

# Сфенические числа-такси и целочисленные ломанные вписанные в полуокружность

Георгий Гуляев

23 августа 2026 г.

## 1. Введение

В моей работе о целочисленных циклических многоугольниках ([1], страницы 19-21) был обнаружен пример окружности с радиусом  $r = 1729$ , в половину которой можно вписать 33 ломаных, состоящих из семи целочисленных звеньев.

Ближайшие к этому  $r$  радиусы окружностей, для которых можно вписать в половину окружности ломаные из семи звеньев с целыми длинами:  $r = 1292$  (одна ломаная) и  $r = 2024$  (четыре ломаных). То есть, такие случаи достаточно редки.

Число 1729 известно как число-такси или число Рамануджана. Это наименьшее натуральное число, которое можно представить двумя способами в виде суммы двух кубов натуральных чисел.

Возник вопрос случайно ли число 1729 появилось в задаче о целочисленных циклических многоугольниках или же здесь существуют какие-то глубинные математические закономерности пока неизвестные нам?

В данной работе мы попытаемся дать ответ на этот вопрос. В работе исследуются новые свойства сфенических чисел-такси, на основе которых формулируется и используется алгоритм их вычисления.

А также эмпирически подтверждается связь между сфеническими числами-такси и натуральными радиусами окружностей, в половину которых можно вписывать целочисленные семизвездные ломаные.

## 2. Сфенические числа-такси

Сфенические числа - это числа вида  $n = p \cdot q \cdot r$ ,  $p < q < r$ , где  $p, q, r$  - простые числа ([2]). Если же говорить о сфенических числах-такси, то первые известные такие числа приведены в следующей таблице ([3]):

| Число такси ( $n$ ) | Разложение ( $p \cdot q \cdot r$ ) | Суммы кубов ( $a^3 + b^3 = c^3 + d^3$ ) |
|---------------------|------------------------------------|-----------------------------------------|
| 1729                | $7 \cdot 13 \cdot 19$              | $1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$               |
| 20683               | $13 \cdot 37 \cdot 43$             | $10^3 + 27^3 = 19^3 + 24^3$             |
| 149389              | $31 \cdot 61 \cdot 79$             | $8^3 + 53^3 = 29^3 + 50^3$              |
| 195841              | $37 \cdot 67 \cdot 79$             | $9^3 + 58^3 = 22^3 + 57^3$              |
| 327763              | $31 \cdot 97 \cdot 109$            | $30^3 + 67^3 = 51^3 + 58^3$             |

Я заметил одну интересную и легко проверяемую для всех этих чисел закономерность: суммы оснований  $a + b$  и  $c + d$  равны второму ( $q$ ) и третьему ( $r$ ) простому числу в разложении числа  $n$  на простые множители. И это оказалось не случайно.

**Теорема 1.** Пусть  $n = pqr$  ( $p < q < r$ ),  $p, q, r$  - простые и

$$n = a^3 + b^3 = c^3 + d^3, \text{ где } a, b, c, d - \text{натуральные.}$$

Если, при этом,  $a + b < c + d$ , то  $q = a + b$  и  $r = c + d$ .

**Доказательство.** Используем разложения для суммы кубов:

$$\begin{cases} (a + b)(a^2 - ab + b^2) = pqr \\ (c + d)(c^2 - cd + d^2) = pqr \end{cases} \quad (1)$$

Обозначим, для краткости записи:

$$a + b = x, c + d = y, a^2 - ab + b^2 = A, c^2 - cd + d^2 = B.$$

Исходя из легко проверяемого неравенства  $4 \cdot (a^2 - ab + b^2) \geq (a + b)^2$  и аналогичного для  $c$  и  $d$ , находим соотношения между делителями  $x, A, y, B$  числа  $n$ :

$$\begin{cases} A = a^2 - ab + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{x^2}{4} \\ B = c^2 - cd + d^2 \geq \frac{(c+d)^2}{4} = \frac{y^2}{4} \end{cases} \quad (2)$$

Кроме этого,  $A = a^2 - ab + b^2 = ((a+b)^2 - 3ab) = x^2 - 3ab$  и, аналогично,  $B = y^2 - 3ab$ , поэтому,

$$\begin{cases} 3ab = x^2 - A \geq 3 \\ 3ab = y^2 - B \geq 3 \end{cases} \quad (3)$$

Используя (2) и (3), получаем общие ограничения на  $x$  и  $y$  ( $x < y$ ):

$$\begin{cases} 3 + A \leq x^2 \leq 4A \\ 3 + B \leq y^2 \leq 4B \end{cases} \quad (4)$$

Число  $n$  имеет только 8 делителей:  $1, p, q, r, pq, pr, qr, pqr$ .

Перебирая все эти варианты для делителей  $x$  и  $y$ , убеждаемся, что единственный непротиворечивый с условиями (4) вариант:  $x = q, y = r$ .

Рассмотрим возможные случаи для  $x = a + b > 1$ :

1. Пусть  $x = p$ , тогда  $A = qr$  и, согласно (4),  $3 + qr \leq p^2 \leq 4qr$ . Из неравенства  $p < q < r$  следует, что  $qr > p^2$ . Противоречие.

2. Пусть  $x = q$ , тогда  $A = pr$  и из (4):

$$3 + pr \leq q^2 \leq 4pr. \quad (5)$$

Рассмотрим возможные варианты  $y > q : r, pq, pr, qr$ .

- Если  $y = pq$ , то  $B = r$ . Из (4):  $3 + r \leq (pq)^2 \leq 4r$ . Согласно (5):  $(pq)^2 = p^2q^2 \geq p^2(3 + pr) = 3p^2 + p^3r > 4r$ . Противоречие.
- Если  $y = pr$ , то  $B = q$ . Из (4):  $3 + q \leq (pr)^2 \leq 4q$ , что невозможно, поскольку  $p \geq 2$ , то есть  $(pr)^2 \geq 4r^2 > 4q$ .
- Если  $y = qr$ , то  $B = p$ . Из (4):  $3 + p \leq (qr)^2 \leq 4p$ , невозможно, поскольку  $q > 2$ .
- Если  $y = r$ , то  $B = pq$ . Из (4):  $3 + pq \leq r^2 \leq 4pq$ . Этот случай возможен.

3. Пусть  $x = r$ , тогда  $A = pq$  и из (4):

$$3 + pq \leq r^2 \leq 4pq. \quad (6)$$

Так как теперь  $y > r$ , то для него возможные варианты:  $pq, pr, qr$ .

- Если  $y = pq$ , то  $B = r$ . Из (4):  $3 + r \leq (pq)^2 \leq 4r$ . Согласно (6):  $16r^2 \leq 64pq$ . С другой стороны,  $16r^2 \geq (pq)^4$ . Так как  $pq \geq 6$ , то  $(pq)^4 > 64pq$ . Противоречие.
- Если  $y = pr$ , то  $B = q$ . Из (4):  $3 + q \leq (pr)^2 \leq 4q$ . Сразу противоречие, ибо  $p \geq 2$ , следовательно  $(pr)^2 \geq 4r > 4q$ .
- Если  $y = qr$ , то  $B = p$ . Из (4):  $3 + p \leq (qr)^2 \leq 4p$ , невозможно, поскольку  $q > 2$ .

4. Пусть  $x = pq$ , тогда  $A = r$  и из (4):  $3 + r \leq (pq)^2 \leq 4r$ . Учитывая, что  $y > x = pq$ , получаем для  $y$  только два варианта:  $pr$  или  $qr$ .

Для  $y = pr$ ,  $B = q$ , имеем:  $3 + q \leq (pr)^2 \leq 4q$ . Это неравенство невозможно, оно уже рассматривалось ранее. И то же самое для  $y = qr$ .

5. Пусть  $x = pr$ , тогда  $A = q$ ,  $y = qr$ ,  $B = p$ . Невозможно.

Итак, единственный возможный случай это  $x = a + b = q$  и  $y = c + d = r$ . Что и требовалось доказать.

Теорема 1 дает возможность получить новый эффективный алгоритм, для получения сфенических чисел-такси:

1. Рассматриваем все комбинации из 3 простых чисел  $(p, q, r)$  до некоторого натурального числа.
2. Для каждой комбинации вычисляем пару  $(\frac{q^2-pr}{3}, \frac{r^2-pq}{3})$ , при этом выбираем только случаи, когда  $q^2 - pr$  и  $r^2 - pq$  делятся на 3 нацело.
3. Теперь, поскольку  $a + b = q$  и  $ab = \frac{q^2-pr}{3} = m_1$ , то натуральные числа  $a$  и  $b$  являются корнями квадратного уравнения:  $x^2 - qx + m_1 = 0$ . Решаем его в натуральных числах. Проверяем, что  $D = q^2 - 4m_1$  является точным квадратом и так далее.
4. Аналогично, для чисел  $c$  и  $d$  решаем квадратное уравнение  $x^2 - rx + m_2 = 0$ ,  $m_2 = \frac{r^2-pq}{3}$  в натуральных числах.

Приведу программную реализацию этого алгоритма на языке Julia.

```

using Primes, Combinatorics

function find(max_p)
    res = Vector{Vector{Int64}}{0}
    for c in combinations(primes(max_p), 3)
        (p, q, r) = c
        # Проверка на делимость на 3
        if (q^2 - p*r) % 3 != 0 || (r^2 - p*q) % 3 != 0
            continue
        end
        m1 = div(q^2 - p*r, 3); m2 = div(r^2 - p*q, 3)
        # Проверка положительности
        if m1 <= 0 || m2 <= 0 continue end
        # Проверка дискриминантов
        d1 = q^2 - 4*m1; d2 = r^2 - 4*m2
        if d1 < 0 || d2 < 0 continue end
        sd1 = isqrt(d1); sd2 = isqrt(d2)
        if sd1^2 != d1 || sd2^2 != d2 continue end
        if (q+sd1)%2 > 0 || q-sd1 <= 0 || (q-sd1)%2 > 0
            continue
        end
        if (r+sd2)%2 > 0 || r-sd2 <= 0 || (r-sd2)%2 > 0
            continue
        end
        # Решение уравнений
        a = div(q-sd1,2); b = div(q+sd1,2)
        c = div(r-sd2,2); d = div(r+sd2,2)
        # Проверка равенства сумм кубов
        n = p * q * r
        ab = a^3 + b^3; cd = c^3 + d^3
        if ab == cd && ab == n
            push!(res, [n, p, q, r, a, b, c, d])
        end
    end
    sort!(res)
end

```

Результаты работы программы для простых до 10000.

Сфенические числа-такси. Найдено 98 для  $p < q < r < 10000$

-----  
[ p q r a b c d ]  
-----

[1729, 7, 13, 19, 1, 12, 9, 10]  
[20683, 13, 37, 43, 10, 27, 19, 24]  
[149389, 31, 61, 79, 8, 53, 29, 50]  
[195841, 37, 67, 79, 9, 58, 22, 57]  
[327763, 31, 97, 109, 30, 67, 51, 58]  
[2418271, 73, 157, 211, 23, 134, 95, 116]  
[6058747, 79, 271, 283, 99, 172, 120, 163]  
[7620661, 103, 241, 307, 45, 196, 133, 174]  
[9443761, 103, 277, 331, 68, 209, 146, 185]  
[10765603, 109, 283, 349, 64, 219, 163, 186]  
[13623913, 103, 349, 379, 121, 228, 186, 193]  
[18406603, 193, 283, 337, 19, 264, 75, 262]  
[32114143, 139, 463, 499, 159, 304, 223, 276]  
[68007673, 181, 607, 619, 222, 385, 241, 378]  
[105997327, 211, 691, 727, 239, 452, 296, 431]  
[106243219, 193, 733, 751, 307, 426, 363, 388]  
[166560193, 331, 607, 829, 57, 550, 316, 513]  
[216226981, 373, 661, 877, 61, 600, 304, 573]  
[446686147, 349, 1093, 1171, 355, 738, 472, 699]  
[584504191, 421, 1051, 1321, 220, 831, 615, 706]  
[813357253, 541, 1039, 1447, 106, 933, 610, 837]  
[959281759, 421, 1471, 1549, 543, 928, 694, 855]  
[1098597061, 439, 1567, 1597, 613, 954, 669, 928]  
[1736913439, 601, 1543, 1873, 351, 1192, 807, 1066]  
[2072769211, 883, 1321, 1777, 46, 1275, 534, 1243]  
[2460483307, 613, 1873, 2143, 555, 1318, 1068, 1075]  
[2534342347, 673, 1867, 2017, 531, 1336, 726, 1291]  
[2696122459, 769, 1609, 2179, 219, 1390, 960, 1219]  
[2992523203, 883, 1627, 2083, 187, 1440, 699, 1384]  
[3438513979, 631, 2281, 2389, 878, 1403, 1130, 1259]  
[3738730483, 1153, 1627, 1993, 75, 1552, 454, 1539]  
[5080981393, 787, 2467, 2617, 810, 1657, 1032, 1585]

[5570040313, 739, 2689, 2803, 1048, 1641, 1314, 1489]  
 [5795759899, 733, 2791, 2833, 1188, 1603, 1302, 1531]  
 [7170123151, 1063, 2221, 3037, 295, 1926, 1383, 1654]  
 [7546425517, 1033, 2557, 2857, 616, 1941, 981, 1876]  
 [7821346633, 1291, 1987, 3049, 2, 1985, 1241, 1808]  
 [8602562953, 1279, 2083, 3229, 34, 2049, 1476, 1753]  
 [9242888779, 853, 3253, 3331, 1371, 1882, 1648, 1683]  
 [10843895539, 1009, 3061, 3511, 898, 2163, 1708, 1803]  
 [11280947113, 1801, 2467, 2539, 225, 2242, 298, 2241]  
 [11932918849, 1231, 2683, 3613, 402, 2281, 1692, 1921]  
 [12747309181, 1951, 2341, 2791, 5, 2336, 461, 2330]  
 [13501730311, 1153, 3307, 3541, 983, 2324, 1295, 2246]  
 [14537287459, 1531, 2659, 3571, 219, 2440, 1243, 2328]  
 [14753560033, 1453, 2677, 3793, 225, 2452, 1584, 2209]  
 [15054607279, 997, 3853, 3919, 1671, 2182, 1935, 1984]  
 [18216779887, 1693, 2797, 3847, 166, 2631, 1336, 2511]  
 [18816356071, 1429, 3121, 4219, 466, 2655, 2052, 2167]  
 [23215399633, 1693, 3499, 3919, 658, 2841, 1126, 2793]  
 [24518353609, 1747, 3049, 4603, 144, 2905, 2202, 2401]  
 [29255160331, 1597, 4027, 4549, 979, 3048, 1627, 2922]  
 [31113708481, 1873, 3331, 4987, 186, 3145, 2409, 2578]  
 [33197363533, 1567, 4243, 4993, 1069, 3174, 2124, 2869]  
 [37841443813, 1999, 4003, 4729, 654, 3349, 1468, 3261]  
 [39100327831, 1399, 5227, 5347, 2148, 3079, 2439, 2908]  
 [41225807107, 1669, 4831, 5113, 1467, 3364, 1843, 3270]  
 [43777429999, 1933, 4591, 4933, 1103, 3488, 1502, 3431]  
 [44883220087, 1531, 5197, 5641, 1806, 3391, 2799, 2842]  
 [44974423969, 1627, 4969, 5563, 1505, 3464, 2441, 3122]  
 [47736505249, 1777, 4903, 5479, 1337, 3566, 2105, 3374]  
 [48238207597, 2203, 3853, 5683, 213, 3640, 2470, 3213]  
 [54359792299, 2557, 4153, 5119, 366, 3787, 1395, 3724]  
 [58682954269, 1993, 4801, 6133, 933, 3868, 2832, 3301]  
 [69409329697, 2311, 4831, 6217, 729, 4102, 2401, 3816]  
 [78313460419, 2851, 4783, 5743, 507, 4276, 1531, 4212]  
 [80839650457, 2383, 5323, 6373, 1018, 4305, 2268, 4105]  
 [84729678973, 2311, 5869, 6247, 1541, 4328, 1997, 4250]  
 [92652490621, 3049, 4591, 6619, 66, 4525, 2302, 4317]  
 [97621905673, 1861, 7177, 7309, 3097, 4080, 3636, 3673]

[100359155269, 2137, 6373, 7369, 1821, 4552, 3564, 3805]  
 [101814591187, 2053, 6763, 7333, 2283, 4480, 3283, 4050]  
 [102994980667, 2017, 6907, 7393, 2456, 4451, 3398, 3995]  
 [109176102793, 2731, 5689, 7027, 921, 4768, 2482, 4545]  
 [115787824783, 3109, 4993, 7459, 119, 4874, 2996, 4463]  
 [117761282263, 2083, 7489, 7549, 2991, 4498, 3103, 4446]  
 [127669335499, 2341, 6823, 7993, 1876, 4947, 3982, 4011]  
 [151122317677, 2713, 7027, 7927, 1766, 5261, 2906, 5021]  
 [165812161303, 3001, 6337, 8719, 850, 5487, 4296, 4423]  
 [178660856467, 2917, 6991, 8761, 1387, 5604, 3747, 5014]  
 [201170668987, 3697, 6211, 8761, 352, 5859, 3259, 5502]  
 [203514378013, 3037, 7177, 9337, 1317, 5860, 4645, 4692]  
 [215793111907, 2797, 8263, 9337, 2395, 5868, 4006, 5331]  
 [225744618097, 4297, 6553, 8017, 465, 6088, 2001, 6016]  
 [230114585647, 3079, 7933, 9421, 1863, 6070, 3847, 5574]  
 [237020058973, 3391, 7177, 9739, 997, 6180, 4413, 5326]  
 [238913829163, 3793, 6703, 9397, 499, 6204, 3642, 5755]  
 [251715291319, 2791, 9109, 9901, 3039, 6070, 4398, 5503]  
 [266992291729, 3547, 8269, 9103, 1884, 6385, 2857, 6246]  
 [275331927043, 3697, 8263, 9013, 1804, 6459, 2659, 6354]  
 [278450575201, 3613, 8737, 8821, 2304, 6433, 2401, 6420]  
 [281101735297, 3373, 8863, 9403, 2425, 6438, 3090, 6313]  
 [287541374077, 3967, 7621, 9511, 1029, 6592, 3162, 6349]  
 [328658155009, 3457, 9643, 9859, 2921, 6722, 3194, 6665]  
 [342769769533, 4153, 9043, 9127, 2109, 6934, 2202, 6925]  
 [347519256481, 4357, 8017, 9949, 993, 7024, 3132, 6817]  
 [355826435077, 4519, 8191, 9613, 1114, 7077, 2653, 6960]  
 [571167992761, 6991, 8389, 9739, 92, 8297, 1457, 8282]

Мы видим здесь, что простые числа  $p, q, r$  довольно близки друг к другу. Таким образом, если добавить в программу ограничения, которые следуют из доказательства теоремы 1:

$$\sqrt{pr} < q < 2\sqrt{pr}, \quad \sqrt{pq} < r < 2\sqrt{pq},$$

то программа будет еще более эффективной.

Более того можно доказать, что простые множители  $p, q, r$  сфенического числа-такси обязаны иметь вид  $6k + 1$ , и этот факт еще вдвое уменьшает их перебор.



## Связь с задачей о циклических многоугольниках

Теперь, используя результаты теоремы 1, мы сможем продвинуться в исследовании связи между любым сфеническим числом-такси  $n$  и целочисленными ломаными из семи звеньев, вписанными в полуокружность с радиусом равным этому числу  $n$ .

В работе [1] (формула (3)) для получения циклических целочисленных многоугольников мы рассматривали комплексные числа на единичной окружности (лучевые проекции на нее вершин реального многоугольника или ломаной):

$$z(x) = \frac{\sqrt{4n^2 - x^2}}{2n} + \frac{x}{2n}i.,$$

предполагая, что, если корень в действительной части не извлекается, то для всех вершин он один и тот же. Если, при этом, произведение комплексных чисел

$$\prod_{k=1}^m z(x_k) \quad (m - \text{число сторон или звеньев})$$

сворачивалось к  $-1$  для вписанных многоугольников или к  $i$  для ломаных вписанных в половину окружности, то мы обнаруживали возможное новое решение задачи.

На практике выяснилось, что неизвлекаемая часть в найденных решениях практически всегда равна 3. Если  $\sqrt{4n^2 - x^2} = y\sqrt{3}$ , то комплексные числа принимают вид:

$$z(x) = \frac{y\sqrt{3}}{2n} + \frac{x}{2n}i$$

и мы получаем основное уравнения для решения задачи:

$$x^2 + 3y^2 = 4n^2, \quad 0 < x < 2n, \quad y > 0 \quad (7)$$

**Теорема 2.** Для  $n = p_1 p_2 \dots p_m$ , где все  $p_i \equiv 1 \pmod{3}$ , уравнение (7) имеет ровно

$$R(n) = \frac{6 \cdot 3^m - 2}{4} \quad (8)$$

решений. В частности, для  $m = 3$  (сфенические числа)  $R(n) = 40$ .

**Доказательство.** Согласно классической теории квадратичных форм (Сох [4], Chapter 2, Theorem 2.2), число представлений  $R(N)$  целого числа  $N$  формой  $x^2 + 3y^2$  в целых числах задаётся формулой:

$$r_3(N) = 6 \sum_{d|N, 3 \nmid d} \left( \frac{-3}{d} \right)$$

где  $\left( \frac{-3}{d} \right)$  — символ Кронекера.

Применяя эту формулу к  $N = 4n^2$ , где  $n = pqr$  и  $p, q, r \equiv 1 \pmod{3}$ , вычисляя сумму и учитывая симметрии  $(x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, x \rightarrow 2n - x)$ , получаем (8).

Теорема 2 гарантирует нам, что для любого сфенического числа-такси будет ровно 40 решений уравнения (7) в натуральных числах.

Поиск ломаных для сфенических чисел теперь может быть организован при помощи следующего алгоритма:

1. Для данного сфенического числа-такси  $n$  находим все 40 решений уравнения (7). Получаем список хорд ( $x$  - длина звена ломаной).
2. Перебираем все комбинации по  $k$  ( $k$  - число звеньев ломаной)
3. Для каждой комбинации с большой точностью приближенно вычисляем соответствующее произведение комплексных чисел и проверяем его на равенство числу  $i$  (с точностью до  $10^{-70}$ ).

Вот программа на языке Julia, реализующая этот алгоритм:

```
function chords(n) #40 хорд из уравнения x^2 + 3y^2 = 4n^2
    m = div(2*n, isqrt(3))
    res = Int64[]; sizehint!(res, 40)
    for y in 1:m
        rem2 = 4*n^2 - 3*y^2
        if rem2 > 0
            x = isqrt(rem2)
            if x^2 == rem2 push!(res, x) end
        end
    end
    sort!(res)
end
```

```

function isline(r, l)
    sum(l) < pi*r || return false
    eps = big(10)^(-70)
    # Перевод в комплексные координаты единичной окружности
    z_prod = prod(map(x ->
        begin
            sin_val = big(x)/(2*r)
            cos_val = sqrt(1 - sin_val^2)
            cos_val + sin_val*im
        end, l))
    # Ломаная замыкается в полуокружность, если произведение равно i (0 + 1im)
    abs(real(z_prod)) < eps && abs(imag(z_prod) - 1) < eps
end

function find_all_lines(r, k)
    pool = chords(r)
    # Фильтруем комбинации ленивым итератором
    solutions = [
        comb for comb in combinations(pool, k)
        if isline(r, comb)
    ]
    solutions
end

```

Программа повторила уже известные нам результаты для первых двух сфенических чисел-такси, полученных ранее другим способом.

```

n = 1729, найдено: 33
[133, 299, 386, 494, 649, 1261, 2033]
[133, 299, 386, 494, 658, 1001, 2242]
[133, 299, 386, 494, 658, 1583, 1729]
[133, 299, 386, 494, 917, 1001, 2033]
[133, 299, 386, 494, 917, 1342, 1729]
[133, 299, 386, 494, 1001, 1261, 1729]
[133, 299, 386, 494, 1159, 1261, 1583]
[133, 299, 386, 494, 1261, 1342, 1406]
[133, 299, 386, 658, 917, 1342, 1583]

```

[133, 299, 386, 658, 1001, 1261, 1583]  
 [133, 299, 386, 917, 1001, 1261, 1342]  
 [133, 299, 494, 649, 658, 1001, 2033]  
 [133, 299, 494, 649, 658, 1342, 1729]  
 [133, 299, 494, 649, 1159, 1261, 1342]  
 [133, 299, 494, 658, 1001, 1159, 1583]  
 [133, 299, 494, 658, 1001, 1342, 1406]  
 [133, 299, 494, 917, 1001, 1159, 1342]  
 [133, 299, 649, 658, 1001, 1261, 1342]  
 [133, 386, 494, 649, 658, 917, 2033]  
 [133, 386, 494, 649, 658, 1261, 1729]  
 [133, 386, 494, 658, 917, 1001, 1729]  
 [133, 386, 494, 658, 917, 1159, 1583]  
 [133, 386, 494, 658, 917, 1342, 1406]  
 [133, 386, 494, 658, 1001, 1261, 1406]  
 [133, 386, 494, 917, 1001, 1159, 1261]  
 [133, 386, 649, 658, 917, 1261, 1342]  
 [133, 494, 649, 658, 917, 1159, 1342]  
 [133, 494, 649, 658, 1001, 1159, 1261]  
 [299, 386, 494, 649, 658, 1261, 1583]  
 [299, 386, 494, 649, 917, 1261, 1342]  
 [299, 386, 494, 658, 917, 1001, 1583]  
 [299, 494, 649, 658, 917, 1001, 1342]  
 [386, 494, 649, 658, 917, 1001, 1261]

n = 20683, найдено: 58

[1591, 2557, 3887, 5203, 5723, 8342, 32618]  
 [1591, 2557, 3887, 5203, 5723, 16991, 26273]  
 [1591, 2557, 3887, 5203, 8342, 9287, 30266]  
 [1591, 2557, 3887, 5203, 8342, 10582, 29341]  
 [1591, 2557, 3887, 5203, 8342, 12358, 28009]  
 [1591, 2557, 3887, 5203, 8342, 14534, 26273]  
 [1591, 2557, 3887, 5203, 8342, 15766, 25237]  
 [1591, 2557, 3887, 5203, 8342, 16991, 24167]  
 [1591, 2557, 3887, 5203, 8342, 18659, 22643]  
 [1591, 2557, 3887, 5203, 10582, 12358, 26273]  
 [1591, 2557, 3887, 5203, 10582, 18659, 20683]  
 [1591, 2557, 3887, 5203, 12358, 16991, 20683]

[1591, 2557, 3887, 5203, 14534, 16991, 18659]  
 [1591, 2557, 3887, 8342, 9287, 10582, 26273]  
 [1591, 2557, 3887, 8342, 9287, 16991, 20683]  
 [1591, 2557, 3887, 8342, 10582, 15766, 20683]  
 [1591, 2557, 3887, 8342, 14534, 15766, 16991]  
 [1591, 2557, 3887, 9287, 10582, 16991, 18659]  
 [1591, 2557, 3887, 10582, 12358, 15766, 16991]  
 [1591, 2557, 5203, 5723, 8342, 10582, 28009]  
 [1591, 2557, 5203, 5723, 8342, 16991, 22643]  
 [1591, 2557, 5203, 5723, 10582, 16991, 20683]  
 [1591, 2557, 5203, 8342, 9287, 10582, 25237]  
 [1591, 2557, 5203, 8342, 10582, 12358, 22643]  
 [1591, 2557, 5203, 8342, 10582, 14534, 20683]  
 [1591, 2557, 5203, 10582, 12358, 14534, 16991]  
 [1591, 2557, 8342, 9287, 10582, 14534, 16991]  
 [1591, 3887, 5203, 5723, 8342, 9287, 28009]  
 [1591, 3887, 5203, 5723, 8342, 15766, 22643]  
 [1591, 3887, 5203, 5723, 9287, 10582, 26273]  
 [1591, 3887, 5203, 5723, 9287, 16991, 20683]  
 [1591, 3887, 5203, 5723, 10582, 15766, 20683]  
 [1591, 3887, 5203, 5723, 14534, 15766, 16991]  
 [1591, 3887, 5203, 8342, 9287, 10582, 24167]  
 [1591, 3887, 5203, 8342, 9287, 12358, 22643]  
 [1591, 3887, 5203, 8342, 9287, 14534, 20683]  
 [1591, 3887, 5203, 9287, 10582, 12358, 20683]  
 [1591, 3887, 5203, 9287, 10582, 14534, 18659]  
 [1591, 3887, 5203, 9287, 12358, 14534, 16991]  
 [1591, 3887, 5203, 10582, 12358, 14534, 15766]  
 [1591, 3887, 5723, 9287, 10582, 15766, 16991]  
 [1591, 3887, 8342, 9287, 10582, 14534, 15766]  
 [1591, 5203, 5723, 8342, 9287, 10582, 22643]  
 [1591, 5203, 5723, 9287, 10582, 14534, 16991]  
 [2557, 3887, 5203, 5723, 8342, 10582, 26273]  
 [2557, 3887, 5203, 5723, 8342, 16991, 20683]  
 [2557, 3887, 5203, 5723, 10582, 16991, 18659]  
 [2557, 3887, 5203, 8342, 10582, 12358, 20683]  
 [2557, 3887, 5203, 8342, 10582, 14534, 18659]  
 [2557, 3887, 5203, 8342, 12358, 14534, 16991]

[2557, 3887, 5723, 8342, 10582, 15766, 16991]  
 [2557, 3887, 8342, 9287, 10582, 12358, 16991]  
 [2557, 5203, 5723, 8342, 10582, 14534, 16991]  
 [3887, 5203, 5723, 8342, 9287, 10582, 20683]  
 [3887, 5203, 5723, 8342, 9287, 14534, 16991]  
 [3887, 5203, 5723, 8342, 10582, 14534, 15766]  
 [3887, 5203, 5723, 9287, 10582, 12358, 16991]  
 [3887, 5203, 8342, 9287, 10582, 12358, 14534]

Приведем статистику количества семизвенных и трехзвенных ломаных для первых 25 сфенических чисел-такси.

Число семизвенных ломаных  $m_7$ , трехзвенных  $m_3$  для 25 первых сфенических чисел:

```

-----
([  n   p   q   r   a   b   c   d ],   m7,   m3)
-----
([1729, 7, 13, 19, 1, 12, 9, 10], 33, 64 (реально 82))
([20683, 13, 37, 43, 10, 27, 19, 24], 58, 65)
([149389, 31, 61, 79, 8, 53, 29, 50], 58, 65)
([195841, 37, 67, 79, 9, 58, 22, 57], 33, 64)
([327763, 31, 97, 109, 30, 67, 51, 58], 58, 65)
([2418271, 73, 157, 211, 23, 134, 95, 116], 0, 57)
([6058747, 79, 271, 283, 99, 172, 120, 163], 33, 64)
([7620661, 103, 241, 307, 45, 196, 133, 174], 0, 60)
([9443761, 103, 277, 331, 68, 209, 146, 185], 33, 64)
([10765603, 109, 283, 349, 64, 219, 163, 186], 59, 64)
([13623913, 103, 349, 379, 121, 228, 186, 193], 35, 63)
([18406603, 193, 283, 337, 19, 264, 75, 262], 58, 65)
([32114143, 139, 463, 499, 159, 304, 223, 276], 33, 64)
([68007673, 181, 607, 619, 222, 385, 241, 378], 33, 64)
([105997327, 211, 691, 727, 239, 452, 296, 431], 0, 60)
([106243219, 193, 733, 751, 307, 426, 363, 388], 59, 64)
([166560193, 331, 607, 829, 57, 550, 316, 513], 0, 57)
([216226981, 373, 661, 877, 61, 600, 304, 573], 33, 64)
([446686147, 349, 1093, 1171, 355, 738, 472, 699], 35, 63)
([584504191, 421, 1051, 1321, 220, 831, 615, 706], 33, 64)
([813357253, 541, 1039, 1447, 106, 933, 610, 837], 0, 60)
  
```

([959281759, 421, 1471, 1549, 543, 928, 694, 855], 35, 63)  
 ([1098597061, 439, 1567, 1597, 613, 954, 669, 928], 58, 65)  
 ([1736913439, 601, 1543, 1873, 351, 1192, 807, 1066], 33, 43)  
 ([2072769211, 883, 1321, 1777, 46, 1275, 534, 1243], 35, 19)

Мы видим здесь определенную закономерность, разбавленную комбинаторными флуктуациями. (33, 64) повторяется довольно часто. В принципе, m7 либо 33 или около, либо 58 или около, либо 0, соответственно, m3 почти всегда в районе 60, за исключением последнего наблюдения.

Таким образом, эмпирически подтверждается связь между сфеническими числами такси  $n$  и целочисленными ломаными вписанными в половину окружности радиуса  $n$ .

Справедливости ради должен заявить, что программа приведенная выше находит основную часть существующих ломаных, но не все. Какую-то их часть она может пропускать.

Для доказательства этого факта найдем все трехзвенные ломаные для  $n = 1729$  нашей программой (их будет 64) и выполним ту же операцию при помощи программы, использующей формулу (5) работы [1]:

$$r(a^2 + b^2 + c^2) + abc = 4r^2$$

```
#r - радиус окружности, точные вычисления
function listline3(r) # список всех ломаных из 3 звеньев для радиуса r
  res = Vector{Vector{Int64}}()
  for x in combinations(1:2*r-1, 3)
    a = x[1]; b = x[2]; c = x[3]
    if r*(a^2+b^2+c^2)+a*b*c==4*r^3
      push!(res,x)
    end
  end
  res
end
```

Эта программа находит для  $n = 1729$  все 82 существующие трехзвенные ломаные. Приведем 18 ломаных, которые наша программа find\_all\_lines упустила:

[38, 2338, 2522]  
[130, 2108, 2660]  
[169, 1533, 3021]  
[182, 542, 3382]  
[182, 798, 3318]  
[182, 1482, 3042]  
[182, 2018, 2698]  
[532, 1918, 2548]  
[542, 798, 3198]  
[546, 2086, 2394]  
[623, 1577, 2743]  
[642, 1995, 2405]  
[646, 1534, 2758]  
[754, 1092, 2964]  
[798, 898, 3042]  
[798, 1482, 2698]  
[858, 1190, 2850]  
[1456, 1742, 1976]

Отмечу еще одно интересное наблюдение для окружности с радиусом 1729. Множество хорд используемых в 82-х трехзвенных ломаных, вписанных в половину окружности, содержит все хорды всех известных на данный момент 33-х семизвенных ломаных.

Повторится ли подобное и для других радиусов - вопрос открытый.

На данный момент вопрос о том, для всех ли сфенических чисел-такси  $n$  существуют целочисленные ломаные из 7 звеньев, вписанные в полуокружность радиуса  $n$ , остаётся открытым.

Численные эксперименты показывают, что для некоторых чисел ломаные не найдены, но это может быть связано с несовершенством алгоритма, а не с отсутствием самих ломаных.

Автор надеется, что дальнейшие исследования, возможно, с использованием более точных методов, прольют свет на эту загадку.



## Ссылки

- [1] Гуляев Георгий Михайлович Целочисленные циклические многоугольники, вписанные в окружность с целым радиусом // ArxivOrg.Ru. — 2026. — URL: <https://arxivorg.ru/a/AX-134224>.
- [2] Сфеническое число. Википедия. [https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%84%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5\\_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%84%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE)
- [3] OEIS Foundation Inc. (2026). The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. Sequence A001235. URL: <https://oeis.org/A001235>
- [4] David A. Cox, Primes of the Form  $x^2 + ny^2$ : Fermat, Class Field Theory, and Complex Multiplication, Second edition: AMS, 2013.