Правильно ли мы понимаем и формулируем „школьную“ теорему Виета и сопутствующие ей теоремы?

А. Х. Назиев

18 марта 2023 г.

Аннотация

Показано, что известные из школьного курса математики традиционные формулировки утверждений, называемых теоремой Виета и теоремой о разложении квадратного трёхчлена на линейные множители, неверны, а теорема, называемая обратной теоремой Виета, может быть существенно уточнена. Установлено, что выявленные недостатки порождены неумением или нежеланием видеть в математических высказываниях скрытые логические знаки, прежде всего кванторы. Традиционные формулировки, которые мы анализируем, пришли к нам из до-Фреге-вских времён и не пересматривались с позиций новой логики, созданной Фреге и другими великими логиками и математиками последних двух столетий. Восстанавливая кванторы и адекватно работая с импликациями, мы получаем правильные, современные формулировки рассматриваемых теорем. В заключение мы выражаем наши рассмотрения на языке логики первого порядка.

1. Традиционные формулировки

Теорему Виета и теорему о разложении квадратного трёхчлена на линейные множители традиционно формулируют следующим образом (см., например, [1–14]).

> Если x_1 и x_2 являются корнями трёхчлена $x^2 + px + q$ (или, что то же самое, уравнения $x^2 + px + q = 0$), то:
> 1) $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$ и 2) $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$.

В связи с этим прежде всего возникает вопрос, как нужно понимать, что

> x_1 и x_2 являются корнЯМИ ...?

Спросить об этом необходимо, потому что в учебниках объясняется, что такое корЕНЬ уравнения (единственное число), но не объясняется, что такое корНИ уравнения (множественное число).

Я много раз задавал этот вопрос ученикам, студентам, учителям, учителям учителей, и всегда все (подчеркиваю, ВСЕГДА и ВСЕ, без единого исключения) отвечали: это означает, что x_1 является корнем и x_2 является корнем.

Замечу по этому поводу, что моя интуиция говорит мне нечто иное, а именно, что следует различать утверждения:

а) числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения — и

б) корнями уравнения являются числа x_1 и x_2.

Мне представляется, что а) является ответом на вопрос, являются ли числа x_1 и x_2 корнями уравнения. Ответ гласит: да, каждое из названных чисел корнем является. Что же касается б), то оно, как представляется мне, является ответом на вопрос „какие числа являются корнями уравнения?“ В ответе на этот вопрос должны быть названы ВСЕ числа, которые являются корнями уравнения. Таким образом, на мой взгляд, утверждение „корнями уравнения являются числа x_1 и x_2“ означает не только то, что названные числа являются корнями, но также и то, что это — все корни. Итак, мне представляется, что:

числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения	$\leftrightarrow$	x_1 — корень и x_2 — корень;
корнями уравнения являются числа x_1 и x_2	$\leftrightarrow$	x_1 — корень и x_2 — корень и других корней нет.

Впрочем, за 50 лет работы со студентами и учителями я не встретил ни одного слушателя, который бы придерживался такого же мнения. После продолжительных разъяснений кое-кто из них нехотя соглашался. Зато все сходились на том, что указанное мной различие является чересчур тонким, чтобы пытаться донести его до учеников. Так что **пока остаётся только одно толкование** — то, что было указано выше. На этот счёт у меня имеется важное сообщение, сформулированное в следующем пункте.

2. Ошибочность традиционных формулировок

Важное сообщение

> *При указанном выше* **(общепризнанном!)** *понимании обе упомянутые „теоремы“ неверны.*

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим какое-нибудь конкретное уравнение, скажем,

$$x^2 - 1 = 0, \tag{1}$$

т. е. уравнение $x^2 + px + q = 0$ с $p = 0$ и $q = -1$. Найдём все x_1 и x_2, для которых верно, что x_1 и x_2 являются корнями данного уравнения.

Итак, пусть x_1 и x_2 — корни уравнения (1). Тогда

x_1 — корень и x_2 — корень, т. е.

$x_1^2 - 1 = 0$ и $x_2^2 - 1 = 0$, т. е.
$(x_1 - 1)(x_1 + 1) = 0$ и $(x_2 - 1)(x_2 + 1) = 0$, т. е.
($x_1 - 1 = 0$ или $x_1 + 1 = 0$) и ($x_2 - 1 = 0$ или $x_2 + 1 = 0$), т. е.
($x_1 = 1$ или $x_1 = -1$) и ($x_2 = 1$ или $x_2 = -1$), т. е.
а) ($x_1 = 1$ и $x_2 = 1$) или б) ($x_1 = 1$ и $x_2 = -1$) или
в) ($x_1 = -1$ и $x_2 = 1$) или г) ($x_1 = -1$ и $x_2 = -1$).

Прямые вычисления показывают, что и обратно, во всех этих четырёх случаях x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2 - 1 = 0$. Таким образом, для уравнения (1) посылки наших „теорем“ выполняются ровно в четырёх случаях, а именно: а), б), в) и г).

Посмотрим, в каких из этих случаев верны заключения. Легко видеть, что они верны только в двух случаях, б) и в), а в двух других случаях — неверны. Вряд ли это необходимо, но всё же приведём обоснование.

- „Теорема“ о разложении. В случае а) $(x - x_1)(x - x_2) = (x - 1)(x - 1) = (x - 1)^2 \neq x^2 - 1$. В случае б) $(x - x_1)(x - x_2) = (x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$. Два других случая рассматриваются столь же легко.

- „Теорема“ Виета. В случае в) $x_1 + x_2 = -1 + 1 = 0 = -p$ и $x_1 x_2 = (-1) \cdot 1 = -1 = q$. В случае г) $x_1 + x_2 = -1 + (-1) = -2 \neq 0 = -p$ (и $x_1 x_2 = (-1) \cdot (-1) = 1 \neq -1 = q$). Два других случая рассматриваются столь же легко.

Итак, в случаях а) и г) заключения рассмотренных „теорем“ неверны. Повторяем: посылки верны, а заключения неверны. Это означает, что **упомянутые „теоремы“ неверны**, как и было сказано.

Замечания. 1) Когда я говорю об указанных здесь ошибках школьникам, или студентам, или учителям, мои слушатели обычно спрашивают меня: „Так что же, Виета ошибся?“ Нет, Виета не ошибся. Виета не доказывал и даже не формулировал утверждения, которое теперь называется теоремой Виета. Виета привёл (без доказательства) то, что сейчас называется *обратной* теоремой Виета; см. [16, С. 309]. С ней всё в порядке, за исключением того, что она может быть существенно дополнена. Те, кто придумал то, что сейчас называют теоремой Виета, — они ошиблись. К сожалению, мне пока не удалось установить, кто был первым на этом пути. Если кто-нибудь знает, прошу сообщить мне (мой адрес указан в конце статьи).

2) Здесь прямо-таки напрашивается вопрос, как же можно было ошибиться в столь простой ситуации, и не просто ошибиться, а массово ошибаться десятилетиями? Причина очень простая: люди сами загоняли себя в ошибки. При выведении формулы корней квадратного уравнения устанавливали, что числа

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \text{ и } x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2},$$

и только они, являются корнями уравнения

$$x^2 + px + q = 0,$$

а теоремы Виета и о разложении квадратного трёхчлена на линейные множители формулировали *в тех же* переменных x_1 и x_2, провоцируя рассмотрение лишь одного случая. Стоило только сформулировать названные теоремы в других переменных, например, α и β, — и ошибка была бы почти исключена. Я говорю „*почти* исключена“ потому, что имею перед глазами пример великого человека, который сформулировал теорему Виета в переменных α и β, но всё-таки ошибся — ошибся прямо в доказательстве. Это — А. П. Киселёв. Цитирую ([5, С. 227–228]):

> «Теорема. Если α и β суть корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $\alpha + \beta = -p$ и $\alpha\beta = q$.

Д о к. Каковы бы ни были корни α и β, они определяются формулами

$$\alpha = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad \beta = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.»$$

Нет, конечно! Посмотрим на проблему с комбинаторной точки зрения. Имеем два различимых ящика, на которых написаны приведённые выше выражения для корней, и по этим ящикам распределяются два различимых шара, называемых α и β. Ясно, что существует не одно распределение, указанное А. П. Киселёвым, а четыре:

$-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$	$-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
α, β	—
α	β
β	α
—	α, β

Все, как заворожённые, повторяли ту же ошибку, что совершил А. П. Киселёв; не потому, что следовали ему, а потому что сами её совершали. И никто не попытался честно выяснить, при каких x_1 и x_2 (или α и β) справедливо то, что они утверждали, как это было сделано в начале нашей работы. Так пустяковая, в сущности, ошибка, простояла не меньше полутора столетий!

3) Кто-то может сказать, что это неинтересно, или не важно, или «не отражает достаточного количества оригинальных или осмысленных научных исследований», как сказали мне в одном солидном месте. Представьте себе, миллионам школьников по всему миру десятилетиями вбивают в головы ошибки под видом теорем, и никого это не смущает, потому что ошибки просто остаются незамеченными. Но когда кто-то обращает внимание на ошибки, он получает ответ, что это неинтересно. Массово совершать ошибки десятилетиями — интересно, а исправлять их — неинтересно! Может быть. Но ведь выносить мусор тоже неинтересно, а делать это нужно.

4) Почему ещё это важно. С самого начала 60-х годов прошлого века стали появляться компьютерные доказательства теорем. Первое, что попытались сделать в этом направлении, — это „пропустить“ через компьютер известные доказательства. И тут выяснилось любопытное обстоятельство. Часть доказательств легко выдержала испытание, в то время как другая часть „проваливалась“. Когда проанализировали причины, оказалось, что в доказательствах тех теорем, для которых испытания закончились неудачей, используются скрытые допущения, не отражённые в условиях теорем. В точности то же самое имеет место для рассмотренных нами теорем: в их доказательствах используются условия, которые не следуют из посылок.

В начале своей книги [15] её автор S.-C. Chou писал: „Для того, чтобы доказывать геометрические теоремы автоматически, необходимо следовать правилам и аксиомам геометрии строго.“ Предлагаемой статьёй автор хотел показать, что это важно не только для автоматического доказательства теорем, но и для овладения искусством доказательства вообще.

3. Исправление ошибок

Простейший способ получить верные утверждения заключается в том, чтобы честно сформулировать то, чтó доказывается в учебниках, а именно,

если
$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \text{ и } x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2},$$
то $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$

в случае с теоремой Виета, и аналогично — с теоремой о разложении квадратного трёхчлена на линейные множители. Однако такое исправление неудовлетворительно.

Теорему Виета часто используют для нахождения коэффициентов квадратного трёхчлена в обход вычисления его корней. И если понимать теорему Виета в соответствии с предложенным исправлением, то получится, что в процессе её доказательства корни находятся, а в конкретных случаях якобы обходятся без этого! Ясно, что это — обман. Конечно же, желательно и в доказательстве теорем обойтись без вычисления корней. Это требует другого исправления рассматриваемых теорем.

Чтобы найти нужное исправление, обратим внимание на то, чем отличаются случаи б) и в) от случаев а) и г). Во всех четырёх случаях числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2 - 1 = 0$, но в случаях б) и в) перечислены *все* корни, а в случаях а) и г) — не все. Дело именно в этом. Формулировки теорем исправляются следующим образом.

Теорема 1 (Теорема о разложении квадратного трёхчлена на линейные множители). *Пусть*
$$x_1 \text{ и } x_2 - \textbf{ВСЕ} \textit{ корни трёхчлена } x^2 + px + q. \tag{2}$$
Тогда
$$\textbf{для ВСЕХ } x,\ x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть выполняется посылка теоремы, то есть

a) x_1 — корень трёхчлена $x^2 + px + q$, и

b) x_2 его корень, и

c) других корней у него нет.

Тогда, поскольку x_1 является корнем, $x_1^2 + px_1 + q = 0$. Значит, для всех x,
$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= x^2 + px + q - (x_1^2 + px_1 + q) \\ &= x^2 - x_1^2 + px - px_1 \\ &= (x - x_1)(x + x_1) + p(x - x_1) \\ &= (x - x_1)(x + x_1 + p). \end{aligned}$$

Это показывает, что $-(x_1 + p)$ тоже есть корень. Покажем, что он равен x_2. В силу предположения c), $-(x_1 + p) = x_1$ или $-(x_1 + p) = x_2$. Во втором случае доказывать нечего. А в первом случае оказывается, что трёхчлен имеет только один корень. Значит, $x_2 = x_1$ и опять $x_2 = -(x_1 + p)$.

Таким образом, $-(x_1 + p) = x_2$, и мы получаем, что, для всех x, $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$. Это и требовалось доказать. □

Теорема 2 („Теорема Виета“). *Пусть x_1 и x_2 —* **ВСЕ** *корни трёхчлена $x^2 + px + q$. Тогда*

$$\begin{cases} p = -(x_1 + x_2), \\ q = x_1 x_2. \end{cases} \tag{4}$$

Доказательство. В процессе доказательства предыдущей теоремы мы установили, что если выполняется условие (2), то $x_1^2 + px_1 + q = 0$ и $x_2 = -(x_1 + p)$. Отсюда, $p = -(x_1 + x_2)$ и $q = -(x_1^2 + px_1) = x_1(-(x_1 + p)) = x_1 x_2$. □

Утверждение, обратное к теореме Виета, тоже является теоремой.

Теорема 3 („Обратная теорема Виета“). *Пусть x_1 и x_2 — какие угодно числа и*

$$\begin{cases} p = -(x_1 + x_2), \\ q = x_1 x_2. \end{cases} \tag{5}$$

Тогда x_1 и x_2 — **ВСЕ** *корни трёхчлена $x^2 + px + q$.*

Доказательство. Пусть имеет место (5). Тогда, для любого x,

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 \\ &= x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2 \\ &= x(x - x_1) - x_2(x - x_1) \\ &= (x - x_1)(x - x_2). \end{aligned}$$

Значит, для любого x, $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$. Это показывает, что x_1 — корень трёхчлена $x_2 + px + q$, и x_2 его корень, **и других корней у него нет**, то есть выполняется условие (2), как и утверждалось. □

Замечания. 1) Обратим внимание, что традиционная формулировка обратной теоремы Виета — другая:

„Пусть x_1 и x_2 — корни трёхчлена $x^2 + px + q$. Тогда $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$.“

Мы видим, что в ней, по сравнению с нашей формулировкой, отсутствуют два квантора всеобщности, один — в посылке, другой — в заключении. О важности и необходимости первого мы уже сказали. Теперь скажем о втором. Утверждая равенство

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2),$$

имеют в виду тождество, или тождественное равенство, левой и правой частей. Точное выражение этого тождества требует квантора всеобщности.

2) Мы получили важное уточнение обратной теоремы Виета. Благодаря этому уточнению становится очевидной ошибочность рассматриваемых традиционных формулировок. Действительно, предположим, что традиционная формулировка теоремы о разложении верна, то есть верно, что, если x_1 и x_2 — корни трёхчлена x^2+px+q, то имеет место тождество $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$. Замечаем, что из этого тождества следует не только то, что x_1 и x_2 являются корнями, но также и то, что это *все* его корни. По правилу силлогизма получаем из этих двух импликаций следующее „замечательное“ утверждение:

если x_1 и x_2 — корни трёхчлена x^2+px+q, то это — все его корни!

Аналогичное „замечательное“ утверждение следует и из традиционной формулировки теоремы Виета.

Следующий пример убедительнейшим образом указывает на важность присутствия квантора в теоремах Виета.

Пример 1. При каких p и q числа $p+q$ и $p-q$ являются корнями уравнения

$$x^2-(2p+1)x+q=0?$$

Решение (Ошибочное). Пусть числа $p+q$ и $p-q$ являются корнями этого уравнения. Тогда, по теореме Виета (???),

$$2p=(p+q)+(p-q)=2p+1,$$

что неверно.

Ответ (Ошибочный). Нет таких p и q, при которых $p+q$ и $p-q$ являются корнями данного уравнения.

Ответ **неверный**. Такие p и q существуют, например, $p=q=0$. Действительно, для этих p и q уравнение принимает вид $x^2-x=0$, а $p+q=p-q=0$, так что и $p+q$, и $p-q$ являются корнями данного уравнения. Ошибка заключается в том, что **для применения теоремы Виета недостаточно, чтобы числа $p+q$ и $p-q$ были корнями уравнения, нужно ещё, чтобы это были все его корни. Об этом говорит и обратная теорема Виета в уточнённом здесь виде**: если числа $p+q$ и $p-q$ удовлетворяют соотношениям Виета (5), то эти числа не только являются корнями уравнения, но ещё и образуют множество **всех** его корней.

Ещё один подобный пример, основанный на рассмотрении задачи из известного сборника задач под редакцией М. И. Сканави, разобран в нашей статье [17].

4. Двусторонняя теорема Виета

Формализуем (для учителей, не для учеников!) наши рассуждения. Утверждение, что x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$, означает, что всякий раз, когда $x=x_1$ или $x=x_2$, уравнение выполняется, то есть $x^2+px+q=0$ или, короче,

$$(\forall x)(x=x_1 \vee x=x_2 \to x^2+px+q=0).$$

Утверждение, что уравнение не имеет других корней, кроме x_1 и x_2, означает, что верно и обратное этому утверждению, то есть каждый корень уравнения равен либо x_1, либо x_2, короче говоря

$$(\forall x)(x^2 + px + q = 0 \to x = x_1 \vee x = x_2).$$

Утверждение, что x_1 и x_2 являются корнями уравнения и других корней не существует, означает, что выполняется конъюнкция этих двух утверждений,

$$(\forall x)(x = x_1 \vee x = x_2 \to x^2 + px + q = 0) \wedge (\forall x)(x^2 + px + q = 0 \to x = x_1 \vee \ = {}_2).$$

Применяя к этой конъюнкции закон дистрибутивности квантора всеобщности и конъюнкции, получаем

$$(\forall x)(x^2 + px + q = 0 \leftrightarrow x = x_1 \vee x = x_2).$$

Итак, теорема Виета состоит в том, что при выполнении этого условия $x_1 + x_2 = -p$ и $q = x_1 x_2$, т.е.

$$(\forall x)(x^2 + px + q = 0 \leftrightarrow x = x_1 \vee x = x_2) \to x_1 + x_2 = -p \wedge x_1 \cdot x_2 = q.$$

Обращение теоремы Виета означает, что имеет место обратная к этой импликации, что в сочетании с этой импликацией даёт эквиваленцию

$$(\forall x)(x^2 + px + q = 0 \leftrightarrow x = x_1 \vee x = x_2) \leftrightarrow x_1 + x_2 = -p \wedge x_1 \cdot x_2 = q.$$

Учитывая, что это верно для всех x_1 и x_2, а также для всех p и q, получаем

Теорема 4 („Двусторонняя теорема Виета“). *Для всех p, q, x_1 и x_2*

$$(\forall x)(x^2 + px + q = 0 \leftrightarrow x = x_1 \vee x = x_2). \leftrightarrow .\ x_1 + x_2 = -p \wedge x_1 \cdot x_2 = q.$$

Замечания, ведущие к этой формулировке, показывают, что она охватывает все содержание этой и предыдущей статьи. Вот что такое настоящая формализация!

Конечно, не может быть и речи о рассмотрении этих соображений с учениками. Но учитель должен хотя бы раз увидеть полную формулировку, чтобы понять, что не всё так просто с теоремой Виета и родственными ей теоремами. Простые формулировки и лёгкие доказательства имеют место только потому, что к ним незаметно добавляются дополнительные, трудно учитываемые соображения.

Список литературы

[1] Алимов Ш. А. *Алгебра. 8 класс.*: 17-е изд. — М.: Просвещение, 2010. (На учебник получены положительные заключения РАН и РАО.)

[2] Ашкинузе В. Г., Шоластер Н. Н. *Алгебра и элементарные функции.* — М.: Просвещение, 1964.

[3] Дорофеев Г.В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А. и др. *Алгебра. 8 класс. Учебник.* —М.: Просвещение, 2010.

[4] Завало С.Т. *Элементарная алгебра.* — М.: Просвещение, 1964.

[5] Киселёв А. П. *Элементарная алгебра.*: Издание 29-е. — Москва–Петроград: Изд. Т-ва „В. В. Думнов насл., бр. Салаевых", 1917.

[6] Кузнецова Е.П., Муравьева Г.Л. и др. *Алгебра. 8 класс.* — Минск: Народная асвета, 2015.

[7] Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. *Алгебра. 8 класс.* — М.: Вентана-Граф, 2013.

[8] Макарычев Ю.Н. и др. *Алгебра. 8 класс. Учебник.* — М.: Просвещение, 2013.

[9] Мордкович А. Г. *Алгебра и начала анализа.* — М.: Высш. шк., 1987.

[10] Никольский С. М., Потапов М. К. *Алгебра: Пособие для самообразования.* — М.: Наука, 1984.

[11] Петерсон Л. Г., Агаханов Н. Х., Петрович А. Ю. [и др.] *Алгебра. 8 класс. В 3 ч. Ч. 2.* — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2017.

[12] Потапов М. К., Александров В. В., Пасиченко П. И. *Алгебра, тригонометрия и элементарные функции*: Учеб. пособие для студентов ун-тов и пед. вузов. — М.: Высш. шк., 2001.

[13] Рубин А. Г., Чулков П. В. *Алгебра. 8 класс.* — М.: Баллас, 2015.

[14] Шабунин М. И. *Математика: Пособие для поступающих в вузы.* — М.: Лаборатория Базовых Знаний, 1999.

[15] Chou, S.-C. *Mechanical geometry theorem proving.* — Dordrecht [e. a.]: D. Reidel Publishing Company, 1987.

[16] Viete, F. *The Analytic Art.* — New York: Dover Pub. Inc, 1983.

[17] Назиев А. Х. *Что такое корНИ квадратного трёхчлена?* // SIXTEENTH INTERNATIONAL SCIENTIFIC MYKHAILO KRAVCHUK CONFERENCE 14–15 May, 2015, Kyiv: CONFERENCE MATERIALS: III Probability theory and mathematical statistics. History and methods of teaching mathematics, Kyiv, 2015, С. 205–209. DOI: 10.13140/RG.2.1.4940.3926. (Первоначальный вариант статьи.)