

# Треугольные числа и эллиптические кривые

Георгий Гуляев

28 октября 2026 г.

## 1. Введение

В работе [1] изучался вопрос о представлении в виде куба сумм последовательных кубов натуральных чисел. Основная формула для суммы кубов от  $m + 1$  до  $n$ :

$$S_{m,n} = T_n^2 - T_m^2, \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad m < n. \quad (1)$$

Здесь  $S_{m,n} = \sum_{x=m+1}^n x^3$  и  $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$  — так называемое треугольное число.

В процессе исследования в [1] (теоремы 2 и 3) для суммы  $S_{m,n}$  были получены следующие формулы:

$$S_{m,n} = \frac{(n-m)(n+m+1)(n^2+m^2+m+n)}{4}$$
$$S_{m,n} = \frac{[(2n+1)^2 - (2m+1)^2][(2n+1)^2 + (2m+1)^2 - 2]}{64}.$$

Что касается представления суммы  $S_{m,n}$  в виде куба:  $S_{m,n} = c^3$ , то в 1997 году Дэйв Русин (Dave Rusin) обнаружил и доказал ([4]) следующую параметризацию (бесконечное множество решений) в том случае, когда  $n - m = u^3$ ,  $u \in \mathbb{N}$ ,  $u > 3$ ,  $u \not\equiv 0 \pmod{3}$ :

$$m = \frac{(u^2 - 1)^2 - 3(u^3 + 1)}{6}, \quad n = \frac{(u^2 - 1)^2 + 3(u^3 - 1)}{6}, \quad c = \frac{u(u^2 - 1)(u^2 + 2)}{6}.$$

На данный момент известно только 27 решений уравнения  $S_{m,n} = c^3$ , не охваченных параметризацией Русина ([1]) и, весьма вероятно, что таких исключений - конечное число. Возможно даже, что все они уже найдены и других просто не существует.

В работе [2] рассматривалась, связанная с уравнением  $S_{m,n} = c^3$ , эллиптическая кривая  $y^2 = x^3 + T_m^2$ , для которой был получен общий вид всех ее точек с рациональными координатами и найдены все точки с целыми координатами для всех  $m$  в пределах вычислительных возможностей компьютера.

В работе [3] была доказана единственность пифагоровой тройки из треугольных чисел (так называемого треугольника Серпинского):

$$T_{132}^2 + T_{143}^2 = T_{164}^2 \quad \text{или} \quad 8778^2 + 10296^2 = 13530^2.$$

В настоящей работе мы продолжим, начатое в работах [1-3], исследование треугольных чисел и сумм последовательных кубов, изучим совпадения сумм кубов  $S_{a,b} = S_{c,d}$ , мультипликативные соотношения во множестве треугольных чисел, обобщение треугольника Серпинского а также исследуем семейство эллиптических кривых  $y^2 = x^3 + 2x^2 - 4T_mx + T_m^2$ .

## 2. Эллиптическая кривая $y^2 = x^3 + T_m^2$

Здесь мы будем следовать работе [2]. Изложим последовательно и систематически ее основные результаты и добавим несколько новых. Пусть  $m \in \mathbb{N}$  фиксировано. Рассмотрим эллиптическую кривую

$$E_m : \quad y^2 = x^3 + T_m^2, \tag{2}$$

где  $T_m = m(m+1)/2$  — треугольное число. Кривая задана в форме Вейерштрасса  $y^2 = x^3 + ax + b$  с  $a = 0$ ,  $b = T_m^2$ .

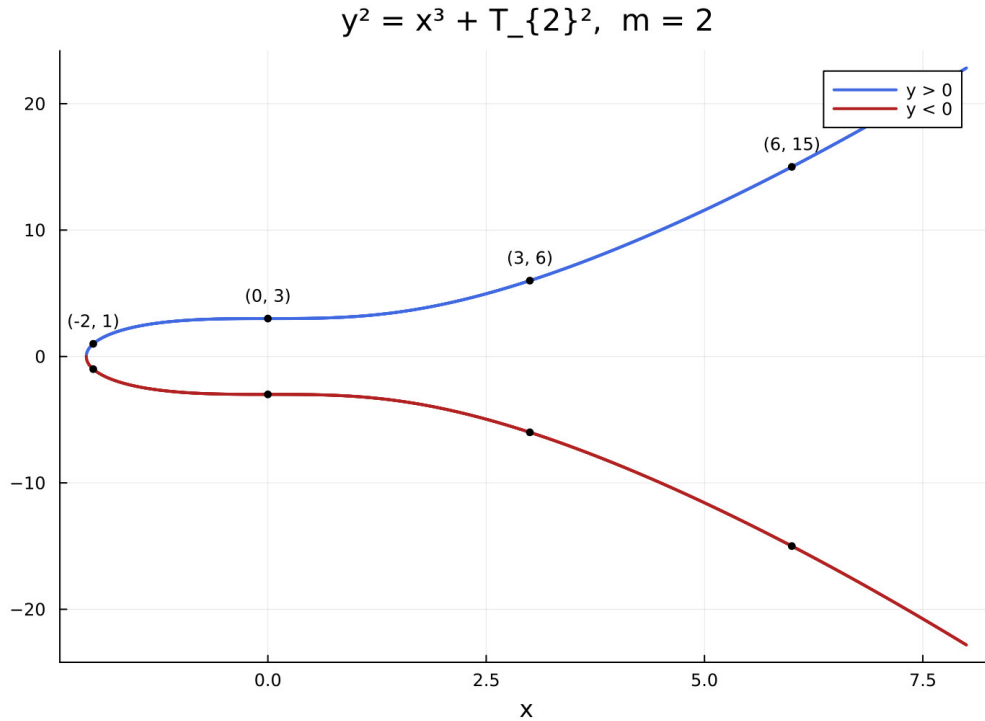
Кривая  $E_m$  естественно возникает в задаче о представлении суммы последовательных кубов кубом натурального числа. Если положить  $x^3 = S_{m,n}$  и  $y = T_n$ , то из формулы (1) получаем

$$T_n^2 = S_{m,n} + T_m^2 = x^3 + T_m^2,$$

то есть точка  $(x, T_n)$  лежит на  $E_m$ . Таким образом, задача о представлении суммы последовательных кубов в виде точного куба  $x^3$  равносильна

задаче о нахождении целых точек на  $E_m$ , у которых ордината является треугольным числом.

Кривая  $E_m$  для любого  $m$  содержит восемь целых точек, задаваемых явными формулами через  $m$ .



**Теорема 1.** Для любого  $m \in \mathbb{N}$  кривая  $E_m$  содержит восемь целых точек:

$$(0, \pm T_m), (m+1, \pm T_{m+1}), (2T_m, \pm(2m+1)T_m), (-m, \pm(T_{m-1})). \quad (3)$$

**Доказательство.** Каждый из четырёх случаев проверяется подстановкой координат точек в уравнение кривой (2).

*Первый случай.* При  $x = 0$  уравнение принимает вид  $y^2 = T_m^2$ , откуда  $y = \pm T_m$ .

*Второй случай.* При  $x = m+1$  нужно проверить

$$T_{m+1}^2 = (m+1)^3 + T_m^2.$$

Подставляя  $T_{m+1} = (m+1)(m+2)/2$  и  $T_m = m(m+1)/2$ , получаем

$$\frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4} = (m+1)^3 + \frac{m^2(m+1)^2}{4}.$$

Умножая на 4 и сокращая на  $(m+1)^2$ , приходим к тождеству

$$(m+2)^2 = 4(m+1) + m^2,$$

которое равносильно  $m^2 + 4m + 4 = m^2 + 4m + 4$ .

*Третий случай.* При  $x = 2T_m$  нужно проверить

$$(2m+1)^2 T_m^2 = 8T_m^3 + T_m^2.$$

Сокращая на  $T_m^2$ , получаем

$$(2m+1)^2 = 8T_m + 1 = 4m(m+1) + 1 = (2m+1)^2.$$

*Четвёртый случай.* При  $x = -m$  нужно проверить

$$T_{m-1}^2 = -m^3 + T_m^2.$$

Перепишем равенство в виде  $T_m^2 = m^3 + T_{m-1}^2$ . Оно сводится к уравнению второго случая после замены переменной  $m$  на  $m+1$ , который уже доказан.

Все четыре случая проверены. Теорема доказана.

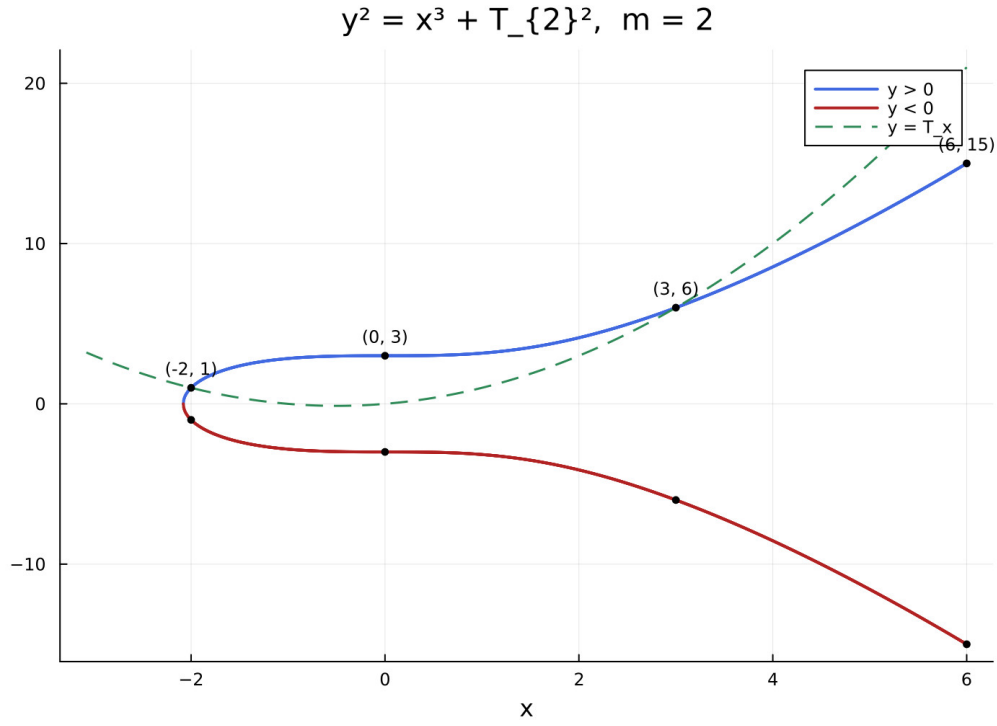
**Замечания.** Мы будем называть эти восемь точек для кривой  $E_m$  *универсальными*. Из уравнения (2) очевидно, что если  $(x, y)$  — решение, то и  $(x, -y)$  — решение. Поэтому график  $E_m$  симметричен относительно оси абсцисс, и достаточно рассматривать только точки с  $y \geq 0$ .

Все точки (3) имеют прозрачный геометрический смысл. Точки  $(0, \pm T_m)$  лежат на пересечении  $E_m$  с осью ординат. Точки  $(m+1, \pm T_{m+1})$  и  $(-m, \pm T_{m-1})$  лежат на пересечении семейства кривых  $E_m$  с параболой

$$y = \frac{x(x+1)}{2},$$

то есть в этих точках ордината является треугольным числом. Точки  $(2T_m, \pm(2m+1)T_m)$  лежат на кривой

$$y = \frac{x\sqrt{4x+1}}{2}.$$



Для дальнейшего удобно привести рациональные точки  $E_m$  к специальному виду.

**Теорема 2.** Любая рациональная точка  $(x, y) \in E_m(\mathbb{Q})$  представима в виде

$$(x, y) = \left( \frac{aT_m}{q^2}, \frac{bT_m}{q^3} \right), \quad (4)$$

где  $q \in \mathbb{N}$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

**Доказательство.** Пусть  $(x, y) \in E_m(\mathbb{Q})$ . Представим отношения  $x/T_m$  и  $y/T_m$  в виде несократимых дробей:

$$\frac{x}{T_m} = \frac{r}{s}, \quad \frac{y}{T_m} = \frac{u}{v}, \quad \gcd(r, s) = \gcd(u, v) = 1.$$

Положим  $q = sv$  и определим

$$a = sv^2r, \quad b = s^3v^2u.$$

Тогда

$$\frac{aT_m}{q^2} = \frac{sv^2r \cdot T_m}{s^2v^2} = \frac{rT_m}{s} = x,$$

$$\frac{bT_m}{q^3} = \frac{s^3v^2u \cdot T_m}{s^3v^3} = \frac{uT_m}{v} = y.$$

Оба числа  $a$  и  $b$  целые. Теорема доказана.

Подставляя (4) в (2) и сокращая на  $T_m^2$ , получаем уравнение

$$b^2 = a^3T_m + q^6, \quad (5)$$

которое было использовано в работе [2] для поиска рациональных точек.

Для дальнейшего анализа  $E_m$  нам понадобится формула сложения точек. Известно, что на эллиптической кривой в форме Вейерштрасса  $y^2 = x^3 + ax + b$  сумма двух точек  $P(x_1, y_1)$  и  $Q(x_2, y_2)$  вычисляется по формулам

$$x_3 = \left( \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)^2 - x_1 - x_2, \quad y_3 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_1 - x_3) - y_1.$$

При  $P = Q$  используется касательная:

$$x_4 = \left( \frac{3x_1^2 + a}{2y_1} \right)^2 - 2x_1, \quad y_4 = \frac{3x_1^2 + a}{2y_1}(x_1 - x_4) - y_1.$$

В нашем случае  $a = 0$ ,  $b = T_m^2$ .

**Теорема 3.** Пусть  $A = (0, T_m)$  и  $B = (aT_m/q^2, -bT_m/q^3)$  — точка на  $E_m$  в нормальной форме (4). Тогда

$$A + B = \left( \frac{2q(b + q^3)}{a^2}, \frac{(b + q^3)(b + 3q^3)}{a^3} \right). \quad (6)$$

**Доказательство.** Для точек  $A = (0, T_m)$  и  $B = (aT_m/q^2, -bT_m/q^3)$  угловой коэффициент хорды:

$$k = \frac{-bT_m/q^3 - T_m}{aT_m/q^2 - 0} = \frac{-T_m(b + q^3)/q^3}{aT_m/q^2} = -\frac{b + q^3}{qa}.$$

Абсцисса суммы:

$$x_3 = k^2 - 0 - \frac{aT_m}{q^2} = \frac{(b + q^3)^2}{q^2a^2} - \frac{aT_m}{q^2} = \frac{(b + q^3)^2 - a^3T_m}{q^2a^2}.$$

Из условия  $b^2 = a^3T_m + q^6$  (формула (5)) следует  $a^3T_m = b^2 - q^6 = (b + q^3)(b - q^3)$ . Тогда

$$x_3 = \frac{(b + q^3)^2 - (b + q^3)(b - q^3)}{q^2a^2} = \frac{(b + q^3) \cdot 2q^3}{q^2a^2} = \frac{2q(b + q^3)}{a^2}.$$

Ордината:

$$y_3 = k(0 - x_3) - T_m = \frac{b + q^3}{qa} \cdot \frac{2q(b + q^3)}{a^2} - T_m = \frac{2(b + q^3)^2 - a^3T_m}{a^3}.$$

Подставляя снова  $a^3T_m = (b + q^3)(b - q^3)$ :

$$\begin{aligned} y_3 &= \frac{2(b + q^3)^2 - (b + q^3)(b - q^3)}{a^3} = \\ &= \frac{(b + q^3)(2b + 2q^3 - b + q^3)}{a^3} = \frac{(b + q^3)(b + 3q^3)}{a^3}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Замечание.** Хотя в формулах (6) отсутствует  $m$ , это не означает, что точка  $A + B$  лежит на  $E_m$  для любого  $m$ . Слагаемые  $A$  и  $B$  задают эллиптическую кривую, на которой они лежат сами и на которой будет лежать их сумма. В точке  $A$  уже присутствует  $m$ , а для того чтобы  $B$  лежала на  $E_m$ , должно выполняться равенство (5).

**Инволюция  $\varphi$ .** Определим отображение  $\varphi : E_m(\mathbb{Q}) \rightarrow E_m(\mathbb{Q})$ , положив для  $(x, y) \in E_m$ ,  $y \neq T_m$ :

$$\varphi(x, y) = \left( \frac{2xT_m}{y - T_m}, \frac{(y + 3T_m)T_m}{y - T_m} \right). \quad (7)$$

В точках  $(0, T_m)$  и бесконечно удалённой  $\mathcal{O}$  отображение доопределяется формулами

$$\varphi(0, T_m) = \mathcal{O}, \quad \varphi(\mathcal{O}) = (0, T_m).$$

**Теорема 4.** *Отображение  $\varphi$  переводит кривую  $E_m$  в себя:*

$$\varphi(E_m) = E_m.$$

Более того,  $\varphi$  является инволюцией:

$$\varphi \circ \varphi = \text{id}.$$

**Доказательство.** *Сохранение кривой.* Пусть  $(x, y) \in E_m$  и  $(X, Y) = \varphi(x, y)$ . Нужно показать, что  $Y^2 = X^3 + T_m^2$ .

Из (7) имеем

$$X = \frac{2xT_m}{y - T_m}, \quad Y = \frac{(y + 3T_m)T_m}{y - T_m}.$$

Возведём  $Y$  в квадрат:

$$Y^2 = \frac{(y + 3T_m)^2 T_m^2}{(y - T_m)^2}.$$

Возведём  $X$  в куб и прибавим  $T_m^2$ :

$$X^3 + T_m^2 = \frac{8x^3 T_m^3}{(y - T_m)^3} + T_m^2 = \frac{8x^3 T_m^3 + T_m^2 (y - T_m)^3}{(y - T_m)^3}.$$

Требуется проверить равенство

$$(y + 3T_m)^2 T_m^2 (y - T_m) = 8x^3 T_m^3 + T_m^2 (y - T_m)^3.$$

Сокращая на  $T_m^2$ :

$$(y + 3T_m)^2 (y - T_m) = 8x^3 T_m + (y - T_m)^3.$$

Раскроем обе части. Левая:

$$(y^2 + 6yT_m + 9T_m^2)(y - T_m) = y^3 + 5y^2T_m + 3yT_m^2 - 9T_m^3.$$

Правая, с учётом  $x^3 = y^2 - T_m^2$ :

$$8T_m(y^2 - T_m^2) + y^3 - 3y^2T_m + 3yT_m^2 - T_m^3 = y^3 + 5y^2T_m + 3yT_m^2 - 9T_m^3.$$

Обе части совпадают. Значит,  $\varphi(E_m) \subseteq E_m$ . Обратное включение следует из инволютивности.

*Инволютивность.* Пусть  $(X, Y) = \varphi(x, y)$ . Покажем, что  $\varphi(X, Y) = (x, y)$ .

Из (7):

$$Y - T_m = \frac{(y + 3T_m)T_m - T_m(y - T_m)}{y - T_m} = \frac{4T_m^2}{y - T_m}.$$

Тогда

$$\frac{2XT_m}{Y - T_m} = \frac{2 \cdot \frac{2xT_m}{y - T_m} \cdot T_m}{\frac{4T_m^2}{y - T_m}} = \frac{4xT_m^2/(y - T_m)}{4T_m^2/(y - T_m)} = x.$$

Аналогично для второй координаты:

$$\begin{aligned}\frac{(Y + 3T_m)T_m}{Y - T_m} &= \frac{\left[\frac{(y+3T_m)T_m}{y-T_m} + 3T_m\right] T_m}{\frac{4T_m^2}{y-T_m}} = \\ &= \frac{(y + 3T_m + 3y - 3T_m)T_m^2/(y - T_m)}{4T_m^2/(y - T_m)} = \frac{4yT_m^2}{4T_m^2} = y.\end{aligned}$$

Значит,  $\varphi(\varphi(x, y)) = (x, y)$ . Теорема доказана.

**Групповой смысл инволюции.** Отображение  $\varphi$  имеет прозрачный групповой смысл: оно совпадает с отражением относительно точки  $A = (0, T_m)$  в групповом законе  $E_m$ .

**Теорема 5.** Для любой точки  $P \in E_m(\mathbb{Q})$ ,  $P \neq A$  и  $P \neq \mathcal{O}$ , выполняется

$$\varphi(P) = A - P.$$

Кроме того,  $\varphi(A) = \mathcal{O}$  и  $\varphi(\mathcal{O}) = A$ .

**Доказательство.** Достаточно показать, что  $P + \varphi(P) = A$ . Обозначим  $\varphi(P) = (X, Y)$ . Прямое вычисление даёт

$$\begin{aligned}X - x &= \frac{2xT_m}{y - T_m} - x = \frac{x(3T_m - y)}{y - T_m}, \\ Y - y &= \frac{(y + 3T_m)T_m}{y - T_m} - y = \frac{(3T_m - y)(y + T_m)}{y - T_m},\end{aligned}$$

где во втором равенстве использовано  $y^2 = x^3 + T_m^2$ :

$$2yT_m + 3T_m^2 - y^2 = -(y^2 - 2yT_m - 3T_m^2) = -(y - 3T_m)(y + T_m) = (3T_m - y)(y + T_m).$$

Следовательно, угловой коэффициент хорды через  $P$  и  $\varphi(P)$  равен

$$k = \frac{Y - y}{X - x} = \frac{(3T_m - y)(y + T_m)}{x(3T_m - y)} = \frac{y + T_m}{x}.$$

Абсцисса третьей точки пересечения хорды с  $E_m$ :

$$x_R = k^2 - x - X = \frac{(y + T_m)^2}{x^2} - x - \frac{2xT_m}{y - T_m}.$$

Из уравнения кривой  $(y - T_m)(y + T_m) = x^3$ , то есть

$$\frac{1}{y - T_m} = \frac{y + T_m}{x^3}.$$

Поэтому

$$\frac{2xT_m}{y - T_m} = \frac{2T_m(y + T_m)}{x^2},$$

и

$$x_R = \frac{(y + T_m)^2 - 2T_m(y + T_m)}{x^2} - x = \frac{(y + T_m)(y - T_m)}{x^2} - x = \frac{x^3}{x^2} - x = 0.$$

Ордината:

$$y_R = k(x - x_R) - y = kx - y = (y + T_m) - y = T_m.$$

Итак,  $P + \varphi(P) = (0, T_m) = A$ , откуда  $\varphi(P) = A - P$ . Случаи  $P = A$  и  $P = \mathcal{O}$  проверяются отдельно: при  $P = A$  знаменатель  $y - T_m$  обращается в нуль, и  $\varphi(A) = \mathcal{O}$  по доопределению; при  $P = \mathcal{O}$  формальное продолжение даёт  $\varphi(\mathcal{O}) = A$ . Теорема доказана.

**Следствие 1.** Точка  $A = (0, T_m)$  является точкой кручения порядка 3 в группе  $E_m(\mathbb{Q})$ :

$$3A = \mathcal{O}.$$

**Доказательство.** Касательная к  $E_m$  в точке  $A$  горизонтальна (так как коэффициент при  $x$  в правой части уравнения равен нулю), поэтому прямая  $y = T_m$  пересекает  $E_m$  в точке  $A$  с кратностью 3. Значит,  $2A = -A$ , откуда  $3A = \mathcal{O}$ . Следствие доказано.

**Групповая структура восьми универсальных точек.** Введём обозначения

$$A = (0, T_m), \quad B = (m + 1, T_{m+1}), \quad C = (2T_m, (2m + 1)T_m), \quad D = (-m, T_{m-1}).$$

**Следствие 2.** В группе  $E_m(\mathbb{Q})$  выполняются тождества

$$B + C = A, \quad A + C = D, \quad D = B + 2C.$$

Восемь универсальных точек (3) имеют вид

$$\pm B, \quad \pm C, \quad \pm(B + C), \quad \pm(B + 2C).$$

**Доказательство.** Шаг 1.  $B + C = A$ . Вычислим угловой коэффициент хорды через  $B$  и  $C$ :

$$k = \frac{(2m+1)T_m - T_{m+1}}{2T_m - (m+1)}.$$

Числитель:

$$\begin{aligned} & (2m+1)\frac{m(m+1)}{2} - \frac{(m+1)(m+2)}{2} = \\ & = \frac{(m+1)[m(2m+1) - (m+2)]}{2} = \frac{(m+1)(2m^2 - 2)}{2} = (m+1)^2(m-1). \end{aligned}$$

Знаменатель:

$$2T_m - (m+1) = m(m+1) - (m+1) = (m+1)(m-1).$$

Следовательно,  $k = m+1$ . Тогда

$$x_{B+C} = (m+1)^2 - (m+1) - 2T_m = (m+1)^2 - (m+1) - m(m+1) = 0,$$

$$y_{B+C} = (m+1)((m+1) - 0) - T_{m+1} = (m+1)^2 - \frac{(m+1)(m+2)}{2} = T_m.$$

Значит,  $B + C = (0, T_m) = A$ .

Шаг 2.  $A + C = D$ . Угловой коэффициент хорды через  $A$  и  $C$ :

$$k = \frac{(2m+1)T_m - T_m}{2T_m - 0} = m.$$

Тогда,

$$x_{A+C} = m^2 - 0 - 2T_m = m^2 - m(m+1) = -m,$$

$$y_{A+C} = m(0 - (-m)) - T_m = m^2 - \frac{m(m+1)}{2} = \frac{m(m-1)}{2} = T_{m-1}.$$

Значит,  $A + C = D$ .

Шаг 3.  $D = B + 2C$ . Согласно шага 1, имеем  $C = A - B$ . Тогда

$$B + 2C = B + 2(A - B) = 2A - B = A + (A - B) = A + C = D.$$

Последнее равенство следует из шага 2. Следствие доказано.

**Связь инволюции с формулой сложения.** Теорема 3 и теорема 5 вместе дают прозрачный групповой смысл формулы (6).

**Следствие 3.** Пусть  $A = (0, T_m)$  и  $B = (aT_m/q^2, -bT_m/q^3) \in E_m(\mathbb{Q})$ . Тогда

$$\varphi(A + B) = -B = \left( \frac{aT_m}{q^2}, \frac{bT_m}{q^3} \right).$$

**Доказательство.** По теореме 5,  $\varphi(A+B) = A-(A+B) = -B$ . Следствие доказано.

**Пример:**  $m = 212$ . Для иллюстрации выпишем универсальные точки и одну из точек, дающих решение задачи о сумме кубов.

Имеем  $T_{212} = 22578$ ,  $T_{213} = 22791$ . Восемь точек (3):

$$(0, \pm 22578), \quad (213, \pm 22791), \quad (45156, \pm 9595650), \quad (-212, \pm 22366).$$

Точка  $A = (0, 22578)$  имеет порядок 3, и  $A = B + C$ , где  $B = (213, 22791)$ ,  $C = (45156, 9595650)$ .

Точка  $C_0 = (1581, 66795)$  лежит на  $E_{212}$  и даёт решение задачи о суммах кубов:  $S_{212,365} = 1581^3$ . Её образ под действием  $\varphi$ :

$$\varphi(1581, 66795) = \left( \frac{466612}{289}, \frac{337488418}{4913} \right).$$

Эта точка симметрична точке  $D$ , для которой  $A + D = C_0$ . Аналогично вторая точка  $C_1 = (2856, 154290)$  даёт  $S_{212,555} = 2856^3$ , и

$$\varphi(2856, 154290) = \left( \frac{119139}{196}, \frac{104434539}{2744} \right).$$

**Роль инволюции в структуре решений.** Резюмируем значение теоремы 5. Отображение  $\varphi$  действует на  $E_m(\mathbb{Q})$  как отражение относительно точки кручения  $A$  порядка 3. Оно переводит универсальные точки друг в друга:

$$\varphi(A) = \mathcal{O}, \quad \varphi(\mathcal{O}) = A, \quad \varphi(-A) = -A, \quad \varphi(B) = C, \quad \varphi(D) = -C, \quad \varphi(-B) = -D.$$

Для любой точки  $P$ , дающей решение задачи о сумме кубов (то есть для точки с целочисленной ординатой  $T_n$ ), точка  $\varphi(P)$  также лежит на  $E_m$  и связана с  $P$  групповым законом  $P + \varphi(P) = A$ .

Таким образом, инволюция  $\varphi$  даёт естественное разбиение точек  $E_m(\mathbb{Q})$  на пары  $\{P, \varphi(P)\}$ , симметричные относительно точки кручения  $A$ . Это разбиение объясняет структуру найденных решений задачи о суммах кубов и лежит в основе дальнейшего анализа эллиптической кривой  $E_m$ .

### 3. Структура целых точек кривой $E_m$

Параметризация Русина не дает бесконечного множества целочисленных точек для каждого  $m$  на кривой  $E_m$ . В ней вместе с параметром  $u$  меняются оба индекса  $m$  и  $n$ . То есть, для каждого подходящего для параметризации  $m = 5, 33, 212, 405, \dots$ , только одна из целых точек на кривой  $E_m$  будет соответствовать параметризации Русина.

Кривая  $E_m$ :  $y^2 = x^3 + (T_m)^2$

$u = 4, m = 5, n = 69, x = 180, y = T_n = 2415$   
 $u = 5, m = 33, n = 158, x = 540, y = T_n = 12561$   
 $u = 7, m = 212, n = 555, x = 2856, y = T_n = 154290$   
 $u = 8, m = 405, n = 917, x = 5544, y = T_n = 420903$   
 $u = 10, m = 1133, n = 2133, x = 16830, y = T_n = 2275911$   
 $u = 11, m = 1734, n = 3065, x = 27060, y = T_n = 4698645$   
 $u = 13, m = 3605, n = 5802, x = 62244, y = T_n = 16834503$   
 $u = 14, m = 4965, n = 7709, x = 90090, y = T_n = 29718195$   
 $\dots$

Анализируя целые точки на кривой  $E_m$  в этих случаях можно заметить, что вместе с точкой, которую дает параметризация всегда дополнительно добавляются еще две целые точки.

-----  
 $u = 4, m = 5, n = 69, x = 180, y = T_n = 2415$   
[(-6, 3), (-5, 10), (0, 15), (4, 17), (6, 21), (10, 35),  
(15, 60), (30, 165), (60, 465), (180, 2415), (336, 6159),  
(351, 6576), (720114, 611085363)]

-----  
 $u = 5, m = 33, n = 158, x = 540, y = T_n = 12561$   
[(-68, 17), (-66, 165), (-33, 528), (0, 561), (15, 564),  
(34, 595), (70, 811), (102, 1173), (132, 1617), (187, 2618),  
(220, 3311), (540, 12561), (1122, 37587), (2784, 146895),  
(3672, 222513), (5610, 420189), (8415, 771936),  
(166600, 68000561)]

-----  
 $u = 7, m = 212, n = 555, x = 2856, y = T_n = 154290$

[(-795, 2703), (-212, 22366), (0, 22578), (213, 22791),  
(1420, 58078), (1581, 66795), (2856, 154290),  
(45156, 9595650), (421456, 273607730)]

-----  
u = 8, m = 405, n = 917, x = 5544, y = T\_n = 420903  
[(-1890, 2835), (-1566, 54027), (-1260, 68985),  
(-405, 81810), (0, 82215), (406, 82621), (900, 86535),  
(1450, 99035), (1890, 116235), (3654, 235683),  
(3915, 258390), (5544, 420903), (9135, 876960),  
(14175, 1689660), (15660, 1961415), (16146, 2053269),  
(28420, 4791815), (164430, 66676365),  
(3575880, 6761988135)]

-----  
u = 10, m = 1133, n = 2133, x = 16830, y = T\_n = 2275911  
[(-7416, 69525), (-1133, 641278), (0, 642411),  
(1134, 643545), (16632, 2239083), (16830, 2275911),  
(1284822, 1456345737), (519943347, 11855886643062)]

-----  
u = 11, m = 1734, n = 3065, x = 27060, y = T\_n = 4698645  
[(-13005, 251430), (-1734, 1502511), (0, 1504245),  
(1735, 1505980), (27060, 4698645), (31230, 5720295),  
(3008490, 5218225905)]

В последнем примере универсальные точки:

$$A = (0, T_m) = (0, 1504245), \quad B = (m + 1, T_{m+1}) = (1735, 1505980),$$

$$C = (2T_m, (2m + 1)T_m) = (3008490, 5218225905),$$

$$D = (-m, T_{m-1}) = (-1734, 1502511).$$

Точка параметризации:  $P = (x, y) = (27060, 4698645)$ . Оставшиеся две точки  $Q = (-13005, 251430)$  и  $R = (31230, 5720295)$ .

Сложение  $P + D$  на эллиптической кривой дает точку симметричную  $Q : (-13005, -251430)$ , то есть фактически добавляет точку  $Q$  (если учитывать только точки с  $y > 0$ ). С другой стороны, можно заметить, что  $P + R = B$ , таким образом,  $R$  появляется как дополнение точки параметризации до  $B$ . Оформим это наблюдение в виде теоремы.

**Теорема 6.** Пусть  $u \in \mathbb{N}, u > 3, u \not\equiv 0 \pmod{3}$ . Рассмотрим эллиптические кривые  $E_m : y^2 = x^3 + T_m^2$  и целые точки  $P(x, y)$  на них для всех  $m$  из параметризации Русина:

$$m = \frac{(u^2 - 1)^2 - 3(u^3 + 1)}{6}, \quad n = m + u^3, \quad x = \frac{u(u^2 - 1)(u^2 + 2)}{6}, \quad y = T_n$$

Пусть, далее

$$A = (0, T_m), \quad B = (m+1, T_{m+1}), \quad C = (2T_m, (2m+1)T_m), \quad D = (-m, T_{m-1})$$

— стандартные точки кривой  $E_m$ . Тогда точки

$$Q = P + D, \quad R = B - P$$

также имеют целые координаты. При этом  $Q$  и  $R$  не совпадают с универсальными точками. Таким образом, кривые  $E_m$  содержат не менее семи целых точек с  $y > 0$ :

$$A, B, C, D, P, Q, R$$

для всех  $m \in \{5, 33, 212, 405, \dots\}$  соответствующих параметризации Русина.

**Доказательство.** Точка  $P = (x_P, y_P)$  имеет положительные координаты, причём

$$n = m + u^3 > m + 1 \quad (u > 3), \quad \text{поэтому} \quad T_n > T_{m+1} > T_m.$$

Значит,  $P$  не совпадает ни с  $A = (0, T_m)$ , ни с  $B = (m+1, T_{m+1})$ , ни с их отражениями ( $y$  отражений ордината отрицательна).

Далее,  $x_D = -m < 0$ , а  $x_P > 0$ , поэтому  $P \neq D$  и  $P \neq -D$ .

Остаётся  $C = (2T_m, (2m+1)T_m)$ . Здесь  $x_C = 2T_m$ . Покажем, что  $x_P \neq 2T_m$ . При  $u = 4$  имеем  $x_P = 180 > 30 = 2T_m$ . При  $u = 5$  имеем  $x_P = 540 < 1122 = 2T_m$ . При  $u \geq 7$  (случай  $u \equiv 0 \pmod{3}$  исключён) из

$$m = \frac{u^4 - 3u^3 - 2u^2 - 2}{6} \geq \frac{u^4}{12}, \quad x_P = \frac{u^5 + u^3 - 2u}{6} \leq \frac{u^5}{5}$$

следует

$$2T_m = m(m+1) > \frac{u^8}{144} > \frac{u^5}{5} \geq x_P.$$

Значит,  $x_P \neq 2T_m$ , и  $P \neq C$ . Отражение  $-C$  имеет отрицательную ординату, поэтому  $P \neq -C$ . Следовательно, в условиях теоремы  $P$  не совпадает ни с одной из точек  $A, B, C, D$  и их отражениями.

Докажем теперь, что точка  $Q = P + D$  имеет целые координаты. Угловым коэффициентом хорды  $PD$  равен

$$K = \frac{T_m - m - T_n}{-m - c}.$$

Прямое вычисление с использованием  $n = m + u^3$  даёт

$$K = u^2 - u + 1 \in \mathbb{Z}.$$

По формуле сложения точек

$$x_Q = K^2 - c + m, \quad y_Q = K(c - x_Q) - T_n.$$

Поскольку  $K, c, m, T_n$  — целые,  $x_Q$  и  $y_Q$  целые.

Докажем, что точка  $R = B - P$  имеет целые координаты. Рассмотрим точку  $-P = (x, -T_n)$ . Угловым коэффициентом хорды, соединяющей  $B$  и  $-P$ , равен

$$K' = \frac{-T_n - T_{m+1}}{c - (m + 1)}.$$

Прямое вычисление даёт

$$K' = \frac{(u - 1)(u^2 + 2u + 4)}{6} \in \mathbb{Z}.$$

Действительно,

$$(u - 1)(u^2 + 2u + 4) = (u - 1)((u + 1)^2 + 3).$$

При  $u > 3$ ,  $u \not\equiv 0 \pmod{3}$ , произведение всегда чётно (если  $u$  чётно, то  $u^2 + 2u + 4$  чётно; если  $u$  нечётно, то  $u - 1$  чётно) и всегда делится на 3 (если  $u \equiv 1 \pmod{3}$ , то  $u - 1$  делится на 3; если  $u \equiv 2 \pmod{3}$ , то  $u^2 + 2u + 4 \equiv 4 + 4 + 4 = 12 \equiv 0 \pmod{3}$ ). Значит,  $K' \in \mathbb{Z}$ .

По формуле сложения точек

$$x_R = K'^2 - (m + 1) - x, \quad y_R = K'((m + 1) - x_R) - T_{m+1}.$$

Поскольку  $K', m, c, T_{m+1}$  — целые,  $x_R$  и  $y_R$  целые. Теорема доказана.

Пример для  $u = 11$ :

$$m = 1734, \quad c = 27060, \quad n = 3065, \quad T_m = 1504245, \quad T_n = 4698645.$$

Точка  $P = (27060, 4698645)$ . Угловой коэффициент  $K = 11^2 - 11 + 1 = 111$ . Тогда

$$Q = P + D = (-13005, 251430).$$

Далее  $K' = (10)(121 + 22 + 4)/6 = 10 \cdot 147/6 = 245$ . Тогда

$$R = B - P = (31230, 5720295).$$

Вместе с  $A = (0, 1504245)$ ,  $B = (1735, 1505980)$ ,  $C = (3008490, 5218225905)$ ,  $D = (-1734, 1502511)$  получаем семь целых точек с  $y > 0$ .

В отдельных случаях (например,  $u = 4, 5, 7, 8$ ) на кривых  $E_m$  появляются дополнительные целые точки, не входящие в минимальный набор  $\{A, B, C, D, P, Q, R\}$ . Они возникают как другие комбинации  $P$  со универсальными точками или как кратные  $P$ . Однако, по теореме 6, для всех  $m$  из параметризации Русина, минимальный набор всегда содержит не менее семи целых точек.

### Численные наблюдения.

Для большинства  $m$  кривая  $E_m$  содержит ровно восемь универсальных точек (в работе [2] приведена соответствующая статистика для начальных  $m$ ). С изменением  $m$  появляются значения, для которых число целых точек во много раз больше. В работе [2] найдены рекордные значения:  $m = 21504$  — 91 точка,  $m = 10625$  — 76,  $m = 25839$  — 70,  $m = 4879$  — 45. При этом, программа считала только точки для которых  $y > 0$ .

Значения  $m$  с большим количеством целых точек появляются случайно. Соседние значения для этих  $m$  могут давать существенно меньше точек. Например,  $m = 4880$  даёт в верхней полуплоскости  $y > 0$  только четыре универсальные точки.

Число целых точек, кажется, коррелирует с факторизацией  $T_m$ : рекордные  $m$  имеют богатую факторизацию малых простых, что увеличивает число делителей в разложении  $(y - T_m)(y + T_m) = x^3$ . Точная зависимость числа точек от факторизации  $T_m$  не установлена.

Ниже приведены найденные  $m < 10^6$ , для которых кривая  $E_m$  содержит более 50 целых точек, если учитывать только в точки верхней полуплоскости  $y > 0$ .

91  $m = 21504 = 2^{10} \cdot 3 \cdot 7$ ,  $T(21504) = 2^9 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23$   
76  $m = 10625 = 5^4 \cdot 17$ ,  $T(10625) = 3 \cdot 5^4 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23$   
70  $m = 25839 = 3^4 \cdot 11 \cdot 29$ ,  $T(25839) = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 29$   
67  $m = 4784 = 2^4 \cdot 13 \cdot 23$ ,  $T(4784) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 29$   
62  $m = 643125 = 3 \cdot 5^4 \cdot 7^3$ ,  $T(643125) = 3 \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 41$   
60  $m = 58310 = 2 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 17$ ,  $T(58310) = 3^2 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 31$   
57  $m = 45695 = 5 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37$ ,  $T(45695) = 2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 37$   
56  $m = 94094 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 47$ ,  $T(94094) = 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 41 \cdot 47$   
54  $m = 194480 = 2^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$ ,  $T(194480) = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$   
53  $m = 296703 = 3^6 \cdot 11 \cdot 37$ ,  $T(296703) = 2^7 \cdot 3^6 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 61$   
52  $m = 750464 = 2^7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 41$ ,  $T(750464) = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 41 \cdot 109$   
51  $m = 107184 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29$ ,  $T(107184) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 97$   
51  $m = 196910 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29 \cdot 97$ ,  $T(196910) = 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 29 \cdot 97$

Найденные, программой на языке Julia, целые точки для каждого  $m$  из таблицы подтверждены в веб версии программы Magma V2.29-10 (все кроме четырех: 94094, 107184, 196910, 750464 - из-за ограничений по времени программы magma).

Поиски были продолжены и за пределы  $m = 10^6$ , но больше ни одного случая с числом целых точек больше 50 обнаружено не было. При поиске вместо полного перебора использовался следующий критерий гладкости. Определим вес числа через цифровой логарифм:

$$\text{lgd}(n) = \sum_{p^k \parallel n} k p.$$

Все известные  $m$  с числом целых точек  $> 50$  на кривой  $E_m$  удовлетворяют условию

$$100 < \text{lgd}(m) + \text{lgd}(T_m) < 350.$$

Это отражает тот факт, что большое число точек требует одновременной гладкости  $m$  и  $T_m$ : каждая точка соответствует разложению  $x^3 = AB$  с  $B - A = 2T_m$ , и чем больше малых простых делителей у  $T_m$ , тем больше таких разложений.

Создается стойкое ощущение, что с дальнейшим ростом  $m$  число целых точек в среднем не увеличивается, а уменьшается и, начиная с некоторого  $M$ , для всех  $m > M$  на кривой  $E_m$  не будет других точек кроме универсальных и добавляемых параметризацией Русина. Происходит это потому, что с ростом  $m$  в разложении  $T_m$  появляются все большие простые числа, которые оказываются менее удобными для построения целых точек на кривой  $E_m$ .

#### 4. Эллиптическая кривая $E'_m : y^2 = x^3 + 2x^2 - 4T_mx + T_m^2$

Поставим задачу видоизменить общее уравнение семейства эллиптических кривых  $E_m : y^2 = x^3 + T_m^2$  так, чтобы обеспечить как можно большее количество универсальных точек на них. Рассмотрим семейство кривых с произвольными целыми коэффициентами  $a$  и  $b$ .

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + T_m^2. \quad (8)$$

На кривой  $E_m$  на пересечении с параболой  $y = T_x$  при  $y > 0$  находились ровно две точки:  $T_x^2 = x^3 + T_m^2 \Rightarrow T_m^2 = x^2(x+1)^2/4 - x^3 \Rightarrow T_m^2 = T_{-x}^2 \Rightarrow T_m = T_{-x} \Rightarrow x(x-1) = m(m+1) \Rightarrow B = (m+1, T_{m+1})$  и  $D = (-m, T_{m-1})$ .

Отразим эти точки относительно оси ординат и потребуем, чтобы они лежали на новой кривой (8).

Замена  $x \mapsto -x$  переводит параболу  $y = T_x = x(x+1)/2$  в  $y = T_{-x} = x(x-1)/2$ , а точки — в

$$B' = (-m-1, T_{m+1}), \quad D' = (m, T_{m-1}).$$

Подставив координаты точек в уравнение (8), решаем систему линейных уравнений относительно  $a$  и  $b$ .

$$a(m+1)^2 - b(m+1) = 2(m+1)^3, \quad am^2 + bm = -2m^3.$$

Деля на  $m+1$  и  $m$  и складывая уравнения, получаем  $a(2m+1) = 2(2m+1)$ , то есть  $a = 2$ , а затем  $b = -4T_m$ . Это и будет наша новая кривая:

$$E'_m : y^2 = x^3 + 2x^2 - 4T_mx + T_m^2. \quad (9)$$

Покажем, что при таком выборе коэффициентов на кривой оказываются пятнадцать различных семейств точек. Для удобства разобьем все 30 точек на пять групп.

**Лемма 1.** *На  $E'_m$  лежат точки*

$$\begin{aligned} (0, \pm T_m), \quad (2, \pm(T_m - 4)), \quad (2T_m, \pm(2m + 1)T_m), \\ (-m - 1, \pm T_{m+1}), \quad (-m - 2, \pm(T_{m+1} - 1)), \\ (m, \pm T_{m-1}), \quad (m - 1, \pm(T_{m-1} - 1)). \end{aligned}$$

**Доказательство.** При подстановке будем использовать легко проверяемые тождества:

$$T_{m+1}^2 - T_m^2 = (m + 1)^3, \quad T_m^2 - T_{m-1}^2 = m^3, \quad (10)$$

$$(T_{m+1} - 1)^2 - T_m^2 = m^2(m + 2), \quad T_m^2 - (T_{m-1} - 1)^2 = (m - 1)(m + 1)^2. \quad (11)$$

Для  $x = 0$ , правая часть (9) равна  $T_m^2 \Rightarrow (0, \pm T_m)$  - решения.

Для  $x = 2$ , имеем  $8 + 8 - 8T_m + T_m^2 = (T_m - 4)^2 \Rightarrow (2, \pm(T_m - 4))$  - решения.

Для  $x = 2T_m$ , получаем  $T_m^2(8T_m + 1) = T_m^2(2m + 1)^2 \Rightarrow (2T_m, \pm(2m + 1)T_m)$  - лежат на кривой.

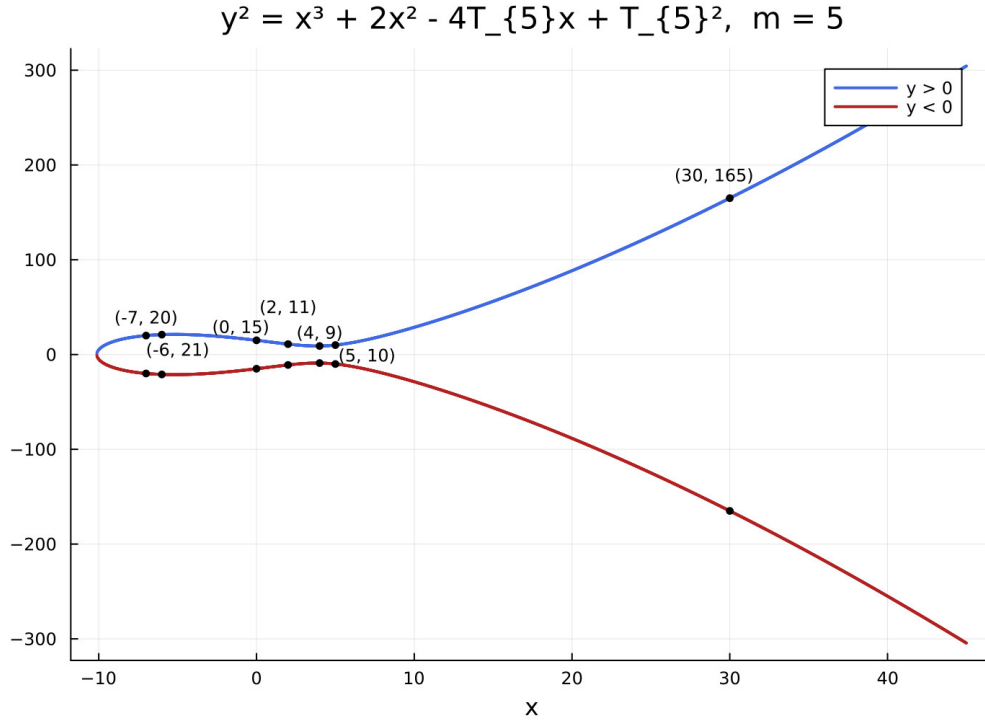
Для  $x = -m - 1$ , имеем  $-(m + 1)^3 + 2(m + 1)^2 + 2m(m + 1)^2 + T_m^2 = T_m^2 + (m + 1)^3$ , что по первому тождеству (10) равно  $T_{m+1}^2 \Rightarrow (-m - 1, \pm T_{m+1})$  - на кривой.

Для  $x = -m - 2$ , имеем  $x^2 + 2x - 4T_m = -m^2$ , поэтому правая часть (9) равна  $T_m^2 + m^2(m + 2)$ , что по первому тождеству (11) равно  $(T_{m+1} - 1)^2$ .

Для  $x = m$ , имеем  $x^2 + 2x - 4T_m = -m^2$ , и правая часть по второму тождеству (10) равна  $T_m^2 - m^3 = T_{m-1}^2$ .

Для  $x = m - 1$  имеем  $x^2 + 2x - 4T_m = -(m + 1)^2$ , и правая часть по второму тождеству (11) равна  $T_m^2 - (m - 1)(m + 1)^2 = (T_{m-1} - 1)^2$ . Лемма

доказана.



**Лемма 2.** На  $E'_m$  лежат точки

$$(2m + 2, \pm \frac{(m+1)(m+8)}{2}), \quad (-2m, \pm \frac{m(m-7)}{2}).$$

**Доказательство.** Имеем два легко проверяемых равенства, при помощи раскрытия скобок и с учётом  $2T_m = m(m + 1)$ :

$$(2m + 2)^3 + 2(2m + 2)^2 - 4T_m(2m + 2) + T_m^2 = \frac{(m + 1)^2(m + 8)^2}{4},$$

$$(-2m)^3 + 2(-2m)^2 - 4T_m(-2m) + T_m^2 = \frac{m^2(m - 7)^2}{4}.$$

Очевидно, они доказывают лемму 2. Лемма доказана.

**Лемма 3.** На  $E'_m$  лежат точки

$$(T_m(T_m - 4), \pm T_m(T_m^2 - 6T_m + 7)), \quad (m(m + 3), \pm \frac{m(m+1)(2m+7)}{2}).$$

**Доказательство.** Прямое раскрытие скобок даёт тождества

$$(T_m(T_m - 4))^3 + 2(T_m(T_m - 4))^2 - 4T_m^2(T_m - 4) + T_m^2 = T_m^2(T_m^2 - 6T_m + 7)^2,$$

$$(m(m + 3))^3 + 2(m(m + 3))^2 - 4T_m m(m + 3) + T_m^2 = \frac{m^2(m + 1)^2(2m + 7)^2}{4},$$

правые части которых — полные квадраты. Лемма доказана.

**Лемма 4.** Пусть  $M = \lceil m/2 \rceil$ . Тогда на  $E'_m$  лежат точки

$$(M^2, \pm M(M^2 - 1)).$$

**Доказательство.** Если  $m = 2M$ , то  $T_m = M(2M + 1)$ , и при  $x = M^2$  правая часть (9) равна

$$M^6 + 2M^4 - 4M(2M + 1)M^2 + M^2(2M + 1)^2 = M^2(M^2 - 1)^2.$$

Если  $m = 2M - 1$ , то  $T_m = (2M - 1)M$ , и при том же  $x = M^2$  правая часть равна

$$M^6 + 2M^4 - 4M(2M - 1)M^2 + M^2(2M - 1)^2 = M^2(M^2 - 1)^2.$$

В обоих случаях  $y = \pm M(M^2 - 1)$ . Лемма доказана.

**Лемма 5.** Пусть  $P = (0, T_m)$ ,  $Q = (m, T_{m-1})$ ,

$$P_3 = (2T_m, (2m + 1)T_m), \quad P_{11} = (m(m + 3), \frac{m(m+1)(2m+7)}{2}).$$

Тогда точки

$$A = P - Q, \quad B = A - E_3, \quad C = P_3 - P_{11}$$

лежат на  $E'_m$  и имеют целые координаты. А именно,

$$A = \left( m^2 - m - 2, \frac{m(m + 1)(2m - 5)}{2} \right),$$

$$B = \left( m^2(m^2 - 2m - 1), \frac{m(2m^5 - 6m^4 + 4m^2 + 5m + 1)}{2} \right),$$

$$C = \left( (m + 1)^2(m^2 + 4m + 2), \frac{(m + 1)(2m^5 + 16m^4 + 44m^3 + 52m^2 + 31m + 8)}{2} \right).$$

**Доказательство.** Точки  $P, Q, P_3, P_{11}$  лежат на  $E'_m$  согласно леммам 1–3. Сумма и разность точек эллиптической кривой снова лежит на ней, поэтому достаточно показать целостность координат. По формуле сложения  $x_3 = k^2 - 2 - x_1 - x_2$ ,  $y_3 = k(x_1 - x_3) - y_1$ ; если  $k, x_1, x_2, y_1$  целые, то  $x_3, y_3$  целые. Угловые коэффициенты равны

$$k_A = \frac{-T_{m-1} - T_m}{m - 0} = -\frac{m^2}{m} = -m,$$

$$k_B = \frac{-y_{P_3} - y_A}{x_{P_3} - x_A} = \frac{-2m(m+1)(m-1)}{2(m+1)} = -m(m-1),$$

$$k_C = \frac{-y_{P_{11}} - y_{P_3}}{x_{P_{11}} - x_{P_3}} = \frac{-2m(m+1)(m+2)}{2m} = -(m+1)(m+2).$$

Здесь были использованы тождества  $T_m + T_{m-1} = m^2$ ,  $x_{P_3} - x_A = 2(m+1)$  и  $x_{P_{11}} - x_{P_3} = 2m$ . При этом, во всех случаях  $k \in \mathbb{Z}$ . Подстановка  $k$  в формулы сложения даёт явные выражения для  $A, B, C$ . Лемма доказана.

Теперь всё готово для формулировки основного результата.

**Теорема 7.** *Для любого  $m \in \mathbb{N}$  кривая  $E'_m$  содержит тридцать целых точек, задаваемых формулами*

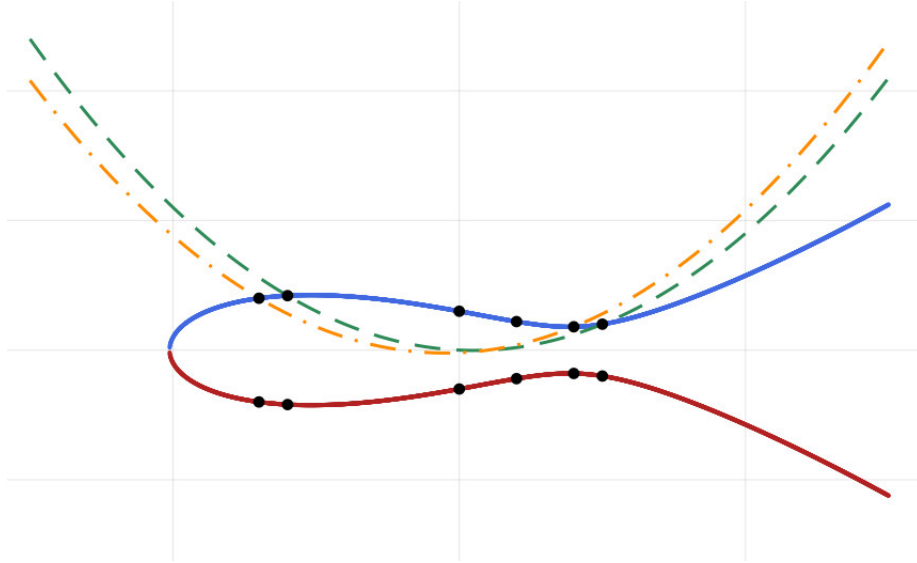
$$\begin{aligned} &(0, \pm T_m), \quad (2, \pm(T_m - 4)), \quad (2T_m, \pm(2m+1)T_m), \\ &(-m-1, \pm T_{m+1}), \quad (-m-2, \pm(T_{m+1} - 1)), \\ &(m, \pm T_{m-1}), \quad (m-1, \pm(T_{m-1} - 1)), \\ &(2m+2, \pm \frac{(m+1)(m+8)}{2}), \quad (-2m, \pm \frac{m(m-7)}{2}), \\ &(T_m(T_m - 4), \pm T_m(T_m^2 - 6T_m + 7)), \\ &(m(m+3), \pm \frac{m(m+1)(2m+7)}{2}), \\ &(M^2, \pm M(M^2 - 1)), \quad M = \lceil m/2 \rceil, \\ &(m^2 - m - 2, \pm \frac{m(m+1)(2m-5)}{2}), \\ &(m^2(m^2 - 2m - 1), \pm \frac{m(2m^5 - 6m^4 + 4m^2 + 5m + 1)}{2}), \\ &((m+1)^2(m^2 + 4m + 2), \pm \frac{(m+1)(2m^5 + 16m^4 + 44m^3 + 52m^2 + 31m + 8)}{2}). \end{aligned}$$

При  $m \geq 8$  эти точки попарно различны; при  $m = 1, 2, 3, 4$  среди них есть совпадения, а при  $m = 7$  одна из точек лежит на оси абсцисс.

**Доказательство.** Существование всех тридцати точек установлено леммами 1–5: первые четырнадцать точек — лемма 1, следующие четыре — лемма 2, ещё четыре — лемма 3, две — лемма 4 и шесть — лемма 5. Попарное различие при  $m \geq 8$  устанавливается сравнением координат; случаи  $m = 1, 2, 4, 7$  отмечены в условии. Теорема доказана.

**Замечание 1.** Семь точек с  $y > 0$  из леммы 1 лежат на трёх фиксированных кривых в плоскости  $(x, y)$ : на вертикалях  $x = 0$ ,  $x = 2$ , на кривой  $y = x\sqrt{4x+1}/2$ , на параболе  $y = T_{-x} = x(x-1)/2$  (две точки) и на сдвинутой параболе  $y = T_x - 1 = x(x+1)/2 - 1$  (две точки).

На старой кривой  $E_m$  обе содержательные точки лежали на одной параболе  $y = T_x$ . На новой кривой  $E'_m$  парабола  $y = T_x$  заменяется двумя —  $y = T_{-x}$  и её сдвигом  $y = T_x - 1$ . Именно это удвоение числа парабол и даёт удвоение содержательных универсальных точек.



Точки из лемм 2–5 лежат на своих собственных алгебраических кривых: на вертикалях  $x = 2m + 2$ ,  $x = -2m$ , на кривых  $x = T_m(T_m - 4)$ ,  $x = m(m+3)$ ,  $x = M^2$  и на кривых, получающихся сложением универсальных точек.

**Замечание 2.** При  $m = 1, 2$  точки  $(M^2, \pm M(M^2 - 1))$  с  $M = 1$  совпадают с  $(1, 0)$  и  $(0, 1)$ , соответственно, и входят в семейства 6 и 7. При  $m = 4$

точка  $A = (m^2 - m - 2, \dots) = (10, 30)$  совпадает с  $E_8$ , поэтому тринадцатое семейство в этом случае не даёт новой точки; две другие лишние точки при  $m = 4$  равны

$$(114, 1226) = -2E_9, \quad (1463872, 1771148406) = 16P + 5E_{11},$$

где  $E_9 = (-8, 6)$ ,  $E_{11} = (28, 150)$ . При  $m = 7$  точки  $A, B, C$  дают три из четырёх лишних, а четвёртая равна  $E_8 - A = (111, 1175)$ , где  $E_8 = (16, 60)$ .

**Замечание 3.** Тринадцатое, четырнадцатое и пятнадцатое семейства получаются из универсальных точек сложением, а не независимой подстановкой. Это показывает, что при  $m \geq 8$  все пятнадцать точек с  $y > 0$  лежат в подгруппе  $\Lambda_m$ , порождённой первыми двенадцатью семействами, и новых независимых точек не появляется.

**Замечание 4.** Точки параметризации Русина, определённые для первоначальной кривой  $E_m$ , не лежат на  $E'_m$  и не порождают её универсальных точек. Причина структурная: параметризация Русина использует кручение при  $k = u^3$ , возможное только при  $j = 0$ ; новая кривая имеет  $j \neq 0$ , и её универсальные семейства возникают из параболических сечений  $y = T_{-x}$  и  $y = T_x - 1$ , а не из кручения.

**Структура группы.** Семь точек с  $y > 0$  из (10) порождают подгруппу  $\Lambda_m \subset E'_m(\mathbb{Q})$ . Поскольку  $(2, T_m - 4) = -2(0, T_m)$ , ранг  $\Lambda_m$  не превосходит 6. Полная группа имеет вид

$$E'_m(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}^r \oplus T_m, \quad r = \text{rank } E'_m(\mathbb{Q}), \quad (13)$$

где  $T_m$  — группа кручения. Разность  $r - \text{rank } \Lambda_m$  равна числу дополнительных точек, которые нужно добавить к универсальным, чтобы замыкание по групповому закону дало все целые точки.

Сложение на  $E'_m$  задаётся стандартными формулами для кривой  $y^2 = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$  с  $a_2 = 2$ :

$$x_3 = k^2 - 2 - x_1 - x_2, \quad y_3 = k(x_1 - x_3) - y_1, \quad (14)$$

где

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (P \neq Q), \quad k = \frac{3x_1^2 + 4x_1 - 4T_m}{2y_1} \quad (P = Q).$$

Нейтральный элемент — точка на бесконечности  $\mathcal{O}$ , обратная —  $-(x, y) = (x, -y)$ .

**Алгоритм нахождения всех целых точек.** Для заданного  $m$  последовательно выполняем:

1. создаем список из 30 универсальных точек;
2. добавляем к нему до 500 новых рациональных точек вида  $(a/q^2, b/q^3)$ , вычисляя их;
3. перебираем все пары точек полученного списка, выполняем сложение и добавляем в список те рациональные точки (суммы), знаменатели которых не превосходят определенную границу ( $10^{20}$ );
4. повторяем предыдущий пункт еще раз; завершаем процесс и прекращаем добавлять точки при достижении длины списка 18000.
5. выбираем из конечного списка только целые точки;

Приведем программу на языке Julia, реализующую этот алгоритм:

```
function find(m)
    T(n) = div(big(n)*(n+1),2)
    mb = big(m); mb0 = div(mb+1,2)
    tm = T(m); tm0 = T(m-1); tm1 = T(m+1);
    max_l = 18000; max_d = big(10)^20; max_p = 500

    10 = [
        (big(0),tm),      (big(0),-tm),
        (big(2), tm - 4), (big(2), -tm + 4),
        (2tm, (2mb+1)*tm), (2tm, -(2mb+1)*tm),
        (-mb-1, tm1),      (-mb-1, -tm1),
        (-mb-2, tm1-1),    (-mb-2, -tm1+1),
        (mb, tm0),          (mb, -tm0),
        (mb-1, tm0-1),      (mb-1, -tm0+1),

        (2mb+2, div((mb+1)*(mb+8), 2)),
        (2mb+2, -div((mb+1)*(mb+8), 2)),
    ]
end
```

```

(-2mb, div(mb*(mb-7), 2)),
(-2mb, -div(mb*(mb-7), 2)),

(tm*(tm-4), tm*(tm^2-6tm+7)),
(tm*(tm-4), -tm*(tm^2-6tm+7)),

(mb*(mb+3), div(mb*(mb+1)*(2mb+7), 2)),
(mb*(mb+3), -div(mb*(mb+1)*(2mb+7), 2)),

(mb0^2, mb0*(mb0^2 - 1)),
(mb0^2, -mb0*(mb0^2 - 1)),

(mb^2 - mb - 2, div(mb*(mb+1)*(2mb-5), 2)),
(mb^2 - mb - 2, -div(mb*(mb+1)*(2mb-5), 2)),

(mb^2*(mb^2 - 2mb - 1),
  div(mb*(2mb^5 - 6mb^4 + 4mb^2 + 5mb + 1), 2)),
(mb^2*(mb^2 - 2mb - 1),
  -div(mb*(2mb^5 - 6mb^4 + 4mb^2 + 5mb + 1), 2)),

((mb+1)^2*(mb^2 + 4mb + 2),
  div((mb+1)*(2mb^5+16mb^4+44mb^3+52mb^2+31mb+8), 2)),
((mb+1)^2*(mb^2 + 4mb + 2),
  -div((mb+1)*(2mb^5+16mb^4+44mb^3+52mb^2+31mb+8), 2))
]

```

```

function add(m) # (a//q^2,b//q^3)
  res = Tuple{Rational{BigInt}, Rational{BigInt}}[]
  for p in 10 push!(res, p); end
  for a in -big(10^6):10^6, q in [1,2,3,5]
    q2 = q^2; q3 = q^3; q4 = q*q3; q6 = q2*q4
    b2 = a^3+2*a^2*q2-4*tm*a*q4+tm^2*q6
    b2>0 || continue
    b = isqrt(b2)
    if b^2 == b2
      push!(res, (a//q2, b//q3))
      push!(res, (a//q2, -b//q3))
    end
  end
end

```

```

        if length(res)>max_p return res end
    end
    unique(res)
end

function sm(P, Q)
    P === nothing && return Q
    Q === nothing && return P
    x1, y1 = P; x2, y2 = Q
    if x1 == x2
        y1 == -y2 && return nothing
        y1 == 0 && return nothing
        k = (3*x1^2 + 4*x1 - 4*tm) // (2*y1)
        x3 = k^2 - 2 - 2*x1
    else
        k = (y2 - y1) // (x2 - x1)
        x3 = k^2 - 2 - x1 - x2
    end
    (x3, k*(x1 - x3) - y1)
end

function sum_l(l)
    for (P,Q) in combinations(1,2)
        s = sm(P,Q)
        if s!=nothing&&denominator(s[2])>0&&denominator(s[2])<=max_d
            if !(s in l)
                push!(l,s); push!(l,(s[1],-s[2]))
                length(l) < max_l || return
            end
        end
    end
end

res = add(m)
sum_l(res); res = unique(res)
sum_l(res); res = unique(res)

res = filter(x -> denominator(x[1])==1&&

```

```

denominator(x[2])==1&&numerator(x[2])>=0, res)
res = map(x -> (numerator(x[1]),numerator(x[2])), res)
sort!(res)
end

```

Вывод программы полностью совпадает с выводом целых точек Magma там, где последняя завершается в пределах лимита (60 сек), и даёт результаты для всех других случаев, когда онлайн-версия Magma выходит по таймауту.

**Эмпирические рекорды.** Прямое вычисление для  $m \leq 5 \cdot 10^4$  показало, что число целых точек с  $y > 0$  на  $E'_m$  варьируется от 15 (минимум, достигаемый при всех  $m \geq 4$ ) до 106.

При начальных значениях  $m = 1, 2, 3$ , некоторые из универсальных точек совпадают, поэтому общее число целых точек меньше 15 ( $m = 1 \Rightarrow 7$  точек,  $m = 2 \Rightarrow 8$  точек,  $m = 3 \Rightarrow 14$  точек).

Рекордные значения приведены в таблице.

| $m$   | $\text{rank } E'_m$ | $\#\{y > 0\}$ | $\max p \mid T_m$ |
|-------|---------------------|---------------|-------------------|
| 13514 | 9                   | 106           | 233               |
| 696   | 7                   | 84            | 41                |
| 35672 | 8                   | 84            | 47                |
| 13039 | 8                   | 83            | 163               |
| 3236  | 8                   | 82            | 809               |
| 8436  | 8                   | 80            | 59                |
| 14773 | 8                   | 79            | 89                |
| 5225  | 8                   | 77            | 67                |
| 15123 | 8                   | 77            | 199               |
| 2746  | 8                   | 76            | 1373              |
| 8613  | 8                   | 75            | 73                |
| 21995 | 8                   | 71            | 83                |
| 473   | 7                   | 68            | 43                |
| 184   | 6                   | 60            | 23                |
| 21504 | 4                   | 15            | 23                |

Для новой кривой число целых точек коррелирует с рангом  $E'_m(\mathbb{Q})$ , а не только с гладкостью  $T_m$ . Кривая при  $m = 2746$ , где  $T_m$  содержит простое

1373, имеет ранг 8 и даёт 76 точек. Кривая при  $m = 21504$ , для которой  $T_{21504} = 2^9 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23$  исключительно гладко (для  $E_m$  - это был максимум точек), имеет всего 15 целых точек, поскольку её ранг мал. Гладкость  $T_m$  — по прежнему имеет значение, но только в сочетании с большим рангом.

**Сравнение с исходной кривой  $E_m$ .** Рекорды двух кривых достигаются при разных  $m$ :  $m = 21504$  даёт 91 точку на  $E_m$  и только 15 на  $E'_m$ ;  $m = 13514$  даёт 106 точек на  $E'_m$ , тогда как на  $E_m$  соответствующее значение не является рекордным.

Плотность  $m$  с  $\#\{y > 0\} \geq 60$  убывает с ростом  $m$  (от 0,38% при  $m \leq 10^4$  до 0,01% при  $3 \cdot 10^4 < m \leq 4 \cdot 10^4$ ), но не обращается в нуль:  $m = 35672$  даёт 84 точки. Строгая асимптотика плотности неизвестна, поэтому будут ли появляться и дальше с ростом  $m$  новые рекорды - вопрос открытый.

#### Открытые вопросы.

1. Существует ли  $m$  с  $\#\{y > 0\} > 106$ ? Прямой перебор до  $m \leq 5 \cdot 10^4$  даёт  $m = 13514$  как максимум.
2. Как ведёт себя плотность рекордов при  $m \rightarrow \infty$ ? Убывает ли она к нулю или стабилизируется на положительном уровне?
3. Существует ли аналог параметризации Русина для  $E'_m$ , то есть двухпараметрическое семейство с растущей разностью  $n - m$ ? Аргументы против:  $j$ -инвариант  $E'_m$  отличен от нуля, а возмущение  $2x^2 - 4T_mx$  ломает кубическую структуру, лежащую в основе параметризации Русина.
4. Как связано число целых точек на  $E'_m$  со структурой группы Морделла – Вейля поверхности  $y^2 = x^3 + 2x^2 - 4Tx + T^2$  над  $\mathbb{Q}(T)$ ?

## 5. Совпадения сумм последовательных кубов

Назовём *совпадением* пару различных представлений одного и того же числа  $N$  в виде суммы не менее двух последовательных кубов:

$$S_{a,b} = S_{c,d}, \quad a < b \leq c < d, \quad b - a \geq 2, \quad d - c \geq 2.$$

**Теорема 8.** Пусть  $a < b$ ,  $c < d$ . Тогда условие  $S_{a,b} = S_{c,d}$  равносильно

$$T_b^2 + T_c^2 = T_d^2 + T_a^2. \quad (15)$$

**Доказательство.** По формуле (1):

$$S_{a,b} = T_b^2 - T_a^2, \quad S_{c,d} = T_d^2 - T_c^2.$$

Очевидно,

$$S_{a,b} = S_{c,d} \iff T_b^2 - T_a^2 = T_d^2 - T_c^2 \iff T_b^2 + T_c^2 = T_d^2 + T_a^2.$$

Теорема доказана.

**Следствие 4.** Пусть  $a < b \leq c < d$ . Тогда из равенства  $S_{a,b} = S_{c,d}$  следует равенство

$$S_{a,c} = S_{b,d}. \quad (16)$$

**Доказательство.** По теореме 8, условие  $S_{a,b} = S_{c,d}$  равносильно

$$T_b^2 + T_c^2 = T_d^2 + T_a^2.$$

Переставим слагаемые:

$$T_c^2 - T_a^2 = T_d^2 - T_b^2.$$

Левая часть равна  $S_{a,c}$ , правая —  $S_{b,d}$ . Значит,  $S_{a,c} = S_{b,d}$ . Следствие 4 доказано.

Равенство (16) играет важную роль при анализе совпадений. Хотя интервалы  $(a, c)$  и  $(b, d)$  перекрываются, а значит, само равенство (16) не является совпадением в смысле данного определения, оно показывает, что каждому совпадению  $S_{a,b} = S_{c,d}$  можно сопоставить «двойственное» равенство сумм  $S_{a,c} = S_{b,d}$ . Эта двойственность используется при описании тройных совпадений.

Ниже приведены начальные совпадения, найденные прямым перебором. В каждой строке указаны индексы  $(a, b, c, d)$ , для которых  $S_{a,b} = S_{c,d}$  и общее значение  $N$ .

| $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $N$     |
|-----|-----|-----|-----|---------|
| 6   | 24  | 29  | 32  | 89559   |
| 4   | 25  | 36  | 38  | 105525  |
| 7   | 34  | 47  | 50  | 353241  |
| 7   | 55  | 59  | 68  | 2370816 |
| 60  | 71  | 100 | 103 | 3184236 |
| 2   | 77  | 95  | 104 | 9018000 |
| 30  | 79  | 122 | 127 | 9769375 |

Последовательность значений  $N$ , для которых существует два или более представлений в виде суммы последовательных кубов, совпадает с OEIS A265845 [5].

При вычислении всех совпадений до  $n_{max} \leq 50000$  ( $n_{max}$  - максимальный индекс в суммах  $S_{m,n}$ ), был замечен один интересный случай:

$$S_{3,28} = S_{29,34} = 164800.$$

Здесь интервалы  $(3, 28)$  и  $(29, 34)$  разделены одним кубом.

**Лемма 6.** Для любого  $x \in \mathbb{N}$

$$T_{x-1}^2 + T_x^2 = T_{x^2}.$$

**Доказательство.** По определению треугольного числа

$$T_{x-1} = \frac{(x-1)x}{2}, \quad T_x = \frac{x(x+1)}{2}.$$

Тогда

$$T_{x-1}^2 + T_x^2 = \frac{x^2}{4} [(x-1)^2 + (x+1)^2] = \frac{x^2 \cdot 2(x^2 + 1)}{4} = \frac{x^2(x^2 + 1)}{2} = T_{x^2}.$$

Лемма доказана. Заметим, что лемма 6 является следствием более общей известной формулы:  $T_{xy} = T_x T_y + T_{x-1} T_{y-1}$ ,  $x, y \in \mathbb{N}$ .

**Теорема 9.** Пусть  $a < b < d$  — натуральные числа с  $b - a \geq 2$ ,  $d - b \geq 2$ . Тогда равенство

$$S_{a,b} = S_{b+1,d}$$

равносильно равенству

$$T_a^2 + T_d^2 = T_{(b+1)^2}.$$

**Доказательство.** Из  $S_{a,b} = S_{b+1,d}$ :

$$T_b^2 - T_a^2 = T_d^2 - T_{b+1}^2 \implies T_a^2 + T_d^2 = T_b^2 + T_{b+1}^2.$$

Согласно лемме 6,

$$T_b^2 + T_{b+1}^2 = T_{(b+1)^2}.$$

Значит,  $T_a^2 + T_d^2 = T_{(b+1)^2}$ . Обратно, из последнего равенства следует  $S_{a,b} = S_{b+1,d}$ . Теорема доказана.

Был проведен дополнительный поиск равенства из теоремы 9 ( $b+1=c$ ) для всех  $b \leq 10^6$ . Второго такого случая интервалов со смещением 1, найти не удалось.

Наряду с двойными, возможны тройные совпадения, когда одно и то же число представляется в виде суммы последовательных кубов тремя разными способами:

$$S_{a,b} = S_{c,d} = S_{e,f},$$

где все три интервала имеют длину не менее двух. В исследованном диапазоне было найдено два таких совпадения:

$$S_{2144,5631} = S_{3047,5720} = S_{8072,8504} = 246153726441216,$$

$$S_{4990,19825} = S_{6048,19848} = S_{12509,20550} = 38467098184323600.$$

Оба значения не являются кубами: первое лежит строго между  $62671^3$  и  $62672^3$ , второе — между  $337569^3$  и  $337570^3$ .

В тройных совпадениях отдельные интервалы могут пересекаться. В этих случаях они, в соответствии со следствием 4, дают двойные совпадения. Так, для первого примера тройного совпадения имеем:

$$S_{2144,3047} = S_{5631,5720}, \quad S_{2144,8072} = S_{5631,8504}, \quad S_{3047,8072} = S_{5720,8504}.$$

При поиске совпадений прямой перебор проводился до тех пор, пока значения  $n_{max}$  укладывались в 64-битные беззнаковые целые. Это ограничивает диапазон значением  $T_{n_{max}}^2 < 2^{64}$ , что соответствует  $n_{max} \leq 50000$ . Результаты подтверждены двумя независимыми алгоритмами (прямым перебором с хеш-таблицей и блочным алгоритмом с внешней сортировкой).

| Показатель           | $n \leq 5 \cdot 10^3$ | $n \leq 10^4$ | $n \leq 2 \cdot 10^4$ | $n \leq 5 \cdot 10^4$ |
|----------------------|-----------------------|---------------|-----------------------|-----------------------|
| Двойные совпадения   | 681                   | 1064          | 1687                  | 2926                  |
| Тройных совпадений   | 0                     | 1             | 1                     | 2                     |
| Четверных совпадений | 0                     | 0             | 0                     | 0                     |

При увеличении диапазона в десять раз (от  $n_{max} = 5000$  до  $n_{max} = 50000$ ) число значений с двумя представлениями выросло примерно в 4,3 раза. Это соответствует росту, близкому к линейному по  $n_{max}$ , и существенно медленнее квадратичного. Тройные совпадения появляются начиная с  $n_{max} \geq 10^4$ ; до  $n_{max} \leq 50000$  их найдено два. Четверных совпадений не обнаружено ни в одном диапазоне.

### Невозможность совпадений малого количества кубов.

Рассмотрим уравнение

$$S_{a,b} = S_{c,c+2}, \quad a < b \leq c, \quad b - a \geq 2, \quad (17)$$

$$\text{то есть } (c+1)^3 + (c+2)^3 = \sum_{i=a+1}^b i^3.$$

**Теорема 10.** Для  $b-a = 2$  и  $b-a = 3$  уравнение (17) не имеет решений.

**Доказательство.** Для  $b-a = 2$  это очевидно. Сумма любого фиксированного количества кубов строго возрастает при увеличении индексов с сохранением длины отрезка, поэтому совпадение таких сумм невозможно.

В уравнении  $(a+1)^3 + (a+2)^3 + (a+3)^3 = (c+1)^3 + (c+2)^3$  сделаем замены переменных:  $x = a+2$  и  $c+1 = y$ . Тогда, левая часть его равна  $(x-1)^3 + x^3 + (x+1)^3 = 3x^3 + 6x$ , а правая равна  $y^3 + (y+1)^3 = 2y^3 + 3y^2 + 3y + 1$ . Таким образом, исходное уравнение эквивалентно:

$$3x^3 + 6x = 2y^3 + 3y^2 + 3y + 1 \quad (18)$$

По модулю 3 левая часть сравнима с 0, поэтому

$$2y^3 + 1 \equiv 0 \pmod{3} \implies y^3 \equiv 1 \pmod{3} \implies y \equiv 1 \pmod{3}.$$

Значит,  $y = 3k + 1$  для некоторого  $k \geq 1$  (так как  $y \geq x + 2 \geq 5$ ). Подстановка в (18) и деление на 3 дают

$$x^3 + 2x = 18k^3 + 27k^2 + 15k + 3.$$

Правая часть полученного уравнения нечётна при любом  $k$  (проверяется по модулю 2: при чётном  $k$  она сравнима с 1, при нечётном — тоже с 1). Значит,  $x^3 + 2x$  нечётно, откуда  $x$  нечётно. Тогда  $\gcd(x, x^2 + 2) = 1$ . и последнее уравнение переписывается в виде:

$$x(x^2 + 2) = 3AB, \quad A = 2k + 1, \quad B = 3k^2 + 3k + 1.$$

Заметим, что

$$4B - 3A^2 = 1,$$

поэтому  $\gcd(A, B) = 1$ . Кроме того, из  $y \geq x + 2$  следует

$$x \leq 3k - 1.$$

Возможны два случая.

1:  $3 \mid x$ , то есть  $x = 3u$ , причем  $u \leq k - 1$ . После сокращения на 3, получаем

$$u(9u^2 + 2) = AB.$$

Поскольку  $\gcd(u, 9u^2 + 2) = \gcd(u, 2) = 1$  и  $\gcd(A, B) = 1$ , разложение единственно:

$$\{A, B\} = \{u, 9u^2 + 2\}.$$

Если  $A = u$ , то  $u = 2k + 1$ , что противоречит  $u \leq k - 1$  при  $k \geq 1$ .

Если  $B = u$ , то  $u = 3k^2 + 3k + 1$ , что противоречит  $u \leq k - 1$  при  $k \geq 1$ .

2:  $3 \nmid x$ , то есть  $3 \mid x^2 + 2$ . Пусть  $x^2 + 2 = 3v$ , тогда

$$xv = AB.$$

Поскольку  $\gcd(x, v) = 1$  и  $\gcd(A, B) = 1$ , имеем

$$\{A, B\} = \{x, v\}.$$

Если  $A = x$ , то  $x = 2k + 1$ , то есть  $k \geq 2$ . Условие  $v = B$  даёт

$$\frac{x^2 + 2}{3} = 3k^2 + 3k + 1 \implies \frac{(2k + 1)^2 + 2}{3} = 3k^2 + 3k + 1,$$

то есть

$$4k^2 + 4k + 3 = 9k^2 + 9k + 3 \implies 5k^2 + 5k = 0,$$

откуда  $k = 0$  — противоречие с  $k \geq 2$ .

Если  $B = x$ , то  $x = 3k^2 + 3k + 1$ . Но тогда  $x > 3k - 1$  при  $k \geq 1$  — противоречие.

Оба случая приводят к противоречию. Следовательно, при  $b - a = 3$  решений нет. Теорема доказана.

Теорема 10, скорее всего, распространяется и на другие отрезки  $b - a > 3$ , то есть сумму двух последовательных кубов невозможно представить суммой  $1, 2, 3, \dots, N$  последовательных кубов. С другой стороны есть приведенный выше пример  $S_{4,25} = S_{36,38} = 37^3 + 38^3 = 105525$ , то есть существует верхняя граница  $N < 21$ .

Проверка прямым перебором для всех  $a \leq 10^6$  и  $3 < N \leq 20$ , показала, что, вероятно, верхняя граница для  $N$  равна 20. Зафиксируем это как эмпирический факт.

### Связь с треугольником Серпинского.

Если формально допустить в формуле  $S_{m,n} = T_n^2 - T_m^2$  значение  $m = 0$ , то  $S_{0,n} = T_n^2$ . В частности,

$$S_{0,132} = T_{132}^2 = 8778^2 = 77053284 = S_{143,164}.$$

Это в точности равенство  $T_{132}^2 + T_{143}^2 = T_{164}^2$ , то есть треугольник Серпинского. Таким образом, теорема о единственности треугольника Серпинского, доказанная в [3], равносильна утверждению, что совпадения вида  $S_{0,b} = S_{c,d}$  имеют ровно одно решение.

**Особые случаи эллиптической кривой  $E_m$  :  $T_m = s^2$  и  $m = t^2$ .**

Особый интерес представляют случаи эллиптической кривой (2), когда треугольное число  $T_m$  само является квадратом или когда индекс  $m$  является квадратом.

**Теорема 11.** *Для всех  $m \geq 8$ , для которых  $T_m$  — полный квадрат, точка  $D = (-m, T_m - m)$  имеет бесконечный порядок в  $E_m(\mathbb{Q})$ . Следовательно,  $\text{rank } E_m(\mathbb{Q}) \geq 1$ .*

**Доказательство.** Если  $T_m = s^2$ , точка  $D$  лежит на  $E_m$  по теореме 1. Она не является точкой кручения, потому что кручение  $E_m$  исчерпывается  $(0, \pm s^2)$  и  $\mathcal{O}$  при условии, что  $T_m$  — не куб. Единственное треугольное число, являющееся полной шестой степенью, — это  $T_1 = 1$  (результат

Люнгрена [7]). Для  $m \geq 8$  имеем  $T_m \neq 1$ , значит,  $D$  имеет бесконечный порядок. Теорема доказана.

Индексы  $m$  треугольных чисел  $T_m$  являющихся одновременно квадратными определяются уравнением Пелля

$$m(m+1) = 2s^2, \quad s \in \mathbb{N}$$

и вытекающим из него рекуррентным соотношением ([6], 1.3.7, стр. 29):

$$m_{k+1} = 6m_k - m_{k-1} + 2, \quad m_1 = 1, \quad m_2 = 8. \quad (19)$$

Последовательность таких чисел  $m$  довольно быстро растет:

$$\{1, 8, 49, 288, 1681, 9800, 57121, 332928, 1940449, 11309768, \dots\}$$

Докажем, что она не пересекается с параметризацией Русина. Предположим противное, что при некотором допустимом  $u$  число

$$m(u) = \frac{u^4 - 3u^3 - 2u^2 - 2}{6}$$

совпало с индексом  $m_k$  квадратного треугольного числа.

1. По модулю 7 последовательность  $m_k$  принимает только значения 0 и 1. Прямая проверка остатков  $u \bmod 7$  показывает, что  $m(u) \equiv 0, 1 \pmod{7}$  лишь при  $u \equiv 6 \pmod{7}$ .

2. По модулю 3: если  $u \equiv 1 \pmod{3}$ , то  $m(u) \equiv 2 \pmod{3}$ ; если  $u \equiv 2 \pmod{3}$ , то  $m(u) \equiv 0 \pmod{3}$ . В последовательности  $m_k$  остаток 2  $\pmod{3}$  встречается только при  $k \equiv 2 \pmod{4}$ , а остаток 0  $\pmod{3}$  — только при  $k \equiv 0 \pmod{4}$ . В обоих случаях  $k$  чётно, значит,  $m_k$  чётно. Сопоставляя с  $u \equiv 6 \pmod{7}$ , получаем, что равенство возможно лишь при  $u \equiv 55 \pmod{84}$ .

3. Но для  $u \equiv 55 \pmod{84}$  прямая проверка остатков по модулю 16 даёт  $m(u) \not\equiv 0 \pmod{16}$ , тогда как для чётных  $k$  из пункта 2 имеем  $m_k \equiv 0 \pmod{16}$  (это сразу следует из рекуррентности  $m_{k+1} = 6m_k - m_{k-1} + 2$  по модулю 16). Противоречие.

Проверка начальных значений последовательности  $m_k$  до 1940449, не дает на кривой  $E_m$  никаких других целых точек кроме универсальных.

**Лемма 7.** Уравнение  $y^4 + y^2 = 2x^3$  имеет единственное решение в натуральных числах  $(x, y) = (1, 1)$ .

**Доказательство.** Умножая на 4 и дополняя до квадрата:

$$(2y^2 + 1)^2 - 1 = 8x^3.$$

Полагая  $Z = 2y^2 + 1$  и  $X = 2x$ , получаем  $Z^2 = X^3 + 1$ . Целые точки этой кривой исчерпываются:  $(-1, 0)$ ,  $(0, \pm 1)$ ,  $(2, \pm 3)$ . Поскольку  $X = 2x$  чётно и  $Z = 2y^2 + 1 > 0$ , то подойдет только одно решение  $(X, Z) = (2, 3)$ . Отсюда  $x = 1$  и  $y = 1$ .

**Теорема 12.** Для всех  $t \geq 2$  точка  $D = (-t^2, T_{t^2-1})$  имеет бесконечный порядок в  $E_{t^2}(\mathbb{Q})$ .

**Доказательство.** По лемме 6,  $T_{t^2} = T_{t^2-1}^2 + T_t^2$ , значит,  $D$  лежит на кривой. Условие  $T_{t^2} = c^3$  равносильно уравнению  $t^4 + t^2 = 2c^3$ , которое имеет единственное решение  $t = 1$  (согласно лемме 7). Для  $t \geq 2$  точка  $D$  не кручение. Что и требовалось доказать.

**Следствие 5.** При  $y \geq 2$  число  $T_{y^2}$  не является полным кубом.

## 6. Мультипликативные разложения

В этом параграфе мы докажем существование и единственность бесконечного семейства решений уравнения

$$T_b^2 = T_{a_1} \cdot T_{a_2}, \quad 0 < a_1 < a_2. \quad (20)$$

**Лемма 8.** Если имеет место (20), то  $T_{a_1}$  и  $T_{a_2}$  — полные квадраты.

**Доказательство.** Пусть  $T_{a_1} = q^2 n$ ,  $T_{a_2} = p^2 n$ , где  $n$  — бесквадратное число,  $\gcd(p, q) = 1$ ,  $p > q > 0$ . Тогда  $T_b = pqn$ . Условия того, что  $T_{a_1}, T_{a_2}, T_b$  — треугольные числа, означают, что

$$u^2 - 8nq^2 = 1, \quad v^2 - 8np^2 = 1, \quad w^2 - 8np^2q^2 = 1, \quad (21)$$

где  $u = 2a_1 + 1$ ,  $v = 2a_2 + 1$ ,  $w = 2b + 1$ .

Нам нужно доказать, что  $n = 1$ . Предположим противное, что  $n > 1$ , то есть  $D = 8n > 8$ . Пусть  $(u_1, v_1)$  — фундаментальное решение уравнения  $X^2 - DY^2 = 1$ . Все решения имеют вид  $(u_1 + v_1\sqrt{D})^k$ , а их  $Y$ -координаты

образуют последовательность Люка  $Y_k$  с  $Y_1 = v_1$  и  $Y_{k+1} = 2u_1Y_k - Y_{k-1}$ . Из (21) следует, что  $q = Y_i$  и  $p = Y_j$  для некоторых  $i < j$ , а также что  $pq = Y_k$  для некоторого  $k$ . Иными словами,

$$Y_iY_j = Y_k.$$

Воспользуемся теоремой Люнгрена о последовательностях Люка [7]: для последовательности  $Y_k$ , отвечающей уравнению  $X^2 - DY^2 = 1$  с  $D > 1$ , равенство  $Y_iY_j = Y_k$  при  $i, j \geq 1$  возможно только в том случае, когда  $i = 1$  или  $j = 1$ . Поскольку  $i < j$ , получаем  $i = 1$ , то есть  $q = Y_1$ .

Далее, из треугольности  $T_{a_1} = nq^2 = nY_1^2$  следует, что  $Y_1^2$  является  $Y$ -координатой некоторого решения уравнения  $X^2 - DY^2 = 1$ . Вторая часть теоремы Люнгрена о единственности [7] утверждает: если  $Y_1 > 1$ , то  $Y_1^2$  не является  $Y$ -координатой никакого решения того же уравнения. Следовательно,  $Y_1 = 1$ . Тогда фундаментальное решение имеет вид  $(u_1, 1)$ , и из  $u_1^2 - 8n = 1$  получаем  $8n = (u_1 - 1)(u_1 + 1)$ . Так как  $u_1$  нечётно,  $u_1 = 2s + 1$ , откуда  $n = s(s + 1)/2 = T_s$ . То есть,  $n$  — треугольное число, и  $T_{a_1} = n$ .

Теперь из (20) и  $T_{a_1} = n$  следует

$$T_{a_2} = p^2n, \quad T_b = pn.$$

Если  $p = 1$ , то  $T_{a_2} = T_b = n$ , откуда  $a_2 = b$  и  $a_1 = a_2$ , что противоречит  $a_1 < a_2$ . Значит,  $p > 1$ . Но тогда  $T_{a_2} = p^2n$  и  $T_b = pn$  — два треугольных числа, отношение которых равно  $p$ . Применяя к паре  $(a_2, b)$  те же рассуждения, что и выше (с  $n' = n/T_s = 1$ ), получаем, что  $n' = 1$ , то есть  $n = T_s$  является квадратом. Поскольку  $n$  бесквадратно, то  $n = 1$ , то есть противоречие с  $n > 1$ .

Итак,  $n > 1$  невозможно. Следовательно,  $n = 1$ , то есть  $T_{a_1} = q^2$  и  $T_{a_2} = p^2$ . Лемма доказана.

**Теорема 13.** Пусть последовательность  $a_k$  — это последовательность индексов квадратных треугольных чисел (19) с начальным членом  $a_0 = 0$ :

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_{k+1} = 6a_k - a_{k-1} + 2.$$

Последовательность  $b_k$  определим через  $a_k$ :

$$b_k = \frac{a_{k+1} - a_k - 1}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда,

$$T_{b_k}^2 = T_{a_k} \cdot T_{a_{k+1}}, \quad \text{для всех } k = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

и, при этом, равенства (22) охватывают все решения общего уравнения (20).

**Доказательство.** По лемме 8,  $T_{a_k}$  и  $T_{a_{k+1}}$  — полные квадраты, положим

$$s_k = \sqrt{T_{a_k}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Из условия треугольности  $T_{a_k}$  следует

$$(2a_k + 1)^2 - 8s_k^2 = 1. \quad (23)$$

Уравнение (23) является уравнением Пелля. Его фундаментальное решение есть  $3 + \sqrt{8}$ , поэтому все положительные решения задаются равенством

$$2a_k + 1 + s_k\sqrt{8} = (3 + \sqrt{8})^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (24)$$

из которого непосредственно следует, что последовательность  $s_k$  удовлетворяет почти той же рекуррентности, что и  $a_k$  (без слагаемого 2):

$$s_0 = 0, \quad s_1 = 1, \quad s_{k+1} = 6s_k - s_{k-1}.$$

Умножая (24) на  $(3 + \sqrt{8})$ , раскрывая скобки  $(3 + \sqrt{8})(2a_k + 1 + s_k\sqrt{8})$  и приравнявая к  $2a_{k+1} + 1 + s_{k+1}\sqrt{8}$ , получаем

$$s_{k+1} = 2a_k + 3s_k + 1, \quad a_{k+1} = 3a_k + 4s_k + 1. \quad (25)$$

Теперь вычислим  $T_{b_k}$ . По определению и с учётом (25) имеем

$$b_k = \frac{a_{k+1} - a_k - 1}{2} = \frac{(3a_k + 4s_k + 1) - a_k - 1}{2} = a_k + 2s_k.$$

Тогда

$$T_{b_k} = \frac{b_k(b_k + 1)}{2} = \frac{(a_k + 2s_k)(a_k + 2s_k + 1)}{2}. \quad (26)$$

Используя соотношение  $a_k^2 + a_k = 2s_k^2$  (которое следует из (23)), преобразуем числитель в (26):

$$(a_k + 2s_k)(a_k + 2s_k + 1) = a_k^2 + a_k + 4a_k s_k + 4s_k^2 + 2s_k = 2s_k(2a_k + 3s_k + 1).$$

По (25) выражение в скобках равно  $s_{k+1}$ . Следовательно,

$$T_{b_k} = s_k s_{k+1}.$$

Возводя в квадрат и учитывая  $T_{a_k} = s_k^2$ , получаем (20). Существование доказано.

Докажем единственность. Пусть  $(a_1, a_2, b)$  — произвольное решение уравнения (20). Из леммы 8 следует, что существуют  $i < j$  такие, что

$$T_{a_1} = s_i^2, \quad T_{a_2} = s_j^2, \quad T_b = s_i s_j.$$

Остаётся показать, что равенство  $T_b = s_i s_j$  возможно только при  $j = i+1$ , и тогда  $b = b_i$ .

Для последовательности  $s_k$  выполняется тождество

$$s_{k+1} s_{k-1} - s_k^2 = -1, \quad (27)$$

которое непосредственно следует из рекуррентного соотношения для  $s_k$ . Из (27) следует

$$s_{k-1} s_{k+1} = (s_k - 1)(s_k + 1). \quad (28)$$

Предположим, что  $j \geq i+2$ . Тогда  $s_j \geq s_{i+2}$ , и из (28) и монотонности  $s_k$  получаем

$$T_{b_i} = s_i s_{i+1} < s_i s_{i+2} < s_i s_j.$$

С другой стороны,  $T_{b_{i+1}} - T_{b_i} = b_i + 1$  и можно показать, что  $s_i s_{i+2} > T_{b_{i+1}}$ .

Действительно, Из (27) при  $k = i+1$  получаем  $s_i s_{i+2} = s_{i+1}^2 - 1$ . С учётом (25) имеем  $b_i = (s_{i+1} + s_i - 1)/2$ , поэтому

$$s_i s_{i+2} - T_{b_{i+1}} = s_{i+1}(s_{i+1} - s_i) - \frac{s_{i+1} + s_i + 3}{2} > 0$$

для всех  $i \geq 1$  (при  $i = 1$  проверяется непосредственно, при  $i \geq 2$  левая часть растёт квадратично, правая — линейно).

Следовательно,  $s_i s_j$  лежит строго между  $T_{b_i}$  и  $T_{b_{i+1}}$  и не может быть треугольным числом. Противоречие. Аналогично рассматривается случай  $i \geq j+2$ . Значит,  $j = i+1$ .

При  $j = i+1$  имеем  $T_b = s_i s_{i+1} = T_{b_i}$ , откуда  $b = b_i$ . Теорема доказана.

Рассмотрим теперь уравнение вида:

$$T_x \cdot T_y^2 = T_z^2, \quad x, y, z \in \mathbb{N}. \quad (29)$$

Оно сводится к системе

$$\begin{cases} T_x = q^2, \\ T_z = q T_y, \end{cases} \quad (30)$$

где  $q \in \mathbb{N}$ . Первое уравнение означает, что  $T_x$  — квадратное треугольное число, то есть  $x = a_k$  и  $q = s_k$  для некоторого  $k$  (теорема 13). Второе уравнение после замен  $X = 2z + 1$ ,  $Y = 2y + 1$  принимает вид

$$X^2 - qY^2 = 1 - q. \quad (31)$$

Для каждого  $q = s_k$  уравнение (31) является обобщённым уравнением Пелля. Его решения задаются формулой

$$X_n + Y_n \sqrt{q} = \varepsilon_q^n \cdot (X_1 + Y_1 \sqrt{q}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

где  $\varepsilon_q$  — фундаментальная единица уравнения  $X^2 - qY^2 = 1$ , а  $(X_1, Y_1)$  — минимальное решение (31). Таким образом, уравнение (29) имеет бесконечную двумерную иерархию решений: внешний уровень задаётся индексом  $k$  (квадратные треугольные числа  $T_{a_k} = s_k^2$ ), внутренний — индексом  $n$  (решения уравнения Пелля для каждого  $q = s_k$ ).

**Пример.** При  $q = s_2 = 6$  (то есть  $x = a_2 = 8$ ) уравнение (31) принимает вид  $X^2 - 6Y^2 = -5$ , фундаментальная единица  $5 + 2\sqrt{6}$ , минимальное решение  $(X_1, Y_1) = (7, 3)$ , что даёт  $(y, z) = (1, 3)$ . Все решения получаются умножением на  $5 + 2\sqrt{6}$ :

$$(y, z) = (1, 3), (3, 8), (14, 35), (34, 84), (195, 483), \dots$$

При  $q = s_3 = 35$  (то есть  $x = a_3 = 49$ ) уравнение  $X^2 - 35Y^2 = -34$  имеет минимальное решение  $(X_1, Y_1) = (29, 5)$ , что даёт  $(y, z) = (2, 14)$ ; фундаментальная единица  $6 + \sqrt{35}$  порождает серию

$$(y, z) = (2, 14), (3, 20), (29, 174), (41, 245), (351, 2079), \dots$$

Случай  $q = 1$  даёт тривиальное семейство  $(x, y, z) = (1, y, y)$ .

## 7. Обобщённый треугольник Серпинского

В этом параграфе мы рассмотрим уравнение

$$T_a^2 + k T_c^2 = T_b^2, \quad k, a, b, c \in \mathbb{N}, \quad (32)$$

обобщающее классическую задачу о прямоугольном треугольнике из треугольных чисел. Используя тождество  $T_n^2 = S_{0,n}$  и  $S_{m,n} = T_n^2 - T_m^2$ , перепишем (32) в виде

$$S_{a,b} = k T_c^2, \quad (33)$$

то есть сумма последовательных кубов от  $a + 1$  до  $b$  равна  $k$ -кратному квадрату треугольного числа  $T_c$ . При  $k = 1$  уравнение (32) принимает вид  $T_a^2 + T_c^2 = T_b^2$  и задаёт треугольник Серпинского, единственное решение которого  $(a, c, b) = (132, 143, 164)$  установлено в [3].

**Сведение к конике.** Обозначим  $X = T_a$ ,  $Y = T_c$ ,  $Z = T_b$ . Тогда (25) принимает вид

$$X^2 + kY^2 = Z^2.$$

Это уравнение коники с рациональной точкой  $(X, Y, Z) = (1, 0, 1)$ . Все его рациональные решения параметризуются формулой

$$X = d|u^2 - kv^2|, \quad Y = 2duv, \quad Z = d(u^2 + kv^2), \quad (34)$$

где  $d \in \mathbb{Q}_{>0}$ ,  $u, v \in \mathbb{Z}$ ,  $\gcd(u, v) = 1$ . Задача сводится к требованию, чтобы  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  были треугольными числами.

**Теорема 14.** *Уравнение (32) имеет бесконечное семейство решений с  $a = c$  тогда и только тогда, когда  $k + 1 = u^2$  для некоторого целого  $u \geq 2$ , причём  $u$  не является полным квадратом. В этом случае все решения семейства имеют вид  $T_b = uT_a$ , а пары  $(a, b)$  задаются уравнением Пелля*

$$s^2 - ur^2 = 1 - u, \quad s = 2b + 1, \quad r = 2a + 1. \quad (35)$$

**Доказательство.** При  $a = c$  уравнение (32) принимает вид  $(1 + k)T_a^2 = T_b^2$ . Для целого  $T_b$  необходимо  $1 + k = u^2$  и  $T_b = uT_a$ . Условие  $T_b = uT_a$  равносильно  $b(b + 1) = ua(a + 1)$  и, после замены  $s = 2b + 1$ ,  $r = 2a + 1$ , уравнению (35). Если  $u$  не квадрат, уравнение Пелля (35) имеет бесконечно много решений в натуральных числах. Если  $u = w^2$ , то (35) даёт  $(s - wr)(s + wr) = 1 - w^2$ , что влечёт  $a = b = 0$ . Теорема доказана.

**Следствие 6.** *Все натуральные  $k$  делятся на три класса:*

- $k + 1$  не является полным квадратом: уравнение (32) имеет конечное число решений;
- $k + 1 = u^2$ , где  $u$  — не квадрат: бесконечное семейство по теореме 14;
- $k + 1 = w^4$ ,  $w \geq 2$ : только тривиальное решение.

**Сведение к гиперэллиптическим кривым.** Для каждого фиксированного  $k$  и каждого  $a$  задача (32) сводится к кривой рода 1. Полагая  $x = 2c + 1$ ,  $s = 2b + 1$  и исключая  $s$ , получаем

$$C_a^{(k)} : y^2 = k(x^2 - 1)^2 + 64T_a^2. \quad (36)$$

Каждой целой точке  $(x, y)$  на  $C_a^{(k)}$  с нечётным  $x$  и  $y + 1$ , являющимся полным квадратом  $(2b + 1)^2$ , соответствует решение задачи (32).

**Теорема 15.** Для каждой пары  $(k, a)$  из таблицы ниже уравнение (32) имеет ровно указанные нетривиальные решения в натуральных числах.

| $k$ | $a$ | Нетривиальные $(c, b)$ | Кондуктор $E$   |
|-----|-----|------------------------|-----------------|
| 2   | 6   | (15, 18)               | 18 967 872      |
| 3   | 2   | (2, 3), (9, 12)        | 27 792          |
| 3   | 10  | (14, 19)               | 1 533 335 760   |
| 6   | 2   | (3, 5)                 | 55 872          |
| 6   | 29  | (203, 318)             | 15 325 168 320  |
| 7   | 5   | (9, 15)                | 169 426 320     |
| 9   | 24  | (14, 29)               | 220 690         |
| 9   | 77  | (104, 182)             | 64 192 193 065  |
| 9   | 143 | (76, 164)              | 646 787 801 946 |
| 10  | 6   | (7, 13)                | 474 331 200     |

**Доказательство.** Для каждой пары  $(k, a)$  строится гиперэллиптическая кривая  $C_a^{(k)}$  по формуле (36). Соответствующая эллиптическая кривая  $E$  имеет ранг 2 или 3, кручение  $\mathbb{Z}/2$  и конечный кондуктор (указан в таблице). Функция `IntegralPoints` в Magma 2.29 даёт полный список целых точек на целочисленной модели  $E_{\text{int}}$ . После обратного отображения  $E \rightarrow C_a^{(k)}$  и отбора по условиям треугольности (нечётность  $x$ , квадратность  $y + 1$ ) получаем все нетривиальные решения. Теорема доказана.

**Замечание.** Базовая точка  $P_0$  для сведения  $C_a^{(k)} \rightarrow E$  выбирается как известное нетривиальное решение. При выборе тривиального решения  $(a, 0, a)$  часть целых точек может теряться из-за особенностей изоморфизма.

**Полная эмпирическая таблица для  $k \leq 10$ .** Для всех  $k \leq 10$  проведён прямой перебор решений уравнения (32) при  $b \leq 10^5$  и через кривые  $C_a^{(k)}$  при  $x \leq 10^9$ . Результаты сведены в таблицу.

| $k$ | Спорадические $a$ | Нетривиальные $(a, c, b)$                             | Фантомы |
|-----|-------------------|-------------------------------------------------------|---------|
| 1   | 132               | (132, 143, 164)                                       | —       |
| 2   | 6, 2058, 8679     | (6, 15, 18), (2058, 2204, 2841), (8679, 11439, 14135) | 2       |
| 3   | 2, 10             | (2, 2, 3), (2, 9, 12), (10, 14, 19)                   | 2       |
| 4   | 390               | (390, 935, 1325)                                      | 3       |
| 5   | —                 | —                                                     | 1       |
| 6   | 2, 29, 252        | (2, 3, 5), (29, 203, 318), (252, 440, 692)            | 2       |
| 7   | 5, 110            | (5, 9, 15), (110, 54, 120)                            | 1       |
| 8   | 34                | (34, 50, 85)                                          | 13      |
| 9   | 24, 77, 143       | (24, 14, 29), (77, 104, 182), (143, 76, 164)          | 1       |
| 10  | 6                 | (6, 7, 13)                                            | 0       |

Для  $k \in \{3, 4, 8, 9\}$  к таблице добавляется бесконечное семейство при  $a = 0$  (по теореме 14). Для  $k = 5$  нетривиальных решений не обнаружено.

**Замечания.** Тривиальное решение  $(a, 0, a)$  существует для всех  $k$  и  $a$ : при  $c = 0$  имеем  $T_a^2 + 0 = T_a^2$ . На кривой  $C_a^{(k)}$  ему соответствует точка  $(x, y) = (1, 8T_a)$ .

Кривая  $C_a^{(k)}$  может содержать целые точки, не соответствующие решениям задачи. Такие точки называем *фантомными*. Наибольшее число фантомов найдено при  $k = 8$ ,  $a = 34$ : из 15 целых точек на  $C_{34}^{(8)}$  только две дают решения (тривиальное и  $(34, 50, 85)$ ). Это показывает, что сведение к  $C_a^{(k)}$  строго шире задачи (32).

Число спорадических решений не монотонно по  $k$ : последовательность 1, 3, 3, 1, 0, 3, 2, 1, 3, 1 для  $k = 1, \dots, 10$ . Простой закономерности не обнаружено.

**Случай  $k = 1$ .** Уравнение (32) принимает вид  $T_a^2 + T_c^2 = T_b^2$ . Согласно теореме о единственности треугольника Серпинского (см.[3]), оно имеет ровно одно решение с  $a < c < b$ :  $(132, 143, 164)$ , то есть  $8778^2 + 10296^2 = 13530^2$ .

**Случай**  $k = 3$ ,  $a = 2$ . Кривая  $C_2^{(3)}$  содержит две нетривиальные целые точки, соответствующие решениям  $(2, 2, 3)$  и  $(2, 9, 12)$ :

$$T_2^2 + 3T_2^2 = 4T_2^2 = (2T_2)^2 = T_3^2,$$

$$T_2^2 + 3T_9^2 = 9 + 3 \cdot 2025 = 6084 = 78^2 = T_{12}^2.$$

Это единственный случай среди исследованных  $k \leq 10$ , когда одно  $a$  даёт две нетривиальные точки.

**Случай**  $k = 5$ . Нетривиальных решений не найдено ни при  $b \leq 10^5$  (прямой перебор), ни при  $c \leq 10^4$  (факторизационный метод). Попытка найти модульный запрет (модули до 200) не дала результата: для каждого модуля уравнение имеет нетривиальные решения сравнения. Отсутствие решений для  $k = 5$  остаётся эмпирическим фактом. При этом  $k + 1 = 6$  не является полным квадратом, а  $k = 5$  не является квадратом, так что оба источника бесконечности отсутствуют.

#### Открытые вопросы.

- Существует ли для  $k = 5$  нетривиальное решение при  $b > 10^5$ ?
- Почему  $k = 5$  выпадает из общего ряда, тогда как  $k = 7$  (тоже не квадрат, и  $k + 1$  не квадрат) даёт два спорадических решения?
- Как доказать отсутствие других спорадических решений для  $k = 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10$  при больших  $a$ ? Для  $k = 2$  случаи  $a = 2058$  и  $a = 8679$  требуют вычисления ранга 3 при кондукторах порядка  $10^{20}$ – $10^{24}$ .
- Существует ли общая формула для числа спорадических решений в зависимости от  $k$ ?
- Как связано число фантомных точек на  $C_a^{(k)}$  с рангом эллиптической кривой  $E$ ?

## Ссылки

- [1] Г. Гуляев. Суммы кубов последовательных натуральных чисел // ArxivOrg.Ru. — 2026. — URL: <https://arxivorg.ru/a/AX-134227>.
- [2] Г. Гуляев. Целочисленные точки на эллиптической кривой вида  $y^2 = x^3 + T_m^2$  // ArxivOrg.Ru. — 2026. — URL: <https://arxivorg.ru/a/AX-134228>.
- [3] Г. Гуляев. Единственность треугольника Серпинского // ArxivOrg.Ru. — 2026. — URL: <https://arxivorg.ru/a/AX-136379>.
- [4] D. Rusin. Sum of Consecutive Cubes Equals a Cube (long response...). sci.math, 5 September 1997. URL: <https://web.archive.org/web/20150106144342/http://www.math.niu.edu:80/%7Erusin/known-math/97/cube.sum>.
- [5] OEIS Foundation Inc. (2026). The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Sequence A265845. URL: <https://oeis.org/A265845>.
- [6] Деза Е. И., Деза М. М. Фигурные числа. М.: МЦНМО, 2015. 350 с. <https://znanium.ru/catalog/document?id=328878>
- [7] W. Ljunggren. Zur Theorie der Gleichung  $x^2 + 1 = Dy^4$ . Avh. Norske Vid. Akad. Oslo, 1942.
- [8] Magma Computational Algebra System. Version 2.29. <http://magma.maths.usyd.edu.au/>
- [9] The Julia Programming Language. <https://julialang.org/>