а эрмитов оператор R , построенный через коммутаторы ($R = -i[A, B]$) и имеющий спектр $(0, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$, отвечает за динамику и непосредственно участвует в формировании волнового уравнения.

10. Заключение

В работе строго построена операторная алгебра модели GS6 с явным заданием базовых матриц A, B, C и сопряжённых A^*, B^*, C^* . Доказана эквивалентность алгебраического и геометрического определений операторов W, M, L, N . Получены полные спектральные характеристики указанных операторов, включая собственные значения и векторы.

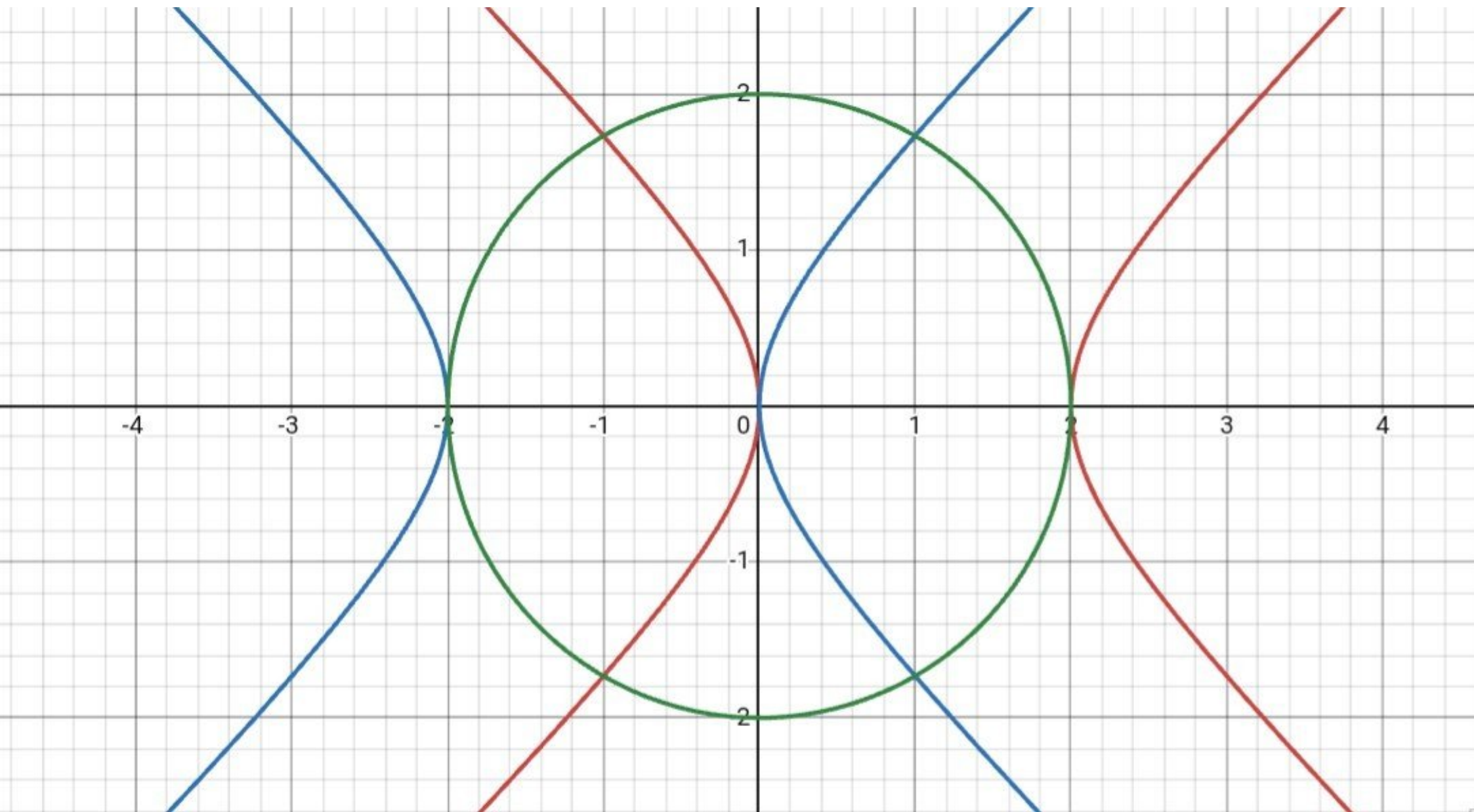
Введены два независимых структурных объекта: оператор перестановки $P = BA = CB = AC$ и эрмитов оператор $R = -i[A, B]$, построенный через коммутатор и обладающий спектром $(0, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$. Установлено операторное тождество $W^2 - R^2 = 2W$, из которого следует волновое уравнение $V''_{tt} - V''_{xx} = 2iV'_t$. Установлена спектральная двойственность, допускающая интерпретацию в терминах релятивистской сигнатуры. Результаты

подтверждают обобщающий характер модели GS6 по отношению к стандартной дискретной волновой модели и создают основу для дальнейшего анализа коммутационных соотношений, параметрического пространства мод и построения конкретных волновых решений.

Приложение. Геометрическая иллюстрация к модели GS6

1. Постановка задачи

Геометрическая иллюстрация демонстрирует соответствие спектральных свойств операторов модели GS6 алгебраическим кривым на плоскости.



- Красная гипербола и её пересечение с зелёной окружностью ассоциируются с оператором W , имеющим спектр $(2, -1, -1)$.
- Синяя гипербола и её пересечение с той же окружностью соответствуют операторам M, L, N со спектром $(-2, 1, 1)$.
- Зелёная окружность задаёт нормировочное условие, ограничивающее область допустимых значений.

Дано:

- Зелёная окружность: $x^2 + y^2 = 4$.
- Левая ветка красной гиперболы: $x = -1$.
- Правая ветка синей гиперболы: $x = 1$.

Чертёж:

- Окружность радиуса 2 с центром в $(0, 0)$.

- Вертикальные прямые $x = -1$ (левая ветка красной гиперболы) и $x = 1$ (правая ветка синей гиперболы).

Ключевые шаги решения:

1. Пересечение левой ветки красной гиперболы с окружностью:

Подставляем $x = -1$ в уравнение окружности:

$$(-1)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow 1 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}.$$

Точки: $(-1, \sqrt{3}), (-1, -\sqrt{3})$.

2. Пересечение правой ветки синей гиперболы с окружностью:

Подставляем $x = 1$ в уравнение окружности:

$$1^2 + y^2 = 4 \Rightarrow 1 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}.$$

Точки: $(1, \sqrt{3}), (1, -\sqrt{3})$.

Финальный ответ:

- Точки пересечения левой ветки красной гиперболы с окружностью: $(-1, \sqrt{3})$, $(-1, -\sqrt{3})$.
- Точки пересечения правой ветки синей гиперболы с окружностью: $(1, \sqrt{3})$, $(1, -\sqrt{3})$.