

Последовательность, порождаемая представлениями куба натурального числа суммами кубов

Георгий Гуляев

24 сентября 2026 г.

1. Введение и постановка задачи

Классическая задача о представлении чисел суммами кубов восходит к Эйлеру и Рамануджану. Уравнение

$$x^3 + y^3 + z^3 = t^3$$

имеет бесконечное множество целочисленных решений; полная параметризация была получена Чоудхри в 1998 году [2].

В настоящей работе мы рассматриваем, введенную в работе [1], последовательность, порождаемую этим уравнением. Начиная с $b_1 = 3$, на каждом шаге выбирается наименьшая пара (x, y) , такая что

$$b_k^3 + x^3 + y^3 = b_{k+1}^3$$

для некоторого $b_{k+1} > b_k$. Критерий «наименьшая» понимается лексикографически: сначала минимизируется $x^3 + y^3$, при равенстве — $(x + y)$.

Аналогичная задача для квадратов порождает известную последовательность A018930 в OEIS [3].

Последовательность b_k допускает естественную геометрическую интерпретацию, которая проясняет как её структуру, так и отличие кубического случая от квадратного.

Случай квадратов: диагональ n -мерного параллелепипеда

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ с рёбрами $a_1, a_2, \dots, a_n$. Его главная диагональ равна

$$d_n = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}.$$

Начиная с $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $d_2 = 5$, будем добавлять натуральные ребра a_k так, чтобы диагональ оставалась целой, выбирая, при этом, из всех таких a_k наименьшее.

Жадный алгоритм для квадратов строит последовательность

$$3, 4, 12, 84, 132, 12324, 1836, \dots$$

(известную как A018930 в OEIS [3]). На k -м шаге добавляется *одно* ребро x_k , и одновременно размерность растёт на единицу. Условие шага имеет вид

$$d_{k-1}^2 + x_k^2 = d_k^2,$$

то есть тройка (d_{k-1}, x_k, d_k) — пифагорова. Геометрически это означает, что мы *надстраиваем* параллелепипед, добавляя одно ребро так, чтобы новая диагональ снова была целой.

Возможность такой надстройки на каждом шаге опирается на *бесконечность множества пифагоровых троек* и на их параметризацию Евклида:

$$(d_{k-1}, x_k, d_k) = (u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2).$$

Случай кубов: диагональ «кубической коробки»

Рассмотрим теперь «кубическую коробку» с рёбрами $a_1, \dots, a_n$ и определим её «кубическую диагональ» как

$$b_n = \sqrt[3]{a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3}.$$

Условие задачи: при каждом $n = 2k - 1$ величина b_n должна быть натуральным числом.

Аналог шага для квадратов теперь записывается в виде

$$b_{k-1}^3 + a_{2k}^3 + a_{2k+1}^3 = b_k^3.$$

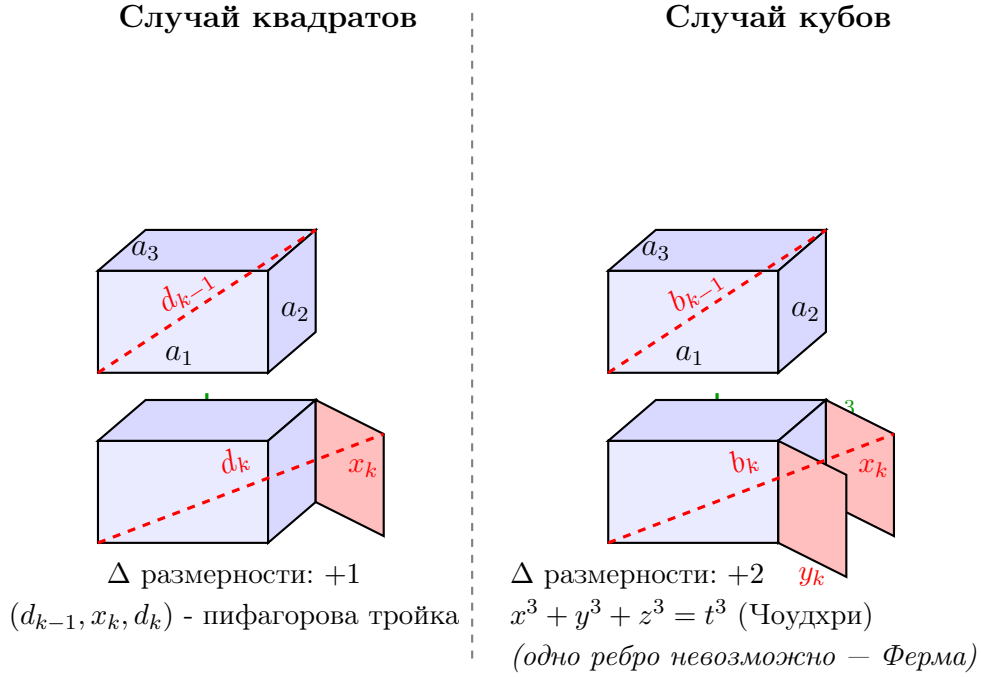


Рис. 1: Геометрическая интерпретация.

Естественное желание — надстраивать кубическую коробку, добавляя *одно* ребро за шаг, как в квадратном случае:

$$b_{k-1}^3 + x^3 = b_k^3.$$

Однако это уравнение неразрешимо в натуральных числах: это частный случай *великой теоремы Ферма* для показателя 3. Следовательно, добавление одного ребра невозможно.

Поэтому на каждом шаге добавляется *два* ребра, а уравнение шага принимает вид

$$b_{k-1}^3 + x^3 + y^3 = b_k^3.$$

Это уравнение имеет бесконечно много решений; полная параметризация получена Чоудхри в 1998 году (см. п. 2.1).

Таким образом, последовательность b_k является кубическим аналогом A018930, но «шаг» в кубическом случае вдвое шире по размерности. Это объясняет, почему в определении 1 пары индексов имеют вид (a_{2k}, a_{2k+1}) : каждая пара соответствует *двум* новым рёбрам кубической коробки.

Свойство	Случай квадратов	Случай кубов
Метрика	$\sum a_i^2$	$\sum a_i^3$
Уравнение шага	$x^2 + y^2 = d^2$	$x^3 + y^3 + z^3 = t^3$
Добавляется за шаг	одно ребро	два ребра
Причина	пифагоровы тройки	теорема Ферма
Параметризация решений	Евклид	Чоудхри
Жадное правило	минимальное x	минимальная пара (x, y)
Последовательность	A018930	настоящая работа

Таблица 1: Сравнение случаев квадратов и кубов.

В случае квадратов выбор минимального x на каждом шаге приводит к A018930. В случае кубов мы выбираем минимальную *пару* (x, y) (сначала по $x^3 + y^3$, затем по $x + y$). Эта жадность на паре и порождает ту сложную структуру, которая исследуется в остальных разделах.

2. Определение последовательности

Лемма 1. Пусть a, b, c, d - разные натуральные числа, такие, что $a < b$ и $c < d$. Тогда, если выполняется равенство:

$$a^3 + b^3 = c^3 + d^3, \quad (1)$$

то равенство $a + b = c + d$ невозможно.

Доказательство. Допустим, что выполняется (1) и $a + b = c + d$. Тогда

$$(a + b)^3 = (c + d)^3$$

то есть

$$a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = c^3 + d^3 + 3cd(c + d),$$

откуда следует, что $a \cdot b = c \cdot d$. Таким образом, по теореме Виета, пары (a, b) и (c, d) являются корнями одного и того же квадратного уравнения и, по условию леммы, $a < b$ и $c < d$. Значит, $a = c$ и $b = d$. Противоречие с тем, что они разные. Лемма 1 доказана.

Определение 1. Положим $a_1 = b_1 = 3$. Определим две последовательности a_k и b_k рекуррентным соотношением:

$$b_{k+1}^3 = b_k^3 + a_{2k}^3 + a_{2k+1}^3 \quad (2)$$

Здесь $k = 1, 2, 3, \dots$ и на каждом шаге a_{2k} и a_{2k+1} выбираются таким образом, чтобы добавляемая сумма $s_k = a_{2k}^3 + a_{2k+1}^3$ была наименьшей, а при равных s_k выбираем такие a_{2k} и a_{2k+1} , для которой сумма $a_{2k} + a_{2k+1}$ минимальна. Однозначность такого выбора гарантируется леммой 1.

Рассмотрим процесс построения последовательностей. При $k = 1$, $b_2^3 = b_1^3 + a_2^3 + a_3^3 = 3^3 + a_2^3 + a_3^3$. Нужно подобрать a_2 и a_3 так, чтобы выражение $3^3 + a_2^3 + a_3^3$ было кубом натурального числа. Есть варианты:

$$\begin{aligned} 3^3 + 4^3 + 5^3 &= 6^3 \\ 3^3 + 10^3 + 18^3 &= 19^3 \\ 3^3 + 18^3 + 24^3 &= 27^3 \\ 3^3 + 36^3 + 37^3 &= 46^3 \\ &\dots \end{aligned}$$

Выбираем по наименьшей сумме кубов: $a_2 = 4, a_3 = 5$. Тогда $b_2 = 6$. И так далее. Пары a_{2k}, a_{2k+1} будем добавлять в первую последовательность, располагая их по возрастанию, то есть $a_{2k} < a_{2k+1}$.

Первые члены последовательностей:

$$\begin{cases} a_n : 3, 4, 5, 1, 8, 12, 15, 3, 10, 18, 21, 14, 34, 2, 17, 16, 23, 8, 34, 30, 40, \dots \\ b_k : 3, 6, 9, 18, 19, 28, 40, 41, 44, 50, 60, 72, 76, 112, 126, 133, 178, 216, \dots \end{cases}$$

2.1. Связь с параметризацией Чоудхри

В 1998 году А. Чоудхри получил полную параметризацию решений уравнения

$$x^3 + y^3 + z^3 = t^3 \quad (3)$$

в целых числах [2]. Для произвольных целых a, b, c и натурального d положим

$$\begin{aligned} X &= d \cdot c (c^3 - a^3 - b^3), \\ Y &= d \cdot [c^3(a + b) - a^4 - b^4 + ab(2a^2 - 3ab + 2b^2)], \\ Z &= d \cdot [c^3(2a - b) + a^4 + b^4 - ab(2a^2 - 3ab + 2b^2)], \\ T &= d \cdot c (a^3 + (a - b)^3 + c^3). \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда четверка (X, Y, Z, T) удовлетворяет (3). Чоудхри показал, что всякое решение (3) получается из (4) при подходящих a, b, c, d .

Предложение 1. *Всякая пара (a_{2k}, a_{2k+1}) из последовательности, определённой в п. 2, входит вместе с числами b_k, b_{k+1} в одно из решений (4).*

Доказательство. Следует из сравнения уравнений (2) и (3).

Замечание 1. Параметризация Чоудхри описывает все решения (3), но она не указывает, какое из них минимально в смысле определения 1. Поэтому она, к сожалению, не помогает построить нашу последовательность a_n .

Замечание 2. Аналогичная параметризация Эйлера–Бине для равенства $x^3 + y^3 = z^3 + w^3$ также применима к нашей задаче, но содержит два параметра вместо трёх. Обратная задача (по заданному z найти параметры) для неё не решается быстрее, чем прямой перебор.

Теорема 1. *Последовательности a_n и b_k , порождаемые формулой (2), — бесконечны и в последовательности a_n не может быть циклов или бесконечного числа совпадающих добавляемых пар элементов.*

Доказательство. b_k — бесконечно возрастает, бесконечность решений уравнения (2) гарантируется частным случаем параметризации Чоудхри

$$x = 9u^3 - 1, \quad y = 9u^4 - 3u, \quad t = 9u^4$$

для уравнения $1^3 + x^3 + y^3 = t^3$. То есть, какой бы элемент b_k мы ни взяли, найдутся решения уравнения $b_k^3 + (xb_k)^3 + (yb_k)^3 = (tb_k)^3$ и среди них есть наименьшее в смысле определения 1.

Что касается a_n , то если бы произошло совпадение пар (a_{2k}, a_{2k+1}) бесконечное число раз для разных k , то это противоречило бы формуле (2):

$$a_{2k}^3 + a_{2k+1}^3 = b_{k+1}^3 - b_k^3 \geq (b_k + 1)^3 - b_k^3 = 3b_k^2 + 3b_k + 1.$$

Левая часть неравенства, по условию теоремы, для некоторых k константа (повторяется), а правая не ограничена и стремится к бесконечности. Теорема доказана.

3. Наблюдаемые свойства последовательностей

Вычисленные нами при помощи компьютерной программы эмпирические данные для анализа, содержат 1500 добавляемых пар (a_{2k}, a_{2k+1}) , то есть 3001 элемент последовательности a_n и 1501 элемент последовательности b_k .

$$(a_{3000}, a_{3001}) = (585200, 742140), \quad b_{1501} = 23116160.$$

При умножении обеих частей уравнения (2) на r^3 , $r \in \mathbb{N}$, получаем:

$$(rb_{k+1})^3 = (rb_k)^3 + (ra_{2k})^3 + (ra_{2k+1})^3.$$

Оказалось, что только в 30 случаях последнее уравнение удовлетворяет условиям определения 1, то есть добавляемая сумма $(ra_{2k})^3 + (ra_{2k+1})^3$ — минимальна.

Ниже, в таблице 2, приведены все найденные случаи таких умножений. Приведем все найденные коэффициенты умножения:

$r = 3, 4$ (2 раза), $6, 7$ (9 раз), $10, 14, 30, 39, 67, 121, 229, 237, 373, 431, 469, 721, 793, 854, 1817, 2197$ (2 раза).

Если же рассматривать последовательность a_n отдельно, найденные умножения образуют в ней два фрагмента из 8 пар, получаемые один из другого умножением на натуральный коэффициент 7, а именно каждая из пар

$$(a_{118}, a_{119}), (a_{120}, a_{121}), \dots, (a_{132}, a_{133})$$

умножается на 7 и переходит в соответствующую пару со сдвигом 144:

$$(a_{262}, a_{263}), (a_{264}, a_{265}), \dots, (a_{276}, a_{277}).$$

Однако, после $n > 330$ (в таблице $i > 165$) в последовательности a_n не найдено ни одного умножения, то есть это свойство, скорее всего, характерно только для начала последовательности a_n .

Часть найденных соотношений является композицией других: например, $4 \rightarrow 15$ с $r = 7$ и $15 \rightarrow 95$ с $r = 67$ дают $4 \rightarrow 95$ с $r = 469 = 7 \cdot 67$. Это следствие однородности уравнения шага: если четвёрка Q переходит в rQ , а rQ — в $s(rQ)$, то Q переходит в $(rs)Q$.

i	$(a_{2i}, a_{2i+1}, b_i, b_{i+1})$	j	$(a_{2j}, a_{2j+1}, b_j, b_{j+1})$	r
1	(4, 5, 3, 6)	3	(12, 15, 9, 18)	3
4	(3, 10, 18, 19)	12	(12, 40, 72, 76)	4
4	(3, 10, 18, 19)	15	(21, 70, 126, 133)	7
4	(3, 10, 18, 19)	95	(1407, 4690, 8442, 8911)	469
5	(18, 21, 19, 28)	13	(72, 84, 76, 112)	4
7	(2, 17, 40, 41)	70	(242, 2057, 4840, 4961)	121
7	(2, 17, 40, 41)	202	(4394, 37349, 87880, 90077)	2197
8	(16, 23, 41, 44)	143	(13664, 19642, 35014, 37576)	854
8	(16, 23, 41, 44)	196	(29072, 41791, 74497, 79948)	1817
8	(16, 23, 41, 44)	203	(35152, 50531, 90077, 96668)	2197
15	(21, 70, 126, 133)	95	(1407, 4690, 8442, 8911)	67
19	(31, 95, 219, 225)	36	(186, 570, 1314, 1350)	6
25	(94, 150, 590, 594)	413	(74542, 118950, 467870, 471042)	793
26	(30, 128, 594, 596)	236	(6870, 29312, 136026, 136484)	229
26	(30, 128, 594, 596)	397	(21630, 92288, 428274, 429716)	721
33	(116, 150, 906, 908)	347	(43268, 55950, 337938, 338684)	373
49	(9, 262, 2448, 2449)	194	(270, 7860, 73440, 73470)	30
54	(769, 800, 2855, 2894)	128	(7690, 8000, 28550, 28940)	10
59	(322, 1134, 4200, 4228)	131	(2254, 7938, 29400, 29596)	7
60	(591, 2153, 4228, 4410)	132	(4137, 15071, 29596, 30870)	7
61	(882, 1449, 4410, 4473)	133	(6174, 10143, 30870, 31311)	7
62	(270, 343, 4473, 4474)	134	(1890, 2401, 31311, 31318)	7
62	(270, 343, 4473, 4474)	626	(116370, 147833, 1927863, 1928294)	431
63	(944, 1335, 4474, 4527)	135	(6608, 9345, 31318, 31689)	7
64	(129, 1054, 4527, 4546)	136	(903, 7378, 31689, 31822)	7
65	(953, 2007, 4546, 4686)	137	(6671, 14049, 31822, 32802)	7
66	(352, 1122, 4686, 4708)	138	(2464, 7854, 32802, 32956)	7
73	(50, 1252, 5209, 5233)	508	(11850, 296724, 1234533, 1240221)	237
120	(1512, 2786, 24430, 24444)	350	(21168, 39004, 342020, 342216)	14
165	(3024, 12264, 44568, 44880)	589	(117936, 478296, 1738152, 1750320)	39

Таблица 2: Найденные умножения четверок.

3.1. Двойная факторизация

Для каждой пары $(x, y) = (a_{2k}, a_{2k+1})$ введём величины

$$S_1 = x+y, \quad M_2 = x^2-xy+y^2, \quad d_k = b_{k+1}-b_k, \quad Q_k = b_k^2+b_k b_{k+1}+b_{k+1}^2.$$

Предложение 2. Для всякого k выполнено

$$b_{k+1}^3 - b_k^3 = a_{2k}^3 + a_{2k+1}^3 = d_k \cdot Q_k = S_1 \cdot M_2. \quad (5)$$

Доказательство. Первое равенство — по определению последовательности. Второе — формула разности кубов, третье — формула суммы кубов.

Величина M_2 есть норма в кольце Эйзенштейна $\mathbb{Z}[\omega]$, где $\omega = e^{2\pi i/3}$: $M_2 = N(x + y\omega)$.

Теорема 2. Пусть $x, y \geq 1$ взаимно просты. Тогда всякий простой делитель p числа $M_2 = x^2 - xy + y^2$ таков, что либо $p = 3$, либо он удовлетворяет сравнению $p \equiv 1 \pmod{6}$.

Доказательство. При $\gcd(x, y) = 1$ число M_2 нечётно. Пусть $p \neq 2, 3$ — простой делитель. Из тождества $4M_2 = (2x - y)^2 + 3y^2$ следует $(2x - y)^2 \equiv -3y^2 \pmod{p}$. Если $p \mid y$, то $p \mid (2x - y)$, значит $p \mid 2x$ и $p \mid x$, что противоречит $\gcd(x, y) = 1$. Делим на y^2 :

$$\left(\frac{2x - y}{y}\right)^2 \equiv -3 \pmod{p}.$$

Значит, -3 — квадратичный вычет по модулю p , что равносильно $p \equiv 1 \pmod{3}$. Так как p нечётно, получаем $p \equiv 1 \pmod{6}$.

Следствие. Если $p \equiv 5 \pmod{6}$ — простой делитель M_2 , то $p \mid \gcd(x, y)$.

Теорема 2 объясняет, почему в норме M_2 примитивной пары нет простых $5 \pmod{6}$. Для пар с $\gcd > 1$ такие простые могут появляться, но лишь как общие делители x и y .

3.2. Примитивные и производные пары

Определение 2. Пару (a_{2k}, a_{2k+1}) назовём примитивной, если она не является кратной копией никакой более ранней пары:

$$\nexists i < k, r \geq 2 : (a_{2k}, a_{2k+1}) = r \cdot (a_{2i}, a_{2i+1}).$$

В противном случае пара называется производной.

Наблюдение 1. На 1500 шагах примитивна 1471 пара (98.1%), производны 29 (1.9%). Доля взаимно простых пар равна

$$\frac{287}{1500} \approx 19.1\%,$$

тогда как для случайных пар ожидается $6/\pi^2 \approx 60.8\%$.

Различие между 30 умножениями в таблице 2 и 29 производными парами объясняется тем, что пара с индексом 95 получается двумя способами: $4 \rightarrow 95$ с $r = 469$ и $15 \rightarrow 95$ с $r = 67$, причём $469 = 7 \cdot 67$ (см. предложение 3).

Таким образом, последовательность не является каскадом масштабированных копий: почти все пары — новые решения, а не произведения более ранних. Это отличает её от чисто алгебраических конструкций вроде геометрических модификаций из п. 5.

Наблюдение 2. Из 1213 пар с $\gcd > 1$ ровно 825 (68.0%) удовлетворяют условию $\gcd(a_{2k}, a_{2k+1}) \mid b_k$.

Это означает, что общий делитель пары часто «согласован» с текущим состоянием b_k , что естественно для однородной структуры уравнения.

Наблюдение 3 (блок $r = 7$). Среди всех умножений из таблицы 2 выделяется блок из восьми подряд идущих шагов:

$$(a_{118}, a_{119}), \dots, (a_{132}, a_{133}) \xrightarrow{\times 7} (a_{262}, a_{263}), \dots, (a_{276}, a_{277}).$$

Это означает, что на восьми последовательных шагах орбита точки $7b_k$ повторяет орбиту b_k , умноженную на 7.

Предложение 3 (композиция умножений). Если четвёрка Q переходит в rQ , а rQ переходит в $s(rQ)$, то Q переходит в $(rs)Q$.

Доказательство. Следует из однородности уравнения шага: масштабирование на r , затем на s эквивалентно масштабированию на rs .

Пример. В таблице 2 соотношения $4 \rightarrow 15$ с $r = 7$ и $15 \rightarrow 95$ с $r = 67$ дают $4 \rightarrow 95$ с $r = 469 = 7 \cdot 67$. Аналогично $7 \rightarrow 202$ и $8 \rightarrow 203$ с $r = 2197 = 13^3$ связаны через общее значение $b = 90077 = 41 \cdot 2197$.

4. Динамика отображения φ

Последовательность b_k удобно рассматривать как одну орбиту отображения на натуральных числах.

Определение 3. Для $b \in \mathbb{N}$ положим

$$\varphi(b) = \min\{t > b : t^3 - b^3 = x^3 + y^3 \text{ для некоторых } x, y \geq 1\}.$$

Если такого t нет, $\varphi(b)$ не определено.

Тогда $b_{k+1} = \varphi(b_k)$ при $b_1 = 3$. Более того, $\varphi(1) = 9 = b_3$, так что последовательность b_k совпадает с орбитой точки 1 начиная с третьего шага.

Лемма 2. Для всех b из области определения $\varphi(b) > b$.

Следствие. Отображение φ не имеет циклов: все орбиты — бесконечные в одном направлении пути, которые либо продолжаются бесконечно, либо обрываются.

Определение 4. Орбитой числа b назовём последовательность

$$b, \varphi(b), \varphi(\varphi(b)), \dots$$

Две орбиты сливаются, если их множества пересекаются. Орбита называется примитивной в диапазоне $(B_{\text{init}}, B_{\text{max}})$, если её минимальный элемент не превосходит B_{init} и ни одно $b' \leq B_{\text{max}}$, $b' < b$, не ведёт в неё. Минимальный элемент примитивной орбиты будем называть её семенем.

Поскольку φ — функция, две различные орбиты либо совпадают, либо не пересекаются; третьего не дано.

Наблюдение 4. Число примитивных орбит и множество их семян зависят от границ диапазона. При $B_{\text{max}} = 20000$ и различных B_{init} получены следующие результаты:

Ядро $\{1, 73, 83, 143\}$ присутствует при всех B_{init} . Остальные семена появляются по мере роста B_{init} , причём прирост не обнаруживает признаков насыщения.

Наблюдение 5. Рост B_{max} может приводить к слиянию орбит. Орбита с семенем 121, примитивная при $B_{\text{max}} = 5000$, поглощается орбитой 83 при $B_{\text{max}} = 20000$: путь $\varphi(83)$ удлиняется и входит в орбиту 121.

B_{init}	Число орбит	Семена
500	4	1, 73, 83, 143
1000	5	+ 579
1500	6	+ 1097
2000	7	+ 1651
2500	9	+ 2093, 2207
3000	10	+ 2633

Таблица 3: Рост числа примитивных орбит с B_{init} при $B_{\text{max}} = 20000$.

Таким образом, часть семян, наблюдаемых при малом B_{max} , является артефактом обрыва орбит.

Наблюдение 6. Все найденные примитивные семена нечётны:

1, 73, 83, 143, 579, 1097, 1651, 2093, 2207, 2633.

Проверка всех 1500 чётных чисел $b \leq 3000$ показала, что каждое из них вливается в одну из этих орбит. Ни одно чётное число не является началом собственной примитивной орбиты.

Наблюдение 7. Бассейны притяжения орбит неравномерны. Из 1500 чётных чисел $b \leq 3000$ орбиты с семенами 1, 73, 83 притягивают 1409 (94%); семя 143 — 67; семена 579, 1097, 1651 — 24 суммарно; семена 2093, 2207, 2633 — ни одного.

Семя	Чётных чисел $b \leq 3000$
1	525
83	476
73	408
143	67
1651	15
579	5
1097	4
2093, 2207, 2633	0

Таблица 4: Бассейны притяжения примитивных орбит.

Наблюдение 8. Глубина вливания — число шагов до попадания в известную орбиту — распределена неравномерно: 182 числа вливаются за

один шаг, но есть длинный хвост до 53 шагов. Наибольшая глубина — у $b = 266$, вливающегося в орбиту 83:

$$266 \rightarrow 356 \rightarrow 383 \rightarrow 509 \rightarrow 526 \rightarrow \dots \rightarrow 7544 \rightarrow 8096.$$

Это показывает, что граф φ содержит длинные «свободные» пути, прежде чем они вливаются в одну из магистральных орбит.

Гипотеза 1. Число примитивных орбит отображения φ бесконечно.

Эмпирическое обоснование: при росте B_{init} от 500 до 3000 число орбит выросло с 4 до 10, причём прирост не показывает признаков насыщения. Если бы число орбит было конечно, при достаточно большом B_{init} новые семена перестали бы появляться.

Гипотеза 2. Всякое примитивное семя отображения φ нечётно. Иными словами, для всякого чётного b найдётся $b' < b$ с $\varphi^k(b') = b$ при некотором $k \geq 1$.

Эмпирическое обоснование: все 10 найденных семян нечётны, а проверка 1500 чётных чисел $b \leq 3000$ показала, что каждое вливается в одну из этих орбит.

5. Геометрические модификации

Условие минимальности — источник сложности последовательности b_k . Естественно спросить, что произойдёт, если заменить его алгебраическим правилом.

Определение 5. Геометрической модификацией назовём последовательность вида

$$u_k = Z \cdot w^{k-1}, \quad w \in \mathbb{N}, \quad w \geq 2, \quad Z \in \mathbb{N},$$

для которой существует примитивное решение (X, Y, Z, T) уравнения $X^3 + Y^3 + Z^3 = T^3$ такое, что $w = T/Z$ целое и на каждом шаге добавляется пара $w^{k-1} \cdot (X, Y)$.

Теорема 3. Для каждого $c \geq 2$ тройка Чоудхри $(1, 1, c)$ порождает геометрическую модификацию с множителем $w = c$ и параметрами

$$X_c = c^4 - 2c, \quad Y_c = 2c^3 - 1, \quad Z_c = c^3 + 1, \quad T_c = c(c^3 + 1). \quad (6)$$

Доказательство. Подставляя $a = b = 1$ в формулы (4), получаем приведённые выражения. Тождество $X_c^3 + Y_c^3 + Z_c^3 = T_c^3$ проверяется прямой подстановкой выражений (6). Отношение $T_c/Z_c = c$ целое. Следовательно, $u_k = Z_p \cdot c^{k-1}$.

При $c \equiv 2 \pmod{3}$ четвёрка (6) имеет общий делитель 3; примитивная версия получается делением на $\gcd(X_c, Y_c, Z_c, T_c)$, что даёт стартовое значение Z_p из следствия к теореме 4.

Теорема 4. *Наибольший общий делитель четырёх величин (6) равен*

$$g = \gcd(X_c, Y_c, Z_c, T_c) = \begin{cases} 3, & c \equiv 2 \pmod{3}, \\ 1, & c \not\equiv 2 \pmod{3}. \end{cases} \quad (7)$$

Доказательство. Пусть p — простой делитель g . Из $p \mid Z_c = c^3 + 1$ и $p \mid Y_c = 2c^3 - 1$ получаем $3 \equiv 0 \pmod{p}$, значит $p = 3$. Далее, $3 \mid Y_c$ тогда и только тогда, когда $c \equiv 2 \pmod{3}$. При этом $X_c \equiv 6c \equiv 3 \pmod{9}$, то есть $v_3(X_c) = 1$, значит $v_3(g) = 1$.

Следствие. *Стартовое значение геометрической модификации равно*

$$Z_p = \frac{Z_c}{g} = \begin{cases} \frac{c^3 + 1}{3}, & c \equiv 2 \pmod{3}, \\ c^3 + 1, & c \not\equiv 2 \pmod{3}. \end{cases} \quad (8)$$

Пример. При $c = 2$: $Z_p = 3$, $w = 2$, последовательность 3, 6, 12, 24, 48, ... При $c = 3$: $Z_p = 28$, $w = 3$, последовательность 28, 84, 252, 756, ... При $c = 12$: $Z_p = 1729$ — знаменитое число Рамануджана.

Наблюдение 9. *Множество $\{Z_p : 2 \leq c \leq 100\}$, задаваемое формулой (8), пересекается с исходной последовательностью $\{b_k\}$ ровно в двух точках:*

$$c = 2 : Z_p = 3 = b_1, \quad c = 3 : Z_p = 28 = b_6.$$

Для всех $4 \leq c \leq 100$ число Z_p не совпадает ни с одним $b_k \leq 23\,116\,160$.

Таким образом, геометрические модификации образуют бесконечное семейство полностью предсказуемых последовательностей, но не являются подпоследовательностями исходной $\{b_k\}$.

Это иллюстрирует общий принцип: жадный алгоритм на диофантовом уравнении порождает хаотическую, «универсальную» последовательность, тогда как алгебраическая фиксация даёт предсказуемость, но ценой потери связи с исходной задачей.

6. Рост последовательностей

Оценка роста b_k — естественный вопрос, но строгие результаты здесь минимальны.

Предложение 4. *Выполнены неравенства*

$$k + 2 \leq b_k \leq 3 \cdot 9^{k-1}.$$

Доказательство. Нижняя граница: $b_{k+1} \geq b_k + 1$, так как $\varphi(b) > b$. Верхняя: при $b = 1$ есть решение $1^3 + 8^3 + 6^3 = 9^3$. Масштабируя на b_k , получаем $b_{k+1} \leq 9b_k$.

Промежуток между границами велик, и всё, что можно сказать точнее, — эмпирика.

Наблюдение 10. *По выборке из 1500 шагов ($b_{1501} = 23\,116\,160$) мгновенный локальный показатель*

$$p(k) = \frac{\log(b_{k+1}/b_k)}{\log((k+1)/k)}$$

колеблется в чрезвычайно широком диапазоне — от 0.0017 до 63.3. Столь широкий разброс означает, что мгновенный показатель не является устойчивой характеристикой роста и требует сглаживания.

Наблюдение 11. *Сглаживание по окну 250 даёт значения около 2.48 в начале выборки, медленно убывающие до 2.29 в конце. На доступном диапазоне сглаженный показатель не выходит на плато; его предельное значение, по-видимому, лежит между 2 и 2.5.*

Подгонка трёх моделей в логарифмическом масштабе:

Модель	std остатков	AIC	BIC
$c k^p$	0.201	−4812	−4801
$c k^p (\log k)^\alpha$	0.111	−6582	−6567
$c k^p e^{\beta \sqrt{\log k}}$	0.104	−6789	−6773

Таблица 5: Подгонка моделей роста.

Третья модель значимо лучше по AIC и BIC. Её коэффициенты

$$p = 4.38 \pm 0.03, \quad \beta = -7.65 \pm 0.12,$$

а формальный локальный показатель

$$\frac{d \log b_k}{d \log k} = p + \frac{\beta}{2\sqrt{\log k}}$$

при $k \approx 1400$ даёт ≈ 2.96 .

Наблюдение 12. Три метода дают разные оценки показателя роста:

- *сглаженный мгновенный показатель: ≈ 2.3 , медленно убывает;*
- *хвостовая регрессия по последним 500 точкам: $p \approx 2.9$;*
- *формальный показатель лучшей модели: ≈ 2.96 на хвосте.*

Расхождение объясняется тем, что хвостовая регрессия и третья модель опираются на редкие крупные скачки b_k , тогда как сглаженный показатель усредняет все шаги, включая множество мелких.

Вывод. В исследованном диапазоне $k \leq 1501$ величина b_k растёт промежуточно между k^2 и k^3 . Все три оценки показателя лежат в интервале 2.3–3.0, но не сходятся между собой. Точная асимптотическая форма роста — чистая степень, степень с логарифмической поправкой или иной закон — на текущих данных не установлена.

7. Заключение

Мы описали последовательность b_k , порождаемую жадным алгоритмом на уравнении $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$. Установлены следующие результаты.

- Последовательности a_n и b_k бесконечны; в последовательности a_n не может быть циклов или бесконечного числа совпадающих пар (теорема 1).
- Для всякого шага выполнена двойная факторизация

$$b_{k+1}^3 - b_k^3 = d_k Q_k = S_1 M_2,$$

и при $\gcd(a_{2k}, a_{2k+1}) = 1$ все простые делители нормы M_2 равны 3 или $\equiv 1 \pmod{6}$ (теорема 2).

- Отображение φ не имеет циклов; все его орбиты — бесконечные в одном направлении пути (лемма 2 и следствие).
- Для каждого $c \geq 2$ тройка Чоудхри $(1, 1, c)$ порождает геометрическую модификацию с множителем $w = c$, стартовым значением Z_p по формуле (8) и параметрами (6); общий делитель четвёрки равен 3 при $c \equiv 2 \pmod{3}$ и 1 в остальных случаях (теоремы 3, 4).

Эмпирически, по выборке из 1500 шагов до $b_{1501} = 23\,116\,160$, установлено:

- последовательность почти целиком состоит из примитивных пар: 1471 примитивных против 29 производных; доля взаимно простых пар $\approx 19.1\%$, что существенно ниже ожидаемых 60.8% ;
- среди пар с $\gcd > 1$ около 68% удовлетворяют условию $\gcd(a_{2k}, a_{2k+1}) \mid b_k$;
- найдено ровно 30 случаев, когда масштабированная четвёрка снова удовлетворяет условию минимальности; наибольший блок — восемь подряд идущих шагов с $r = 7$; часть умножений является композицией других;
- число примитивных орбит отображения φ растёт с B_{init} : от 4 при $B_{\text{init}} = 500$ до 10 при $B_{\text{init}} = 3000$; рост B_{max} может приводить к слиянию орбит (орбита 121 поглощается орбитой 83 при переходе от $B_{\text{max}} = 5000$ к $B_{\text{max}} = 20000$);
- все найденные примитивные семена нечётны; проверка 1500 чётных чисел $b \leq 3000$ показала, что каждое из них вливается в одну из нечётных орбит;
- бассейны притяжения орбит неравномерны: орбиты с семенами 1, 73, 83 притягивают 94% чётных чисел $b \leq 3000$, тогда как семена 2093, 2207, 2633 не притягивают ни одного;
- среди геометрических модификаций с $2 \leq c \leq 100$ только две точки — $c = 2$ и $c = 3$ — совпадают с членами исходной последовательности.

Рост b_k в исследованном диапазоне $k \leq 1501$ промежуточен между k^2 и k^3 . Три метода оценки показателя дают разные значения: сглаженный мгновенный показатель убывает от ≈ 2.48 до ≈ 2.29 вдоль выборки, хвостовая регрессия по последним 500 точкам даёт ≈ 2.9 , а формальный показатель лучшей из трёх рассмотренных моделей — ≈ 2.96 на хвосте.

Расхождение объясняется тем, что эти методы измеряют разные характеристики: сглаженный — типичный шаг, хвостовая регрессия — накопленный рост на последних точках, формальная модель — предельный показатель при данной параметризации.

На доступном диапазоне ни один из методов не даёт устойчивого плато, и точная асимптотическая форма роста — чистая степень, степень с логарифмической поправкой или иной закон — не установлена.

Открытые вопросы:

1. Достаточное условие «родительства»: когда пара (a_{2k}, a_{2k+1}) порождает масштабированную копию в последовательности. Необходимые условия (малость d_k , примитивность, кратность) найдены эмпирически, но не являются достаточными.
2. Истинная асимптотика роста b_k . Существующие оценки лежат между линейной и экспоненциальной; эмпирически рост полиномиален с показателем в интервале 2.3–3.0, но точное значение требует существенно больших k .
3. Какова асимптотика числа примитивных орбит отображения φ при $B_{\text{init}} \rightarrow \infty$? Растёт ли оно линейно, как $\sqrt{B_{\text{init}}}$, или иначе?
4. Верно ли, что все примитивные семена φ нечётны?
5. Существует ли в последовательности b_k нетривиальная бесконечная подпоследовательность с явным аналитическим законом, или все предсказуемые фрагменты — короткие геометрические ветви, обрывающиеся через один-два шага?

Литература

1. Гуляев Г. Компьютер в помощь математике. Исследование и поиск.
// ArxivOrg.Ru. — 2026. — URL: <https://arxivorg.ru/a/AX-134231>.
2. Choudhry A. On Equal Sums of Cubes. *Mathematics of Computation*, 1998.
3. Sloane N. J. A. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, A018930.
4. Ireland K., Rosen M. *A Classical Introduction to Modern Number Theory*. Springer, 1990.
5. Hardy G. H., Wright E. M. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford, 1938.