

Применение методов теории вероятностей к теореме Ферма

Автор: Челтыгмашев-Мамышев Евгений Гаврилович, г. Абакан.
Email: evgeniy.cheltygmashev@yandex.ru

Ключевые слова: теория вероятностей, теорема Ферма, случайное событие, распределение Пуассона, случайная величина, параметр распределения.

Введение

В этой работе проведена оценка теоремы Ферма с использованием методов теории вероятностей, которая выявила определенную зависимость для различных степеней n . Данная работа не претендует на строгое доказательство теоремы.

В соответствии с теоремой Ферма для любого натурального числа $n > 2$ уравнение $a^n + b^n = c^n$ не имеет решений в целых ненулевых положительных числах. Данная теорема, как известно, уже доказана.

Целью работы является оценка возможности совпадения чисел c^n и чисел, которые можно представить в виде суммы чисел $a^n + b^n$, при различных степенях n . При этом в начале определяется вероятность случайного события их совпадений в зависимости от степени n . Затем находится вероятность случайной величины, которая определяет сколько раз могут появиться данные совпадения на рассматриваемом интервале в зависимости от степени n .

Определение вероятностей случайных событий в зависимости от степени n .

В ходе оценки теоремы с использованием теории вероятностей будем использовать множество натуральных чисел N , так они эквивалентны целым ненулевым положительным числам.

Рассмотрим некоторый достаточно большой ряд натуральных чисел $N_k (1, 2, 3, \dots, a_k)$. Выберем любое число $a_i \in N_k$.

Можно задаться вопросом, какова будет вероятность, что выбранное натуральное число a_i окажется числом n -ой степени (событие A). Или, какая будет вероятность того, что выбранное число a_i окажется числом, которое можно представить в виде суммы двух чисел n -ой степени (событие B).

И наконец, какова будет вероятность, что выбранное число a_i одновременно окажется числом n -ой степени и числом, которое можно представить в виде суммы двух чисел n -ой степени (событие C).

Будем проводить испытания, заключающиеся в поочередном выборе чисел a_i из ряда N_k с целью определить, появится или не появится в каждом испытании событие A либо событие B .

Вероятность события A для каждого испытания определяется как отношение количества чисел n -ой степени к числу a_k . Количество чисел n -ой степени определяется по формуле: $[\sqrt[n]{a_k}]$

Тогда вероятность события A определяется по формуле: $P(A) = [\sqrt[n]{a_k}] / a_k$

В результате проведенных расчетов получилось, что для N_k в каждом испытании вероятность $P(A)$ близка к нулю для всех $n \geq 2$.

Если рассмотреть все множество натуральных чисел N , то при $a_k \rightarrow \infty$ вероятность $P(A) \rightarrow 0$ для всех $n \geq 2$.

Вероятность события B для каждого испытания определяется как отношение количества чисел, которые можно представить в виде суммы двух чисел в степени n , к числу a_k . Формула для вычисления данных чисел более сложная и здесь не приводится.

Расчеты показали, что для $n = 2$ при каждом испытании для N_k вероятность $P(B)$ уже не близка к нулю. При $a_k \rightarrow \infty$ вероятность $P(B)$ лежит между 0,25 и 1 для всего множества N . Уже при $a_k = 10^9$ вероятность $P(B)$ практически остается на одном уровне, примерно равным 0,3927. Если считать, что предел вероятности события B равен этому числу, тогда при $a_k \rightarrow \infty \Rightarrow P(B) \approx 0,3927$. Таким образом количество натуральных чисел, которые можно представить в виде суммы двух квадратов, составляет около 39 % от всего множества натуральных чисел N .

Для $n \geq 3$ вероятность $P(B)$ при каждом испытании для N_k близка к нулю. Для всего множества натуральных чисел N при $a_k \rightarrow \infty$ вероятность $P(B) \rightarrow 0$.

Теперь определим, какие значения принимает вероятность события C . Вероятность события C , исходя из предположения, что события A и B независимы, определяется как произведение вероятностей событий A и B :

$$P(C) = P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\text{Для } n = 2: P(C) = P(A) \cdot P(B) = 0 \cdot 0,3927 = 0$$

$$\text{Для } n \geq 3: P(C) = P(A) \cdot P(B) = 0 \cdot 0 = 0$$

В итоге получается, что для всех $n \geq 2$ для N_k вероятность $P(C)$ в каждом испытании близка к нулю, а для всего множества N при $a_k \rightarrow \infty$ вероятность $P(C) \rightarrow 0$.

Здесь необходимо отметить одну особенность, связанную с тем, что чем больше степень n , тем большими получаются числа n -ой степени, и тем реже они появляются на множестве N . Соответственно при увеличении степени n плотность событий A и B уменьшается, а вероятности $P(A)$ и $P(B)$ быстрее стремятся к нулю.

Определение вероятностей случайной величины в зависимости от степени n .

Далее введем случайную величину X , которая определяет, что на рассматриваем интервале N_k событие C может появиться m раз, при этом $0 \leq m \leq a_k$. Здесь необходимо определиться, какой закон распределения целесообразно использовать для случайной величины X .

Так как при $a_k \rightarrow \infty \Rightarrow P(C) \rightarrow 0$ для всех $n \geq 2$, то для оценки теоремы подходит распределение Пуассона, которое показало интересные результаты.

Как известно, вероятность распределения случайной величины по закону Пуассона определяется по формуле:

$$P(m) = \lambda^m \cdot e^{-\lambda} / m!$$

где λ - параметр распределения, который одновременно является математическим ожиданием и дисперсией.

Необходимо отметить, что нам наиболее важно знать существуют ли такие числа. В этом случае следует определить вероятность только для двух вариантов: $m = 0$, когда отсутствуют такие числа, и $m \geq 1$, когда существует хотя бы одно такое число.

Подставим $m = 0$ в формулу распределения Пуассона и получим:

$$P(m = 0) = e^{-\lambda}$$

$$\text{Тогда: } P(m \geq 1) = 1 - P(m = 0) = 1 - e^{-\lambda}.$$

Теперь посмотрим, какие значения принимают $P(m = 0)$ и $P(m \geq 1)$ для различных степеней n . Основное внимание здесь уделено характеру поведения λ в зависимости от степени n . Применительно к теореме параметр распределения определяется по формуле:

$$\lambda = P(C) \cdot a_k = P(A) \cdot P(B) \cdot a_k$$

Полученные расчеты показали следующие результаты.

1) Для степени $n = 2$ параметр распределения $\lambda > 1$.

При $a_k \rightarrow \infty \Rightarrow \lambda \rightarrow \infty$, следовательно:

$$P(m = 0) = e^{-\lambda} = 0, \quad P(m \geq 1) = 1 - P(m = 0) = 1 - 0 = 1.$$

В результате можно сделать вывод о том, что на всем интервале натуральных чисел N обязательно появится хотя бы один раз событие C и это есть достоверное событие, то есть существуют квадраты, которые можно разбить на два квадрата. Математическое ожидание стремиться к бесконечности $E[X] = \lambda \rightarrow \infty$, что соответствует действительности, так как фактически таких чисел бесконечное множество.

2) Для степеней $n \geq 4$ параметр распределения $\lambda < 1$.

При $a_k \rightarrow \infty \Rightarrow \lambda \rightarrow 0$, следовательно:

$$P(m = 0) = e^{-\lambda} = 1, \quad P(m \geq 1) = 1 - P(m = 0) = 1 - 1 = 0.$$

В результате можно сделать вывод, что при проведении испытаний на всем интервале натуральных чисел N для всех $n \geq 4$ появление хотя бы одного события C невозможно. Математическое ожидание стремиться к нулю $E[X] = \lambda \rightarrow 0$, что соответствует действительности, так как фактически таких чисел нет.

Здесь возникает вопрос сохраняется ли распределение Пуассона при $\lambda \rightarrow \infty$ и $\lambda \rightarrow 0$. С математической точки зрения никаких ограничений на λ не накладывается: $0 < \lambda < \infty$. Однако при больших λ распределение Пуассона сильно меняет свою форму, становясь практически неотличимым от нормального распределения. При очень малом λ распределение Пуассона становится сосредоточенным около нуля, и вероятность того, что произойдет какое-либо событие, становится очень маленькой.

3) Для степени $n = 3$ нахождение параметра распределения λ показало интересные результаты.

Для N_k параметр распределения лежит в интервале $0 < \lambda < 1$. При $a_k \rightarrow \infty$ предел λ лежит между 0,315 и 1. Уже при числе $a_k = 10^{18}$ параметр распределения практически остается на одном уровне, примерно равным $\lambda \approx 0,44166$. Если считать, что предел параметра распределения равен этому числу, тогда:

$$P(m = 0) = e^{-0,44166} = 0,643$$

$$P(m \geq 1) = 1 - P(m = 0) = 1 - 0,643 = 0,357$$

Следовательно, для N с вероятностью 64,3 % можно говорить о том, что кубов, которые можно разбить на два куба, нет. Вместе с тем, с вероятностью 35,7 % не исключается возможность существования таких чисел. Математическое ожидание меньше единицы, но не равно нулю: $E[X] = \lambda \approx 0,44166$. Фактически таких чисел нет, это уже доказанный факт. Если бы для степени $n = 3$ количество событий A и B было бы чуть больше, чем на самом деле, то возможно существовало бы одно такое число или их ограниченное количество.

Заключение

Полученные результаты оценки теоремы Ферма с использованием методов теории вероятностей показали, что они не противоречат и соответствуют доказательству данной теоремы, опубликованному в 1995 году. Можно рассмотреть возможность использовать для оценки теоремы другие законы распределения теории вероятностей. Также можно попытаться использовать методы теории вероятностей для оценки наличия или отсутствия таких чисел для общей гипотезы Эйлера (опровергнута для некоторых степеней) и общей гипотезы Ландера - Паркина - Селфриджа.

Сама идея возникла еще в 2003 году, проведение расчетов было завершено в 2005 году. Опубликовать полученные результаты решил только сейчас. В интернете аналогичных работ по применению теории вероятности к теореме Ферма не нашел.