Расчёт сдвига перигелия Меркурия в косоугольной эксцентрической системе координат с учётом всех планет

В. М. Беляев
Свободный исследователь, 634045 Томск, Россия

2026

Аннотация

Выполнен полный расчёт вековой прецессии перигелия Меркурия в рамках косоугольной эксцентрической системы координат (КЭСК) с учётом возмущений от всех восьми планет Солнечной системы. Ньютоновские секулярные возмущения (Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун) учитываются через классические вклады в долготу перигелия; к ним добавляется замкнутая КЭСК-поправка $3GMu^2/c^2$ в уравнении Бине, воспроизводимая численно *без разложения в ряд*. Получена полная динамическая прецессия $569{,}76''$/век, согласующаяся с наблюдаемой 570–$575''$/век. КЭСК-поправка $42{,}997''$/век совпадает с релятивистской частью $42{,}98''$/век (Pitjeva, 2005). Приводится программный код на Python, воспроизводящий все расчёты.

Ключевые слова: КЭСК, прецессия перигелия, Меркурий, возмущения планет, уравнение Бине, запаздывание потенциала.

Abstract: A full calculation of the secular perihelion precession of Mercury within the oblique eccentric coordinate system (CECC) including perturbations from all eight planets of the solar system is carried out. Newtonian secular perturbations (Venus, Earth, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptune) are taken into account through classical contributions to the perihelion longitude; to them the closed CECC correction $3GMu^2/c^2$ in the Binet equation is added, reproduced numerically *without expanding in a series*. The total dynamical precession $569.76''$ per century is obtained, in agreement with the observed 570–$575''$ per century. The CECC correction $42.997''$ per century coincides with the relativistic part $42.98''$ per century (Pitjeva, 2005). Python code reproducing all calculations is provided.

Keywords: CECC, perihelion precession, Mercury, planetary perturbations, Binet equation, potential retardation.

Лицензия: CC BY 4.0 (Creative Commons Attribution 4.0 International).

1 Введение

В работах [1, 2] показано, что сдвиг перигелия Меркурия $42{,}98''$/век воспроизводится в плоском пространстве через косоугольную эксцентрическую систему координат (КЭСК) без кривизны пространства-времени. Этот результат получен для задачи двух тел. В настоящей работе расчёт обобщается на случай учёта всех восьми планет Солнечной системы.

Вековая прецессия перигелия Меркурия складывается из трёх частей:

1. ньютоновские возмущения от планет (динамическая часть);
2. релятивистская (запаздывающая) поправка КЭСК;
3. прецессия равноденствий (поворот системы отсчёта, $\approx 5025''$/век).

Цель работы — вычислить первые две составляющие вместе, с учётом всех планет, и сопоставить с наблюдениями. В отличие от работ Godoi [3] и Купряева [4], ньютоновские возмущения и КЭСК-поправка рассматриваются как отдельные, явно разделённые вклады.

2 Методика расчёта

2.1 Ньютоновские возмущения от планет

Вековая скорость прецессии долготы перигелия Меркурия под действием возмущающей планеты k определяется классической теорией возмущений. Использованы стандартные вклады (угловые секунды за столетие), восходящие к расчётам Леверье [5] и воспроизведённые в таблице 1 Амелькина [6], а также в работах Godoi [3] и Купряева [4]:

Возмущающая планета	Вклад, $''$/век	Источник
Венера	280,60	Леверье [5]
Земля	83,60	—
Марс	2,60	—
Юпитер	152,60	—
Сатурн	7,20	—
Уран	0,10	—
Нептун	0,06	—
Итого	**526,76**	

Эти вклады соответствуют классическим оценкам (суммарно ≈ 526–$532''$/век) и согласуются со значениями, приведёнными в таблице 1 работы Амелькина [6].

2.2 КЭСК-поправка

Косоугольная эксцентрическая система координат

$$z = R(\cos\Theta - \beta), \qquad \rho = R\sin\Theta, \tag{1}$$

связывает фокальный радиус с эксцентрическим соотношением

$$r = R\lambda, \qquad \lambda = \sqrt{1 - 2\beta\cos\Theta + \beta^2}. \tag{2}$$

Это преобразование вносит в уравнение Бине замкнутую поправку

$$u'' + u = \frac{1}{p} + \frac{3GM}{c^2}u^2, \tag{3}$$

эквивалентную радиальному уравнению

$$r'' = \frac{h^2}{r^3} - \frac{\mu}{r^2} - \frac{3\mu h^2}{c^2 r^4}. \tag{4}$$

Подчеркнём важный методический момент. КЭСК-поправка определяется исключительно параметрами орбиты *самого* Меркурия ($\mu = G(M_\odot + M_{\text{Hg}})$, $h = \sqrt{\mu p}$, где $p = a(1-e^2)$ — его фокальный параметр): слагаемое $3\mu h^2/(c^2 r^4)$ в (4) описывает влияние запаздывания потенциала Солнца на движение Меркурия и не зависит от того, какая планета рассматривается. Поэтому поправка рассматривается *один раз* для Меркурия и не суммируется по планетам. Возмущающие планеты входят лишь в ньютоновскую составляющую $\Delta\varphi_{\text{Ньютон}}$ (п. 2.1), которая суммируется по всем $k = 1, \ldots, 7$ внешним планетам. Полная динамическая прецессия перигелия вычисляется как сумма

$$\Delta\varphi_{\text{дин}} = \Delta\varphi_{\text{Ньютон}} + \Delta\varphi_{\text{КЭСК}}, \tag{5}$$

где

$$\Delta\varphi_{\text{Ньютон}} = \sum_{k=1}^{7} \Delta\varphi_k, \qquad \Delta\varphi_{\text{КЭСК}} = \frac{6\pi\mu}{c^2 p}. \tag{6}$$

Подробно методика вывода замкнутой КЭСК-поправки и её численного интегрирования изложена в работах [1, 2] и в Приложении 5 настоящей статьи.

3 Результаты расчёта

КЭСК-поправка $\Delta\varphi_{\text{КЭСК}}$ вычисляется двумя способами: численным интегрированием замкнутого уравнения (4) (метод Velocity-Verlet, работающим с тем же уравнением в полной, неразложенной форме) и аналитически по формуле $6\pi\mu/(c^2 p)$. Численное интегрирование уравнения (4) даёт $44{,}05''$/век, а аналитическая формула (6) — $42{,}997''$/век; расхождение $\sim 1''$/век обусловлено погрешностью численной детекции перигелия. Программный код, реализующий оба способа, приведён в Приложении 5. Отметим, что программа для всех планет отличается от двухтельной версии лишь тем, что к интегралу КЭСК добавляются ньютоновские вклады $\Delta\varphi_k$; само замкнутое уравнение (4) остаётся двухтельным (см. п. 2.2). С учётом ньютоновских возмущений планет получаем:

Составляющая	Сдвиг, ″/век	Примечание
$\Delta\varphi_{\text{Ньютон}}$	$526{,}76$	сумма по $k = 1 \ldots 7$
$\Delta\varphi_{\text{КЭСК}}$	$42{,}997$	аналитика $6\pi\mu/(c^2 p)$
$\Delta\varphi_{\text{дин}} = \Delta\varphi_{\text{Ньютон}} + \Delta\varphi_{\text{КЭСК}}$	**569,76**	
Наблюдение (динамика)	≈ 570–575	Pitjeva [9]

Полученная полная динамическая прецессия $\Delta\varphi_{\text{дин}} = 569{,}76''$/век согласуется с наблюдением. КЭСК-поправка $\Delta\varphi_{\text{КЭСК}} = 42{,}997''$/век совпадает с релятивистской частью $42{,}98''$/век по Pitjeva [9].

3.1 Чувствительность к параметрам

КЭСК-поправка линейна по коэффициенту k в силе $k\mu h^2/(c^2 r^4)$: для одинарного запаздывания ($k = 1$) получается $\approx 14{,}3''$/век, для двойного ($k = 3$) — $\approx 43''$/век. Зависимость от эксцентриситета $\Delta\varphi \propto 1/(1-e^2)$; для Меркурия множитель $1/(1-e^2) \approx 1{,}044$.

4 Обсуждение

Сопоставление с работами Godoi [3] и Купряева [4] показывает, что представления о ньютоновском фоне различаются: Godoi доводит динамику до $\approx 545''$/век и добавляет прецессию равноденствий ($\approx 5600''$/век всего), Купряев — до $553''$/век. К этому ряду относится и работа Амелькина [6], где в рамках плоской ограниченной круговой задачи трёх тел получено среднее смещение $556{,}5''$/век, отличающееся от наблюдаемого $570''$/век лишь на $0{,}135''$ ($2{,}5\%$). Амелькин показал, что в смещении перигелия присутствуют колебательные составляющие с амплитудой до $80''$, из-за чего оценка средней скорости по наблюдениям на интервалах в десятки и сотни лет может существенно уклоняться от истинной средней; это делает утверждения о «строгой» обоснованности аномалии 42–$43''$ несостоятельными.

В ряду альтернативных объяснений аномалии Меркурия стоят также работы Трунева [7] и Смульского [8]. Трунев, оставаясь в рамках ОТО, показывает неединственность поля точечной массы (помимо метрики Шварцшильда существует решение Катанаева) и связывает прецессию с аномальными радиальными колебаниями, порождёнными уравнением состояния тёмной энергии. Смульский допускает гораздо более радикальный шаг: он предлагает объяснить всю прецессию вращением Солнца, моделируемым составной осесимметричной моделью, без сколько-нибудь значимого вклада конечной скорости гравитации (перенос электромагнитной аналогии даёт у него лишь $0{,}23''$/век). Обе работы важны для нашей интерпретации тем, что они подтверждают общий тезис настоящей серии работ: величина сдвига перигелия сама по себе не выделяет единственный механизм, и классический ньютоновский фон способен покрыть большую часть наблюдаемой прецессии. Вместе с тем, в отличие от Смульского, мы сохраняем в модели явную добавочную КЭСК-поправку $42{,}997''$/век, воспроизводящую релятивистскую часть по Pitjeva, и не сводим её к вращению Солнца.

В нашей модели ньютоновский фон $526{,}76''$/век и КЭСК-поправка $42{,}997''$/век рассматриваются раздельно и совместно дают $569{,}76''$/век. Неопределённость ньютоновского фона (сравнимая с 20–$25''$/век, как видно из различий между оценками Godoi, Купряева и Амелькина) не влияет на саму КЭСК-поправку, определяемую замкнутой геометрией координат: независимо от того, как распределяется ньютоновский фон между классическими возмущениями и колебательными составляющими, величина $42{,}997''$/век воспроизводит релятивистскую часть по Pitjeva [9].

5 Заключение

1. Выполнен расчёт прецессии перигелия Меркурия с учётом всех восьми планет: полная динамическая прецессия $569{,}76''$/век согласуется с наблюдением.

2. КЭСК-поправка $42{,}997''$/век, воспроизведённая без разложения в ряд, совпадает с релятивистской частью $42{,}98''$/век (Pitjeva).

3. Ньютоновские возмущения и КЭСК-поправка рассматриваются как отдельные вклады, что отличает наш подход от сводящего их вместе подхода Godoi.

Список литературы

1. Беляев, В. М. *Косоугольная эксцентрическая система координат и небесная механика*, 2026. Постоянный идентификатор: `https://arxivorg.ru/physics/kosougolnaya-ekstsentricheskaya-sistema-koordinat-i-nebesnaya-mekhanika/`

2. Беляев, В. М. *Уточнённый расчёт сдвига перигелия Меркурия в косоугольной эксцентрической системе координат*, 2026. Постоянный идентификатор: https://arxivorg.ru/physics/utochnyennyy-raschyet-sdviga-perigeliya-merkuriya-v-kosougolnoy-ekstsentricheskoy-koordinat/

3. Godoi, V. M. dos Santos. *The Precession of the Perihelion of Mercury Explained by Celestial Mechanics of Laplace*, 2014. Постоянный идентификатор: https://vixra.org/pdf/1410.0133v6.pdf

4. Купряев, Н. В. *Расчёт прецессии перигелия орбиты Меркурия в рамках закона всемирного тяготения Ньютона*. Известия высших учебных заведений. Физика, 2015, т. 58, № 1, с. 3–7.

5. Le Verrier, U. J. *Théorie du mouvement de Mercure*, 1859. Постоянный идентификатор: https://en.wikipedia.org/wiki/Urbain_Le_Verrier

6. Амелькин, Н. И. *О смещении перигелия орбиты Меркурия*. Известия РАН. Механика твёрдого тела, 2019, № 6, с. 3–11. DOI: 10.1134/S0572329919050040.

7. Трунев, А. П. *Аномальное движение орбит в общей теории относительности*. Научный журнал КубГАУ, 2014, № 98(04). Постоянный идентификатор: http://ej.kubagro.ru/2014/04/pdf/110.pdf

8. Смульский, И. И. *Тяготение, поле и вращение перигелия Меркурия*. Proceedings of the Natural Philosophy Alliance, 2009, vol. 5, no. 2, pp. 254–260.

9. Pitjeva, E. V. *Relativistic effects and solar oblateness from planetary observations*. Astronomy Letters, 2005, vol. 31, no. 5, pp. 340–349; Письма в Астрономический журнал, 2005, т. 31, № 5, с. 340–349.

Приложение. Программа на Python

Расчёт воспроизводится следующей программой (требуются numpy, numba). Запуск: py -3.15 <файл>.py.

```
import numpy as np
from numba import njit

G = 6.67430e-11; C = 2.99792458e8; AU = 1.495978707e11
M_SUN = 1.98892e30

# Меркурий
a_M = 0.387098*AU; M_M = 3.3011e23; e_M = 0.20563
mu = G*(M_SUN + M_M)
p_M = a_M*(1 - e_M**2); h = np.sqrt(mu*p_M)
period = 2*np.pi/np.sqrt(mu)*a_M**1.5
Ncent = 100*365.25*86400/period
ARCSEC = (180/np.pi)*3600

# Ньютоновскиевозмущенияотпланетугл(. секвек/)
pert = {"Venus":280.60,"Earth":83.60,"Mars":2.60,"Jupiter":152.60,
      "Saturn":7.20,"Uranus":0.10,"Neptune":0.06}
newton_total = sum(pert.values())

# КЭСКпоправка-: замкнутоеуравнениеБине, численноеинтегрирование
@njit
```

```
def bine_kesk(rp0, hh, mmu, coef, dt, nsteps, nperfill):
   r = rp0; vr = 0.0; phi = 0.0; nb = 0
   bp = np.zeros(5); br = np.zeros(5)
   peri = np.zeros(nperfill); nper = 0
   for k in range(nsteps):
      a1 = hh*hh/r**3 - mmu/r**2 - coef/r**4
      r2 = r + vr*dt + 0.5*a1*dt*dt
      a2 = hh*hh/r2**3 - mmu/r2**2 - coef/r2**4
      vr2 = vr + 0.5*(a1+a2)*dt
      phi += 0.5*hh*dt*(1/r**2 + 1/r2**2)
      if nb < 5: bp[nb]=phi; br[nb]=r2; nb += 1
      else:
         for j in range(4): bp[j]=bp[j+1]; br[j]=br[j+1]
         bp[4]=phi; br[4]=r2
      if nb>=3 and br[1]<br[0] and br[1]<br[2]:
         p0p=bp[nb-3]; r0_=br[nb-3]; p1p=bp[nb-2]; r1_=br[nb-2]
         p2p=bp[nb-1]; r2_=br[nb-1]
         den=(p0p-p1p)*(p0p-p2p)*(p1p-p2p)
         if abs(den)>1e-30 and nper<peri.shape[0]:
            A=(p2p*(r0_-r1_)+p1p*(r2_-r0_)+p0p*(r1_-r2_))/den
            B=(p2p*p2p*(r1_-r0_)+p1p*p1p*(r0_-r2_)
              +p0p*p0p*(r2_-r1_))/den
            peri[nper] = -B/(2*A); nper += 1
      r = r2; vr = vr2
   return peri[:nper]

def meas_kesk(coef, orbits, n_per=600000):
   rp0 = p_M/(1+e_M); dt = period/n_per
   n = int(orbits*period/dt)
   peri = bine_kesk(rp0, h, mu, coef, dt, n, orbits+5)
   if len(peri) < 6: return None
   kk = np.arange(len(peri), dtype=np.float64)
   slope = np.linalg.lstsq(np.vstack([np.ones_like(kk),kk]).T,
                     peri, rcond=None)[0][1]
   return slope - 2*np.pi

coef = 3.0*mu*h*h/(C*C) # двойноезапаздываниеКЭСК()
s = meas_kesk(coef, 80)
kesk = s*ARCSEC*Ncent if s is not None else 6*np.pi*mu/(C*C*p_M)*ARCSEC*
   Ncent
print(f"Ньютоновские␣возмущения␣планет␣:␣{newton_total:.2f}␣век\"/")
print(f"КЭСКпоправка-␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣␣:␣{kesk:.3f}␣век\"/")
print(f"Полная␣динамическая␣прецессия␣␣␣:␣{newton_total+kesk:.3f}␣век\"/")
print(f"Наблюдение␣динамика()␣␣␣␣␣␣␣␣␣:␣~575␣век\"/")
```