

Схема наблюдения в статистике обобщённых репьюнитных простых: калибровка объединённой проверки константы Ленстры — Померанса — Вагстаффа

Тимофей Сергеевич Докучаев*
Независимый исследователь, Иркутск, Россия

27 августа 2026 г.

Аннотация

Эвристика Ленстры — Померанса — Вагстаффа (ЛПВ) предсказывает, что $\#\{n \leq x : R_b(n) \text{ просто}\} \sim (e^\gamma / \ln b) \ln x$. С 1993 года эту универсальность проверяют через «нормированную частоту встречаемости», получаемую регрессией $\ln n_k$ на k .

Во-первых, подозрение о смещении этой частоты правым цензурированием *неверно*: и концевая форма, и наклон МНК несмещены точно (предложение 2); смещена лишь обратная величина — неравенство Йенсена. Дефект иной: варианты оценки расходятся до 29,5% — в 1,7 раза больше медианного отклонения от $e^{-\gamma}$, — и ярлык «удачливости» основания переворачивается от смены формы.

Во-вторых, точное условное правдоподобие вместо регрессии объединяет $B = 15$ оснований в $M = 218$ событий против 51 у одних простых Мерсенна. Главное: пивот $\kappa S \sim \text{Gamma}(M, 1)$ точен лишь при наблюдении «до N -го события», а данные получены при фиксированном фронте со случайным числом находок. При реальной схеме номинальный 5% критерий отвергает в 16,2% случаев, а верной объединённой оценкой оказывается $(M - B)/S$, а не $(M - 1)/S$: условное правдоподобие стоит одного события *на каждое основание*. Отсюда $\hat{\kappa} = 1,838$ при 95% интервале $[1,61; 2,13]$ и $p = 0,64$ против $e^\gamma \approx 1,781$; сообщавшееся десятипроцентное превышение над ЛПВ есть артефакт схемы наблюдения.

В-третьих, выбор между двумя оценками определяется способом сбора данных, а не самими данными, и стоит 7%; отсюда требование публиковать фронты L_b . Наконец, критерий однородности ($\Lambda = 7,40$, $p = 0,92$) различает лишь разброс κ_b свыше $\pm 34\%$, а объединённая выборка — отклонения от e^γ свыше 21%.

Ключевые слова: репьюнит-простые, обобщённые репьюниты, числа Мерсенна, гипотеза Ленстры — Померанса — Вагстаффа, постоянная Эйлера — Маскерони, схема наблюдения, цензурирование типа I, обратная выборка, пуассоновский точечный процесс, условное правдоподобие, достаточная статистика, смещение оценки, мощность критерия, вычислительная теория чисел

MSC 2020: Primary 11Y11; Secondary 11N05, 62F03, 62B05, 11N80.

Благодарности: автор благодарит проект Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS) за предоставление данных о простых числах Мерсенна через открытый отчёт PrimeNet (<https://www.mersenne.org/>); значения индексов Мерсенна получены оттуда 27 августа 2026 года. Автор признателен участникам OEIS, которые много лет поддерживают последовательности обобщённых репьюнитных простых.

Финансирование: исследование выполнено без внешнего финансирования.

*ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-0510-5225>. Контактный адрес: timofei93@yandex.ru

The observation scheme in the statistics of generalized repunit primes: calibrating the pooled test of the Lenstra–Pomerance–Wagstaff constant

Timofei Sergeevich Dokuchaev

Independent researcher, Irkutsk, Russia,

timofei93@yandex.ru, <https://orcid.org/0009-0006-0510-5225>

Abstract

The Lenstra–Pomerance–Wagstaff (LPW) heuristic predicts $\#\{n \leq x : (b^n - 1)/(b - 1) \text{ prime}\} \sim (e^\gamma / \ln b) \ln x$. Since 1993 it has been tested via a “normalised occurrence frequency” from regressing $\ln n_k$ on k .

First, the suspicion that right-censoring biases this frequency downwards is *false*: both the endpoint form and the OLS slope are exactly unbiased; only the reciprocal is biased — Jensen’s inequality. The genuine defect is that competing forms of the estimator disagree by up to 29.5% on identical data, and the “lucky base” label flips between them.

Second, an exact conditional likelihood pools $B = 15$ bases into $M = 218$ events against 51 for Mersenne primes alone. The main result concerns the pivot: it is exact only under inverse sampling, whereas the data arise from a fixed frontier with a random number of finds. Under the latter the nominal 5% test rejects in 16.2% of cases, and the correct pooled estimator is $(M - B)/S$, not $(M - 1)/S$: the conditional likelihood costs one event *per base*. This yields $\hat{\kappa} = 1.838$, 95% interval $[1.61, 2.13]$, $p = 0.64$ against $e^\gamma \approx 1.781$; the reported ten-percent excess is an artefact of the scheme.

Third, the choice between the two estimators is settled by how the data were collected, not by the data, and costs 7%; hence our call to publish the frontiers L_b . Finally, the homogeneity test ($\Lambda = 7.40$, $p = 0.92$) detects only a spread of κ_b above $\pm 34\%$, the pooled sample only deviations above 21%.

Keywords: repunit primes, generalized repunits, Mersenne primes, Lenstra–Pomerance–Wagstaff conjecture, Euler–Mascheroni constant, observation scheme, Type-I censoring, inverse sampling, Poisson point process, conditional likelihood, sufficient statistic, estimator bias, statistical power, computational number theory

Acknowledgments: the author thanks the Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS) project for providing the Mersenne prime data through the open PrimeNet report (<https://www.mersenne.org/>); the Mersenne exponents were retrieved on 27 August 2026. The author is grateful to the OEIS contributors who have maintained the generalized repunit prime sequences for many years.

Funding: this research received no external funding.

1 Введение

Для целого основания $b \geq 2$ обобщённый репьюнит есть

$$R_b(n) = \frac{b^n - 1}{b - 1}, \quad (1)$$

причём $R_b(n)$ может быть простым только при простом n . При $b = 2$ это числа Мерсенна $M_p = 2^p - 1$. Опираясь на эвристики Вагстаффа [1] и Померанса [2], гипотеза ЛПВ утверждает, что

$$\pi_b(x) = \#\{n \leq x : R_b(n) \text{ простое}\} \sim \frac{e^\gamma}{\ln b} \ln x, \quad (2)$$

где γ — постоянная Эйлера — Маскерони; подробный вывод эвристики для $b = 2$ изложен в справочнике PrimePages [3]. Основание входит в (2) лишь через множитель $1/\ln b$: константа $e^\gamma \approx 1,7811$ объявляется универсальной. Дабнер [4] предложил проверять эту универсальность эмпирически по разным основаниям, а Бурделэ [5] с тех пор ведёт текущие оценки

нормированной частоты, публикуя их в комментариях к записям OEIS [6]. Родственные вопросы для одной лишь последовательности Мерсенна недавно обсуждались в [7]. Близка по духу и работа [8], где у показателей Мерсенна ищут вторичную структуру, связанную с разложением $p - 1$; методически она устроена так же, как наш §8 — стратифицированное условное правдоподобие плюс проверка значимости, — но проверяет структуру *внутри* одного основания, тогда как мы проверяем её *между* основаниями.

Вокруг этих оценок сложился интерпретационный фольклор. Основание 13 описывается как «удачливое», основание 7 — как «самое неудачливое»; отмечается, что нормированные частоты лежат ниже предполагаемого предела $e^{-\gamma} \approx 0,5615$ и медленно сходятся к нему снизу. Настоящая работа разбирает эти утверждения, но приходит к выводам, отличным от тех, которых естественно ожидать.

1.1 Вклад работы

1. **Употребительная оценка частоты не смещена.** Схема, при которой интервал подгонки заканчивается наибольшим известным индексом, действительно обуславливает оценку тем, что последнее наблюдение является событием, и достаточная статистика распределена как $\text{Gamma}(N, \lambda_b)$ (предложение 1). Но отсюда *не* следует смещение нормированной частоты: и конечная форма $D/(N \ln b)$, и наклон МНК несмещены точно (предложение 2, таблица 2). Смещена только обратная величина $\hat{\kappa} = 1/\hat{G}$, в $N/(N-1)$ раз, и это неравенство Йенсена, а не цензурирование. Несмещённые оценки κ и $1/\kappa$ не могут быть взаимно обратными; всякая «поправка», чинящая одну, портит другую (§3).
2. **Настоящий дефект — неустойчивость к выбору формы оценки.** В обращении несколько численно различных вариантов. На одних и тех же данных они расходятся до 29,5% (основание 18) — в 1,7 раза больше медианного отклонения оценок от $e^{-\gamma}$ (17,6%), которое и толкуют содержательно; у двух оснований из пятнадцати выбор формы весит больше, чем всё их отклонение от предсказания ЛПВ. Основание 18 при конечной форме — третье по «неудачливости» из пятнадцати, а при МНК — десятое, ниже медианы. Ярлык описывает выбор оценки, а не свойства простых (§3.4).
3. **Объединение оснований и его цена.** Условное правдоподобие (§3.5) не требует знания недокументированных границ поиска L_b и позволяет объединить $B = 15$ оснований в $M = 218$ событий против 51 у одних Мерсенна. Точное нулевое распределение $\text{Gamma}(M, 1)$ делает симуляции ненужными.
4. **Главный результат: пивот не откалиброван под реальную схему наблюдения.** Условное правдоподобие точно при схеме «наблюдаем до N -го события», где N задано планом. Данные же получены при фиксированном фронте: поиск покрыл $(t_0, \ln L_b]$, а число находок случайно. При этой схеме номинальный 5% критерий отвергает в 16,2% случаев, а правильной объединённой оценкой оказывается $(M - B)/S$ (предложение 3). Само различие схем классическое, а несмещённость $(N - 1)/D$ при схеме А учебникова, и мы на неё не претендуем; новизна в том, что фронт *не документирован*, поэтому экспозицию приходится восстанавливать из самих находок, и поправка оказывается пропорциональна числу оснований (замечание 3). Это даёт $\hat{\kappa} = 1,838$ при $p = 0,64$: превышение над ЛПВ исчезает (§4).
5. **Выбор схемы данными не решается.** Оценки $(M - 1)/S$ и $(M - B)/S$ построены на одних и тех же достаточных статистиках (N_b, D_b) и различаются на 7%; что из них верно, определяется не данными, а тем, как они собирались. Попытка обойти выбор через заведомо несмещённые по-основанию куски проваливается (§4.3). Единственный радикальный выход — публиковать фронты L_b .

6. **Удачливые основания: чего критерий не может.** Критерий отношения правдоподобий даёт $\Lambda = 7,40$ при 14 степенях свободы, $p = 0,92$. Но его мощность такова, что он различает лишь разброс κ_b порядка $\pm 34\%$ (§5.3). Корректный вывод — «базозависимые частоты данными не требуются», а не «их не существует».
7. **Явный расчёт мощности.** Объединённая выборка различает отклонения от e^γ не менее 21,2%; одна последовательность Мерсенна — не менее 49,8% (§6).

В §7 разобран более частный, но поучительный сюжет: наивная регрессия счётной функции Мерсенна порождает на вид значимый отрицательный свободный член, который оказывается артефактом обусловливания. Мы включаем его как разобранный пример той же ошибки в ином обличье.

2 Модель и данные

2.1 Пуассоновская модель

Положим $t = \ln n$. Эвристика (2) равносильна утверждению, что индексы обобщённых репьюнитных простых по основанию b образуют однородный пуассоновский точечный процесс на оси t с постоянной интенсивностью

$$\lambda_b = \frac{\kappa}{\ln b}, \quad \text{ЛПВ: } \kappa = e^\gamma = 1,781072\dots \quad (3)$$

Универсальность — это утверждение, что единственный параметр κ управляет всеми основаниями. Пуассоновская идеализация здесь — рабочее допущение, а не теорема: даже для обычных простых пуассоновский закон в коротких промежутках доказан лишь условно, при гипотезах Харди — Литтлвуда, и известно, что он разрушается при росте масштаба [9]. Мы принимаем (3) как модель и всюду рассматриваем κ как оцениваемую величину; это сводит вопрос «верна ли ЛПВ?» к однопараметрическому и делает основания объединяемыми.

2.2 Допустимые основания

Основания, являющиеся точными степенями, исключаются: при $b = c^m$, $m > 1$, число $R_b(n)$ допускает алгебраическую факторизацию, и процесс не имеет предполагаемого вида. Поэтому основания 4, 8, 9, 16 опущены. Внутри объявленного диапазона отбор не зависит от результатов: берутся *все* основания $2 \leq b \leq 20$, не являющиеся точными степенями, что даёт $B = 15$; ни одно основание не исключено и не добавлено по величине его оценки. Каждое из них имеет не менее восьми известных индексов (минимум достигается при $b = 18$: восемь членов A133857).

Подчеркнём, однако, что сама верхняя граница $b \leq 20$ — условная круглая величина, а не следствие критерия «не менее восьми индексов»: этот критерий выполняется и дальше (A127996 для $b = 21$ содержит восемь членов, A127997 для $b = 22$ — девять) и впервые нарушается лишь при $b = 23$ (A204940, шесть членов). Чтобы граница не выглядела подобранной, мы проверили её влияние прямо. Расширение набора до всех оснований $b \leq 26$, не являющихся точными степенями (добавляются $b = 21, 22, 23, 24, 26$; $b = 25 = 5^2$ исключается алгебраически), даёт $B = 20$, $M = 253$ и

$$\frac{M-1}{S} = 1,9776, \quad \frac{M-B}{S} = 1,8285,$$

то есть сдвигает основную оценку (15) на 0,5% — вчетверо меньше цены выбора схемы наблюдения (§4). Критерий однородности на расширенном наборе даёт $\Lambda = 10,27$ при 19 степенях свободы, $p = 0,95$. Ни один вывод работы от границы $b \leq 20$ не зависит; мы сохраняем её как заранее объявленную.

2.3 Данные и их статус

В таблице 1 перечислены использованные последовательности, полученные 27 августа 2026 года (сверка — приложение А). Три оговорки существенны.

Вероятно простые числа. Для больших индексов большинство элементов — вероятно простые, установленные тестом Ферма или сильным тестом Ферма после пробного деления. Счёт смещается вверх лишь в случае, если псевдопростое Ферма было принято за простое, что для чисел такого размера практически не встречается. Чувствительность проверена в §5.4.

Фронты проверки. Для $b = 2$ проект GIMPS [10] публикует два фронта: все показатели ниже $X_{\text{ver}} = 81\,648\,221$ проверены дважды, что даёт ровно 50 простых Мерсенна, тогда как все показатели ниже $X_{\text{ft}} = 141\,308\,443$ проверены хотя бы однократно, что даёт 52. Два наибольших показателя предварительны: между ними остаются непроверенные кандидаты. Анализ §7, где фронт используется явно, ограничен 50 проверенными показателями. Объединённый анализ к этому выбору нечувствителен (§5.4).

Оба фронта — движущиеся величины, поэтому фиксируем момент считывания: отчёт PrimeNet Milestones, 27 августа 2026 г. Ни один вывод от точного значения X_{ver} не зависит: достаточно того, что оно лежит между $M_{50} = 77\,232\,917$ и $M_{51} = 82\,589\,933$, а это верно для всех значений отчёта за 2026 год.

Статус записи A000043. Раздел DATA этой записи содержит 50 членов и обрывается на 77 232 917: порядок следующих показателей OEIS считает недоказанным до завершения двойной проверки. Показатели 82 589 933 и 136 279 841 известны и документированы GIMPS (и упомянуты в комментариях к A000043), но формально не входят в DATA. Мы включаем их, поскольку статистика (8) использует лишь положение последнего события, а не его порядковый номер; в §5.4 проверено, что ограничение основания 2 пятьюдесятью дважды проверенными показателями вывода не меняет.

Границы поиска при $b > 2$. Для прочих оснований сопоставимого фронта не публикуется. Именно эта лакуна — предмет §4 и, как мы полагаем, главное препятствие к количественной проверке ЛПВ.

3 Что смещено, а что нет

3.1 Употребительные оценки

Дабнер [4] и Бурделэ [5] характеризуют основание b нормированной частотой встречаемости, получаемой подгонкой прямой к зависимости $\ln n_k$ от k с последующим делением на $\ln b$. Согласно (3) ожидаемый наклон равен $1/\lambda_b = \ln b/\kappa$, так что нормированная частота оценивает

$$G_b = \frac{1}{\kappa}, \quad \text{ЛПВ: } G_b = e^{-\gamma} = 0,5614595\dots \quad (4)$$

В обращении несколько вариантов — обычный МНК со свободным членом, регрессия через начало координат и конечная форма $\hat{G}_b = D_b/(N_b \ln b)$, где $D_b = t_{N_b} - t_0$. Все они разделяют структурную особенность: интервал подгонки заканчивается на наибольшем известном индексе.

Таблица 1. И использованные последовательности. N_b — число событий строго правее $t_0 = \ln n_{\min}$, то есть на единицу меньше числа известных простых индексов: наименьший индекс задаёт начало отсчёта, а не событие. Источник — записи OEIS, получено 27.08.2026.

Table 1. Sequences used. N_b is the number of events strictly to the right of $t_0 = \ln n_{\min}$, that is, one less than the number of known prime indices: the smallest index sets the origin, not an event. Source: OEIS entries, retrieved 27.08.2026.

b	OEIS	простых	N_b	$n_{\min}$	$n_{\max}$	D_b
2	A000043	52	51	2	136 279 841	18,0371
3	A028491	23	22	3	8 530 117	14,8605
5	A004061	19	18	3	3 300 593	13,9110
6	A004062	17	16	2	3 360 347	14,3344
7	A004063	10	9	5	1 264 699	12,4409
10	A004023	11	10	2	8 177 207	15,2237
11	A005808	13	12	17	1 868 983	11,6077
12	A004064	14	13	2	769 543	12,8604
13	A016054	13	12	5	1 503 503	12,6139
14	A006032	11	10	3	1 724 417	13,2618
15	A006033	10	9	3	639 833	12,2704
17	A006034	12	11	3	1 990 523	13,4053
18	A133857	8	7	2	1 270 141	13,3615
19	A006035	11	10	19	209 359	9,3074
20	A127995	9	8	3	984 349	12,7011
всего		$M = 218$			$S = 110,4423$	

3.2 Точное распределение

Предложение 1 (Условный закон правого конца). Пусть события образуют однородный пуассоновский процесс интенсивности λ на (t_0, ∞) , и пусть $t_1 < \dots < t_N$ — его первые N событий после t_0 . Тогда $D := t_N - t_0$ имеет распределение $\text{Gamma}(N, \lambda)$ с плотностью $\lambda^N d^{N-1} e^{-\lambda d} / (N-1)!$. При условии $D = d$ предшествующие $N-1$ событий распределены как порядковые статистики $N-1$ независимых равномерных величин на (t_0, d) .

Доказательство. Времена ожидания $t_1 - t_0, \dots, t_N - t_{N-1}$ независимы и распределены по закону $\text{Exp}(\lambda)$, а сумма N таких величин распределена как $\text{Gamma}(N, \lambda)$. Условная равномерность есть свойство порядковых статистик пуассоновского процесса, применённое к (t_0, d) . $\square$

Следствие 1 (Смещение обратной величины). Оценка максимального правдоподобия для λ по одному лишь D равна $\hat{\lambda} = N/D$, причём

$$\mathbb{E}[\hat{\lambda}] = N \mathbb{E}[D^{-1}] = \frac{N}{N-1} \lambda, \quad (5)$$

так как $\mathbb{E}[D^{-1}] = \lambda / (N-1)$ для $D \sim \text{Gamma}(N, \lambda)$. Оценка $\tilde{\lambda} = (N-1)/D$ в точности несмещена.

3.3 Чего из следствия 1 не следует

Естественно заключить, что раз $\hat{\lambda}$ завышена в $N/(N-1)$ раз, то частота $\hat{G}_b$ занижена во столько же. Это неверно.

Предложение 2 (Несмещённость частоты). В условиях предложения 1:

- (i) *концевая оценка несмещена точно:* $\mathbb{E}\left[\frac{D}{N \ln b}\right] = \frac{1}{\lambda \ln b} = G_b;$

Таблица 2. Проверка предложений методом Монте-Карло, 200 000 реализаций на строку (зерно генератора фиксировано, см. `analysis.py`). Целевое значение всех столбцов, кроме второго, равно 1,0000.

Table 2. Monte Carlo check of the propositions, 200 000 replications per row (generator seed fixed, see `analysis.py`). The target value of every column except the second is 1.0000.

N	$\mathbb{E}[\hat{\lambda}]/\lambda$	$N/(N-1)$	$\mathbb{E}[\tilde{\lambda}]/\lambda$	$\mathbb{E}[\hat{G}]/\lambda$	$\mathbb{E}[\tilde{G}]/\lambda$	$\mathbb{E}[\hat{\beta}]/\lambda$
7	1,1665	1,1667	0,9998	1,0002	1,1669	1,0002
10	1,1115	1,1111	1,0004	0,9998	1,1109	0,9997
16	1,0672	1,0667	1,0005	0,9994	1,0660	0,9994
22	1,0481	1,0476	1,0004	0,9996	1,0472	0,9997
51	1,0202	1,0200	1,0002	0,9999	1,0199	0,9998

(ii) *наклон МНК регрессии t_k на k несмещён точно: $\mathbb{E}[\hat{\beta}] = 1/\lambda$;*

(iii) *следовательно, «исправленная» величина $\tilde{G}_b = \frac{N}{N-1}\hat{G}_b$ смещена вверх ровно в $N/(N-1)$ раз.*

Доказательство. (i) $\mathbb{E}[D] = N/\lambda$ для $D \sim \text{Gamma}(N, \lambda)$, откуда результат немедленно. (ii) Наклон МНК есть линейная статистика $\hat{\beta} = \sum_k w_k t_k$ с весами $w_k = (k - \bar{k}) / \sum_j (j - \bar{k})^2$, для которых $\sum_k w_k = 0$ и $\sum_k w_k k = 1$. Поскольку $\mathbb{E}[t_k] = t_0 + k/\lambda$, получаем $\mathbb{E}[\hat{\beta}] = \sum_k w_k (t_0 + k/\lambda) = 1/\lambda$. (iii) непосредственно из (i). $\square$

Содержательный смысл прост: несмещённые оценки κ и $1/\kappa$ не могут быть взаимно обратными, поскольку $x \mapsto 1/x$ строго выпукло. Несмещённая пара — это $(\hat{G}_b, \tilde{\kappa}_b)$, где $\tilde{\kappa}_b = (N_b - 1) \ln b / D_b$; но $\tilde{\kappa}_b \neq 1/\hat{G}_b$. Всякая единая «поправка на цензурирование», исправляющая одну величину, портит другую. Таблица 2 подтверждает предложение 2 симуляцией.

Замечание 1. Отрицательный результат этого параграфа стоит подчеркнуть, поскольку он противоречит интуиции: систематическое отклонение опубликованных частот вниз от $e^{-\gamma}$ не объясняется схемой подгонки. Его источник — либо реальное превышение κ над e^γ , либо, как показывает §4, схема наблюдения, но не арифметика оценки.

3.4 Неустойчивость к выбору формы оценки

Несмещённость не означает согласованности. В таблице 5 приведены концевая форма $\hat{G}_b$ и оценка по МНК $\hat{G}_b^{\text{OLS}}$ на одних и тех же данных. Расхождения достигают 29,5% ($b = 18$), 15,9% ($b = 13$) и 10,3% ($b = 11$).

Сопоставим их с тем, что в литературе толкуют содержательно, — с отклонениями самих оценок от $e^{-\gamma}$. Последние по пятнадцати основаниям имеют медиану 17,6% (от 5,6% при $b = 20$ до 43,7% при $b = 19$). Наибольшее расхождение форм, 29,5%, превышает эту медиану в 1,7 раза. В среднем выбор формы, разумеется, дешевле: медиана расхождений равна 4,1%, то есть около четверти медианного отклонения. Но у двух оснований из пятнадцати ($b = 18$ и $b = 13$) выбор формы весит больше, чем всё их отклонение от предсказания ЛПВ, — и именно эти основания фольклор и обсуждает.

Следствие для фольклора прямое. Основание 18 при концевой форме имеет $\hat{G}_{18} = 0,6604$ — третье по величине из пятнадцати (после $b = 7$ с 0,7104 и $b = 10$ с 0,6612), то есть уверенно входит в тройку «самых неудачливых»; при МНК $\hat{G}_{18}^{\text{OLS}} = 0,4656$ — десятое место из пятнадцати, ниже медианы 0,4904, то есть оно уже «удачливое». Ярлык переворачивается без единого нового простого числа, от одной лишь смены формы оценки: основание перемещается с третьего места на десятое.

К этому добавляется вторая, техническая беда МНК: его стандартные ошибки в этой задаче неверны. Остатки суть отклонения порядковых статистик и сильно автокоррелированы; для $b = 2$ мы получаем $\rho_1 = 0,825$, а ковариационная оценка Ньюи — Уэста с восемью лагами увеличивает стандартную ошибку свободного члена с 0,447 до 0,732 (§7). Опубликованные точечные значения не сопровождаются интервалами, и это, а не смещение, — главная методологическая претензия к текущей практике.

3.5 Условное правдоподобие

Предложение 1 даёт больше, чем разбор смещения. Полагая $t_0 = \ln n_{\min}$ и приняв (N_b, D_b) за данные по основанию b , получаем логарифмическое правдоподобие

$$\ell(\kappa) = \sum_b \left[N_b \ln \frac{\kappa}{\ln b} - \frac{\kappa}{\ln b} D_b \right] + \text{const}, \quad (6)$$

распределение которого не зависит от границы поиска L_b . Это существенно практически: L_b хорошо документирована лишь при $b = 2$. Дифференцируя (6) и полагая $S = \sum_b D_b / \ln b$, получаем

$$\hat{\kappa} = \frac{M}{S}, \quad \tilde{\kappa} = \frac{M-1}{S}, \quad M = \sum_b N_b. \quad (7)$$

Так как $\kappa S = \sum_b \lambda_b D_b$ есть сумма независимых величин $\text{Gamma}(N_b, 1)$, то

$$\kappa S \sim \text{Gamma}(M, 1), \quad (8)$$

то есть точная центральная статистика; доверительные интервалы и p -значения получаются в замкнутой форме. *Ровно это утверждение и требует ревизии* — см. §4.

Замечание 2 (Независимость по основаниям). Объединение предполагает независимость процессов по разным основаниям. Строго она не выполняется на малых индексах: семнадцать значений индекса встречаются более чем в одном основании, причём $n = 3$ — в девяти, поскольку $R_b(3) = b^2 + b + 1$ просто для многих b . Все такие совпадения лежат при $n \leq 317$. Существеннее, впрочем, не совпадение индексов (числа $R_b(n)$ при разных b различны), а возможная общность алгебраических делителей; и то и другое затрагивает лишь малые n , тогда как D_b определяется верхним концом диапазона. Раздел 5.4 подтверждает, что отбрасывание всех индексов ниже 10^3 вывод не меняет.

4 Две схемы наблюдения

4.1 В чём различие

Пивот (8) выведен в предположении, что N_b задано планом наблюдения: мы смотрим на процесс, пока не наберём N_b событий, и останавливаемся. Назовём это *схемой А* (обратная выборка, цензурирование типа II).

Данные получены иначе. Для каждого основания вычислительный поиск покрыл интервал $(t_0, \ln L_b]$ целиком, и найденными оказались все события, попавшие внутрь; число находок N_b — случайная величина, а фиксирован фронт L_b . Назовём это *схемой В*.

Замечание 3 (Что здесь классика, а что нет). Само различие схем классическое и восходит к теории надёжности, где схема А называется *failure-truncated*, а схема В — *time-truncated* испытанием на долговечность [11, 12]. Оценка $(N-1)/D$, несмещённая при схеме А (следствие 1), там учебниковая, и мы не претендуем на неё. Более того, при схеме В точно несмещённой оценки среднего *не существует* [13, 14]: экспоненциально малый остаток в (11) не небрежность, а лучшее, что здесь достижимо в принципе.

Новым мы считаем другое. В классической постановке момент прекращения испытания *известен*: время T назначает экспериментатор. Здесь фронт L_b не документирован ни для одного основания, кроме $b = 2$, поэтому полную экспозицию приходится не брать из протокола, а восстанавливать — через отсутствие последствий, из самих находок. Отсюда и берётся поправка *на каждое основание*, а не на выборку в целом: неизвестных фронтов столько же, сколько оснований. Обзор смещений, порождаемых краем окна наблюдения, но в непараметрической постановке и для формы распределения интервалов, а не для интенсивности, дан в [15].

Различие не косметическое. При схеме В, условно на $N_b = n$, положения событий суть n независимых равномерных величин на $(t_0, \ln L_b]$, поэтому условное распределение D_b зависит от L_b и *не* зависит от λ_b : при фиксированном N_b величина D_b информативна о фронте, а не об интенсивности. Правдоподобие (6) при схеме В не является правдоподобием.

Заметим также, что §7 настоящей работы, где для $b = 2$ фронт известен и используется явно, построен именно на схеме В. Обе схемы в одной работе применять нельзя; ниже мы принимаем схему В как соответствующую способу получения данных и калибруем под неё результаты схемы А.

4.2 Правильная объединённая оценка при схеме В

Смещение имеет замкнутую форму, и она поучительна.

Предложение 3. Пусть при схеме В поиск по основанию b покрыл $(t_0, \ln L_b]$, ширина окна есть $W_b = \ln L_b - t_0$, а $\delta_b = \ln L_b - t_{N_b}$ — расстояние от фронта до последнего найденного события (при $N_b = 0$ полагаем $\delta_b = W_b$). Тогда

$$\Pr(\delta_b > x) = e^{-\lambda_b x} \quad (0 \leq x < W_b), \quad \Pr(\delta_b = W_b) = e^{-\lambda_b W_b}, \quad (9)$$

то есть δ_b есть экспоненциальная величина с параметром λ_b , усечённая на W_b , и

$$\mathbb{E}[\delta_b] = \frac{1 - e^{-\lambda_b W_b}}{\lambda_b}. \quad (10)$$

Полная экспозиция есть $S_{\text{full}} = S + \sum_b \delta_b / \ln b = \sum_b W_b / \ln b$, причём $\mathbb{E}[M] = \kappa S_{\text{full}}$ тождественно, а

$$\mathbb{E}\left[\kappa \sum_b \delta_b / \ln b\right] = B - \sum_b e^{-\lambda_b W_b}. \quad (11)$$

Приравнивая κS_{full} к M и отбрасывая экспоненциально малый остаток, получаем моментную оценку

$$\hat{\kappa}_B = \frac{M - B}{S}. \quad (12)$$

Доказательство. Событие $\{\delta_b > x\}$ при $x < W_b$ означает, что на интервале $(\ln L_b - x, \ln L_b]$ длины x нет ни одного события процесса; вероятность этого равна $e^{-\lambda_b x}$. При $x \rightarrow W_b^-$ остаётся случай «событий нет вовсе», что и даёт атом в (9). Интегрируя хвост, $\mathbb{E}[\delta_b] = \int_0^{W_b} e^{-\lambda_b x} dx = (1 - e^{-\lambda_b W_b}) / \lambda_b$, откуда (10). Далее, S_{full} не случайна: по построению $D_b + \delta_b = W_b$, поэтому $\kappa S_{\text{full}} = \sum_b \lambda_b W_b = \mathbb{E}[M]$ — это в точности уравнение моментов. Наконец, $\kappa \mathbb{E}[\delta_b] / \ln b = \lambda_b \mathbb{E}[\delta_b] = 1 - e^{-\lambda_b W_b}$, и суммирование по b даёт (11). $\square$

Замечание 4. Отбрасываемый в (11) остаток $\sum_b e^{-\lambda_b W_b}$ есть ожидаемое число оснований, у которых поиск не дал ни одной находки. В наших данных находки есть у всех, а $\lambda_b W_b \approx N_b \geq 7$, так что остаток не превосходит $\sum_b e^{-N_b} < 3 \cdot 10^{-3}$ против $B = 15$ — относительная поправка порядка 0,02%. Именно её и показывает первая строка таблицы 3. Подчеркнём, что без этого усечения утверждение $\delta_b \sim \text{Exp}(\lambda_b)$ было бы неверным: у процесса нет событий левее t_0 , поэтому $\delta_b \leq W_b$ по построению, и ссылка на отсутствие последствий здесь недостаточна.

Таблица 3. Несмещённость двух объединённых оценок при различном расположении фронта. Истинное значение $e^\gamma = 1,7811$; 15 000 реализаций на строку. Правила заданы через ширину окна $W_b = \ln L_b - t_0$: « $\mathbb{E}[\#]$ = наблюдаемое» есть $W_b = N_b/\lambda_b$; «+s средних интервалов» — $W_b = (N_b + s)/\lambda_b$; «в s раз дальше по t » — $W_b = c D_b$ с наблюдаемым D_b ; «случайные» — $W_b = (N_b/\lambda_b) U$ с независимой $U \sim \text{Unif}(0,7; 1,8)$, своей u каждого основания и каждой реализации.

Table 3. Unbiasedness of the two pooled estimators under different frontier placements. True value $e^\gamma = 1.7811$; 15 000 replications per row. The rules are stated through the window width $W_b = \ln L_b - t_0$: “ $\mathbb{E}[\#]$ = observed” is $W_b = N_b/\lambda_b$; “+s mean intervals” is $W_b = (N_b + s)/\lambda_b$; “c times further in t ” is $W_b = c D_b$ with the observed D_b ; “random” is $W_b = (N_b/\lambda_b) U$ with independent $U \sim \text{Unif}(0.7, 1.8)$, drawn separately for each base and each replication.

Правило для фронта	$\mathbb{E}[(M-B)/S]$	откл.	$\mathbb{E}[(M-1)/S]$	откл.
$\mathbb{E}[\#\text{событий}] = \text{наблюдённое}$	1,7814	+0,02%	1,9043	+6,92%
фронт +0,5 среднего интервала	1,7816	+0,03%	1,9001	+6,68%
фронт +2 средних интервала	1,7820	+0,05%	1,8891	+6,07%
фронт +5 средних интервалов	1,7820	+0,05%	1,8717	+5,09%
фронт в 1,5 раза дальше по t	1,7825	+0,08%	1,8716	+5,08%
фронт вдвое дальше по t	1,7816	+0,03%	1,8475	+3,73%
фронты случайные, разные по основаниям	1,7812	+0,01%	1,8788	+5,49%

Иными словами, условное правдоподобие стоит информации, эквивалентной одному событию *на каждое основание*, — а формула (7) вычитает одно событие *всего*. При $B = 15$ разница составляет четырнадцать событий, то есть 7%:

$$\frac{M-1}{S} = 1,9648 \quad \text{против} \quad \frac{M-B}{S} = 1,8381. \quad (13)$$

Прямая симуляция схемы В подтверждает: оценка (12) имеет смещение +0,02%, тогда как $(M-1)/S$ — смещение +6,9% (таблица 4).

Существенно, что вывод предложения 3 опирается *только* на равенство (10), которое верно для *любого* положения фронта: в него входит лишь ширина окна W_b , а она сокращается вместе с экспоненциально малым остатком (замечание 4). Поэтому оценка (12) не содержит свободного параметра и не требует знания того, насколько далеко ушёл фронт. Таблица 3 подтверждает это симуляцией при семи различных правилах расположения фронта, включая случайные и различные по основаниям.

Единственное допущение. Требуется лишь следующее.

(A1) *Положение фронта L_b не выбиралось по результатам поиска: вычислительный бюджет, а не находки, определяет, до какого n доведено просеивание.*

Если (A1) нарушено в крайней форме — поиск по каждому основанию прекращался сразу после находки, — то $\delta_b = 0$ и мы возвращаемся к схеме А. Общий вид оценки при $\delta_b = m/\lambda_b$ есть $\hat{\kappa} = (M - Bm)/S$, так что весь диапазон, порождаемый неопределённостью в (A1), есть отрезок между 1,838 ($m = 1$, фронт независим от находок) и 1,974 ($m = 0$, поиск останавливается на находке).¹ Реальная практика распределённых вычислений явно ближе к первому: просеивание ведётся сплошными интервалами, а находки объявляются по ходу. Существенно, что оба конца отрезка совместимы с ЛПВ (§5.2), так что вывод работы от (A1) не зависит; от (A1) зависит лишь величина остаточного разрыва.

¹При $m = 0$ моментное приравнивание даёт ровно $M/S = 1,9739$, тогда как точная несмещённая оценка схемы А из следствия 1 есть $(M-1)/S = 1,9648$ (различие — одно событие из 218, то есть 0,5%; это обычная разница между моментной оценкой и оценкой, исправленной по Йенсену). В §5.2 и всюду далее мы приводим $(M-1)/S$; здесь для однородности семейства $(M - Bm)/S$ выписан предел моментной формы.

Таблица 4. Калибровка пивота (8) при схеме В. «Сдвиг фронта» — на сколько средних интервалов $\ln L_b$ отнесён дальше ожидаемого последнего события. 20 000 реализаций на строку; точность Монте-Карло около $\pm 0,005$ (биномиальная при наблюдаемом уровне 0,16; разброс по пяти зёрнам генератора — 0,162–0,169).

Table 4. Calibration of pivot (8) under scheme В. “Frontier shift” is how many mean intervals beyond the expected last event $\ln L_b$ is placed. 20 000 replications per row; Monte Carlo accuracy about ± 0.005 (binomial at the observed level 0.16; the spread across five generator seeds is 0.162–0.169).

Схема	ошибка I рода (номинал 0,05)	$\mathbb{E}[\tilde{\kappa}]/\kappa = c$
В, сдвиг 0	0,1616	1,0688
В, сдвиг 0,5	0,1600	1,0664
В, сдвиг 1	0,1558	1,0641
В, сдвиг 2	0,1491	1,0595
А (контроль)	0,0504	0,9997

Два вывода из таблицы 4. Во-первых, номинальный 5% критерий при схеме В отвергает верную гипотезу в 16,2% случаев: заявленная точность интервалов завышена примерно втрое. Во-вторых, оценка (12) при схеме В практически несмещена, так что дело не в неустранимом искажении, а в неверно выбранной схеме.

Единственная прямая проверка возможна для $b = 2$: там $\delta_2 = \ln(X_{\text{ver}}/n_{\text{max}}) = 0,056$ при среднем интервале $\ln 2/e^\gamma = 0,389$, предсказанном ЛПВ. Это одна реализация экспоненциальной величины с единичным средним, и такое значение не редкость: $\Pr(\delta\lambda < 0,143) = 0,13$. (Если брать не предсказанный, а оценённый средний интервал $1/\hat{\lambda} = 0,358$, то $\delta\lambda = 0,155$ и $\Pr = 0,14$; вывод тот же.) Отметим, что несмещённость оценки (12) от этой реализации не зависит — она усредняет по всем пятнадцати основаниям, — а сама изменчивость δ_b учтена в доверительном интервале (15), полученном инверсией симуляции схемы В.

4.3 Данные не выбирают схему за нас

Подчёркнём, что $(M - 1)/S$ и $(M - B)/S$ — функции одних и тех же достаточных статистик (N_b, D_b) . Никакая обработка имеющихся данных не скажет, какая из них верна: выбор определяется тем, как данные собирались, и цена его составляет 7% — вдвое больше, чем весь остаточный разрыв с ЛПВ.

Естественная попытка обойти выбор — строить объединённую оценку из заведомо несмещённых кусков. Оценка по одному основанию $\tilde{\kappa}_b = (N_b - 1) \ln b / D_b$ несмещена при схеме А (следствие 1) и несмещена при схеме В с точностью до экспоненциально малого члена. Действительно, при $N_b = n \geq 2$ отношение D_b/W_b распределено как $\text{Beta}(n, 1)$, и тождество $\mathbb{E}[1/\text{Beta}(\alpha, \beta)] = (\alpha + \beta - 1)/(\alpha - 1)$ даёт $\mathbb{E}[\tilde{\lambda}_b \mid N_b = n] = n/W_b$; при $n \in \{0, 1\}$ оценка равна нулю. Усреднение по $n \sim \text{Pois}(\lambda_b W_b)$ поэтому даёт не λ_b , а

$$\mathbb{E}[\tilde{\lambda}_b] = \lambda_b - \frac{\Pr(N_b = 1)}{W_b} = \lambda_b(1 - e^{-\lambda_b W_b}),$$

то есть тот же экспоненциально малый дефицит, что и в (11): при $\lambda_b W_b \approx N_b \geq 7$ он не превосходит 0,1%. Симуляция подтверждает: по каждому из пятнадцати оснований среднее $\tilde{\kappa}_b$ лежит в пределах 1,774–1,790 при истинном 1,781 (оценка имеет бесконечную дисперсию при $N_b = 2$, поэтому выборочное среднее сходится медленно; остаточный разброс по основаниям — шум Монте-Карло).

Тем не менее взвешенное среднее

$$\kappa_* = \sum_b (N_b - 2) \tilde{\kappa}_b / \sum_b (N_b - 2)$$

Таблица 5. Оценки по основаниям. $\hat{G}_b = D_b/(N_b \ln b)$ — конечная форма; $\hat{G}_b^{\text{OLS}}$ — наклон МНК $\ln n_k$ на k , делённый на $\ln b$; обе несмещены (предложение 2). $\tilde{\kappa}_b = (N_b - 1) \ln b/D_b$ — несмещённая оценка константы, ДИ точный из $\text{Gamma}(N_b, 1)$. Последний столбец — вероятностное интегральное преобразование $\text{Gamma}(N_b, 1)$, применённое к $e^\gamma D_b/\ln b$. ЛПВ предсказывает $G = e^{-\gamma} = 0,5615$ и $\kappa = e^\gamma = 1,7811$.

Table 5. Per-base estimates. $\hat{G}_b = D_b/(N_b \ln b)$ is the endpoint form; $\hat{G}_b^{\text{OLS}}$ is the OLS slope of $\ln n_k$ on k divided by $\ln b$; both are unbiased (Proposition 2). $\tilde{\kappa}_b = (N_b - 1) \ln b/D_b$ is the unbiased estimator of the constant, with an exact interval from $\text{Gamma}(N_b, 1)$. The last column is the probability integral transform of $\text{Gamma}(N_b, 1)$ applied to $e^\gamma D_b/\ln b$. LPW predicts $G = e^{-\gamma} = 0.5615$ and $\kappa = e^\gamma = 1.7811$.

b	N_b	$\hat{G}_b$	$\hat{G}_b^{\text{OLS}}$	разн., %	$\hat{\kappa}_b$	$\tilde{\kappa}_b$	95% ДИ	PIT
2	51	0,5102	0,5309	+4,1	1,960	1,921	[1,459; 2,533]	0,266
3	22	0,6148	0,6081	−1,1	1,626	1,552	[1,019; 2,373]	0,693
5	18	0,4802	0,4666	−2,8	2,083	1,967	[1,234; 3,149]	0,285
6	16	0,5000	0,4904	−1,9	2,000	1,875	[1,143; 3,092]	0,355
7	9	0,7104	0,7371	+3,8	1,408	1,251	[0,644; 2,466]	0,801
10	10	0,6612	0,6746	+2,0	1,512	1,361	[0,725; 2,584]	0,737
11	12	0,4034	0,3617	−10,3	2,479	2,272	[1,281; 4,066]	0,162
12	13	0,3981	0,3796	−4,7	2,512	2,319	[1,337; 4,050]	0,141
13	12	0,4098	0,3448	−15,9	2,440	2,237	[1,261; 4,002]	0,174
14	10	0,5025	0,5386	+7,2	1,990	1,791	[0,954; 3,400]	0,406
15	9	0,5035	0,5054	+0,4	1,986	1,766	[0,908; 3,479]	0,417
17	11	0,4301	0,4353	+1,2	2,325	2,114	[1,161; 3,887]	0,229
18	7	0,6604	0,4656	−29,5	1,514	1,298	[0,609; 2,825]	0,714
19	10	0,3161	0,2971	−6,0	3,164	2,847	[1,517; 5,405]	0,061
20	8	0,5300	0,5713	+7,8	1,887	1,651	[0,815; 3,402]	0,483

с обратно-дисперсионными весами даёт при схеме А смещение +0,05%, а при схеме В — +7,51%, то есть практически то же, что и $(M - 1)/S$. Причина в том, что веса — сами числа событий — при схеме В случайны и положительно коррелируют с оценками; несмещённость каждого слагаемого не переносится на отношение сумм.

Отсюда мы делаем узкий, но, как нам кажется, важный вывод: *выигрыш в точности от объединения оснований неотделим от предположения о схеме наблюдения*. Единственный радикальный выход — документировать фронты поиска L_b , как это делает GIMPS для $b = 2$. Мы обращаемся с этим к участникам соответствующих поисковых проектов.

5 Результаты

5.1 Оценки по основаниям

Ниже $e^{-\gamma}$ лежат 11 оснований из 15 — одинаково при обеих формах оценки, так что знак отклонения устойчив к её выбору, в отличие от порядка оснований между собой. Все пятнадцать РИТ-квантилей лежат внутри центральной 95% области; крайние — $b = 19$ на квантиле 0,061 и $b = 7$ на 0,801. Основание 13, «удачливое», находится на 0,174, что ничем не примечательно для одного из пятнадцати.

5.2 Объединённая оценка

При схеме А формулы (7)–(8) дают

$$\tilde{\kappa} = 1,9648, \quad 95\% \text{ ДИ} = [1,7205; 2,2444], \quad p = 0,142. \quad (14)$$

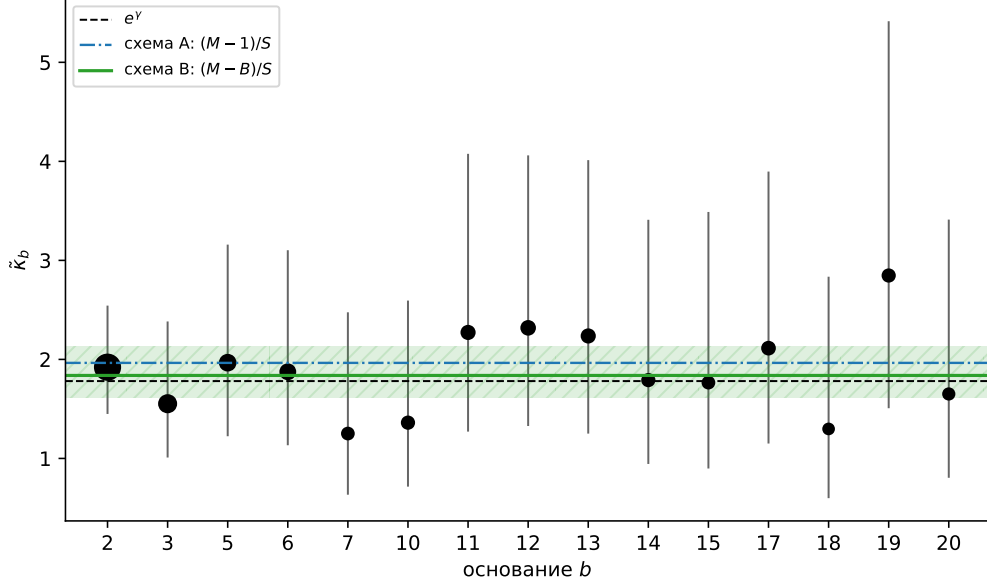


Рис. 1. Оценки $\tilde{\kappa}_b$ по основаниям с точными 95% доверительными интервалами из $\text{Gamma}(N_b, 1)$; площадь маркера пропорциональна N_b . Штриховая линия — значение ЛПВ e^γ ; синяя — объединённая оценка при схеме А; зелёная с полосой — калиброванная на схему В оценка и её интервал. Каждое основание по отдельности совместимо с универсальной константой.

Figure 1. Per-base estimates $\tilde{\kappa}_b$ with exact 95% confidence intervals from $\text{Gamma}(N_b, 1)$; marker area is proportional to N_b . Dashed line: the LPW value e^γ ; blue dash-dotted: the pooled estimate under scheme A; green with a hatched band: the estimate calibrated to scheme B and its interval. Each base separately is compatible with a universal constant.

Точечная оценка на 10% выше e^γ , и именно это превышение прежде интерпретировалось как след опущенного эвристикой фактора.

Оценка (12) для схемы В даёт (интервал и p -значение получены инверсией симуляции схемы В: для сетки значений κ симулируется схема В с наблюдаемым расположением фронта и отыскиваются те κ , при которых наблюдаемая статистика $(M - B)/S$ попадает на квантили 0,025 и 0,975 симулированного распределения; 20 000 реализаций на точку)

$$\hat{\kappa}_B = \frac{M - B}{S} = 1,8381, \quad 95\% \text{ ДИ} = [1,613; 2,130], \quad p = 0,639. \quad (15)$$

Превышение сокращается с 10,3% до 3,2%, а p -значение — с 0,14 до 0,64. Мы полагаем, что схема В ближе к способу получения данных, и потому считаем (15) основным результатом, а (14) — верхней границей: она отвечает предположению $m = 0$, то есть остановке поиска ровно на находке. Истина лежит между ними, и без публикации L_b сузить этот промежуток нельзя. Обе оценки согласуются с ЛПВ; различаются они тем, требуют ли данные объяснения для остаточного превышения. Мы заключаем, что не требуют. Картина в целом показана на рис. 1: доверительный интервал каждого основания покрывает и e^γ , и обе объединённые оценки.

5.3 Однородность и её мощность

Пусть H_0 — модель с единой κ , а H_1 — модель со свободными κ_b . Из (6), поскольку $\sum_b \hat{\kappa}_b D_b / \ln b = M = \hat{\kappa} S$, статистика отношения правдоподобий сводится к

$$\Lambda = 2 \sum_b N_b \ln \frac{\hat{\kappa}_b}{\hat{\kappa}} \stackrel{H_0}{\sim} \chi_{B-1}^2. \quad (16)$$

Мы получаем $\Lambda = 7,40$ при 14 степенях свободы, $p = 0,92$.

Однако неотвержение информативно ровно настолько, насколько мощен критерий, и здесь следует применить к себе то же требование, что и к литературе. Мы симулировали альтернативы, в которых κ_b логнормально рассеяны вокруг e^γ с коэффициентом вариации cv :

cv	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,50
мощность	0,061	0,120	0,212	0,363	0,535	0,693	0,817	0,893	0,965

Мощности 80% критерий достигает лишь при $cv \approx 0,34$ (5000 реализаций на точку сетки, точность по мощности около $\pm 0,01$). Следовательно, $p = 0,92$ означает: данные не требуют базозависимых частот, но и не исключают разброса κ_b величиной до трети от значения константы. Утверждение «удачливых оснований не существует» из имеющихся данных не следует; следует более слабое — «их существование данными не поддерживается, а различия менее $\pm 34\%$ принципиально неразличимы».

5.4 Устойчивость

Нижнее усечение. Мы варьировали нижнюю точку усечения, чтобы прощупать асимптотический режим (эвристика (2) асимптотична, тогда как модель постоянной интенсивности стартует от $n = 2$). Результаты в таблице 6. Оценка схемы А растёт с 1,965 до 2,099 — не строго монотонно (при $n > 10^2$ она отстает с 2,019 до 2,012), но систематически: рост составляет 6,8% при том, что все пять значений получены на вложенных подвыборках одних и тех же данных. Это тренд, а не шум. Оценка схемы В тренда не показывает и колеблется вокруг e^γ в пределах 1,79–1,87 (при более слабом критерии выбытия $N_b \geq 1$ — в пределах 1,76–1,87, по-прежнему без тренда). Причина видна из (12): усечение уменьшает M , но не B , тогда как схема А вычитает единицу независимо от объёма выборки. Мы считаем это независимым подтверждением диагноза §4: тренд был свойством оценки, а не данных. Обе кривые приведены на рис. 2.

Исключение по одному основанию. Анализ с исключением одного основания даёт $\tilde{\kappa}$ в пределах [1,930; 2,012] и p от 0,086 до 0,237; ни одно основание не определяет вывод, а наиболее влиятельное, $b = 3$, при удалении сдвигает p лишь до 0,086.

Статус данных. Ограничение основания 2 пятьюдесятью дважды проверенными показателями переводит результат с $\tilde{\kappa} = 1,965$, $p = 0,142$ на $\tilde{\kappa} = 1,961$, $p = 0,151$. Исключение всех индексов $n > 10^6$, где статус элементов — PRP, даёт $\tilde{\kappa} = 1,951$ при $M = 182$. В наихудшем сценарии, когда последний известный PRP какого-либо основания оказывается составным, наибольший сдвиг даёт $b = 17$: $\tilde{\kappa} = 1,977$. Все варианты лежат внутри интервала (14), поэтому возможные псевдопростые на вывод не влияют.

6 Статистическая мощность

Согласно (8) мощность против истинной константы $\kappa = re^\gamma$ на уровне α доступна в замкнутой форме (таблица 7).

Таблица 6. Устойчивость к нижнему усечению. Основание остаётся в выборке, если после усечения у него сохраняется не менее *двух* событий ($N_b \geq 2$); при $n > 10^4$ этому критерию перестаёт удовлетворять основание 19, откуда $B = 14$. Критерий существен: при более слабом требовании $N_b \geq 1$ основание 19 сохраняется, и последняя строка принимает вид $B = 15$, $M = 90$, $(M - 1)/S = 2,0848$, $(M - B)/S = 1,7569$, $p = 0,128$.

Table 6. Robustness to lower truncation. A base is retained if at least *two* events survive the truncation ($N_b \geq 2$); at $n > 10^4$ base 19 no longer meets this criterion, whence $B = 14$. The criterion matters: under the weaker requirement $N_b \geq 1$ base 19 is retained and the last row becomes $B = 15$, $M = 90$, $(M - 1)/S = 2.0848$, $(M - B)/S = 1.7569$, $p = 0.128$.

усечение	B	M	$(M - 1)/S$	$(M - B)/S$	p (схема А)
нет	15	218	1,9648	1,8381	0,142
$n > 10$	15	192	2,0192	1,8712	0,080
$n > 10^2$	15	156	2,0116	1,8299	0,124
$n > 10^3$	15	125	2,0551	1,8231	0,106
$n > 10^4$	14	89	2,0990	1,7889	0,116

Таблица 7. Мощность на уровне $\alpha = 0,05$ для отвержения $\kappa = e^\gamma$, когда истинная константа превышает его в указанное число раз.

Table 7. Power at level $\alpha = 0.05$ for rejecting $\kappa = e^\gamma$ when the true constant exceeds it by the stated factor.

κ/e^γ	только Мерсенн ($M = 51$)	объединение ($M = 218$)
1,05	0,060	0,106
1,10	0,095	0,277
1,15	0,152	0,523
1,20	0,229	0,755
1,30	0,427	0,972
1,50	0,802	1,000

При мощности 80% одна последовательность Мерсенна обнаруживает только отклонения в 49,8% и более; объединение пятнадцати оснований снижает этот порог до 21,2%. Достижение мощности 80% против отклонения в 10% требует $M \approx 875$ событий, против 5% — $M \approx 3319$.

Эти рубежи вычислительно недостижимы, и стоит сказать насколько. Поскольку M растёт логарифмически по фронту поиска, удвоение фронтов *по всем пятнадцати основаниям* даёт около 9,6 дополнительных событий на всю объединённую выборку. Чтобы набрать недостающие 657 событий, нужно $657/9,6 \approx 68$ удвоений, то есть рост фронтов в $2^{68,2} \approx 3 \cdot 10^{20}$ раз. Речь идёт не о десятилетиях, а о величине, лежащей вне досягаемости любых мыслимых вычислений. Обе кривые мощности как функции истинного отклонения показаны на рис. 3.

Отсюда правило чтения для этой литературы. Сообщение о том, что данные согласуются с ЛПВ с точностью до нескольких процентов, не есть свидетельство в пользу ЛПВ на уровне нескольких процентов; оно совместимо с константой, ошибочной в полтора раза. Объединённый анализ устанавливает, однако, настоящую границу: универсальная константа, если она существует, лежит примерно в $[1,61; 2,13]$, и ни одно основание от неё различимо не отклоняется.

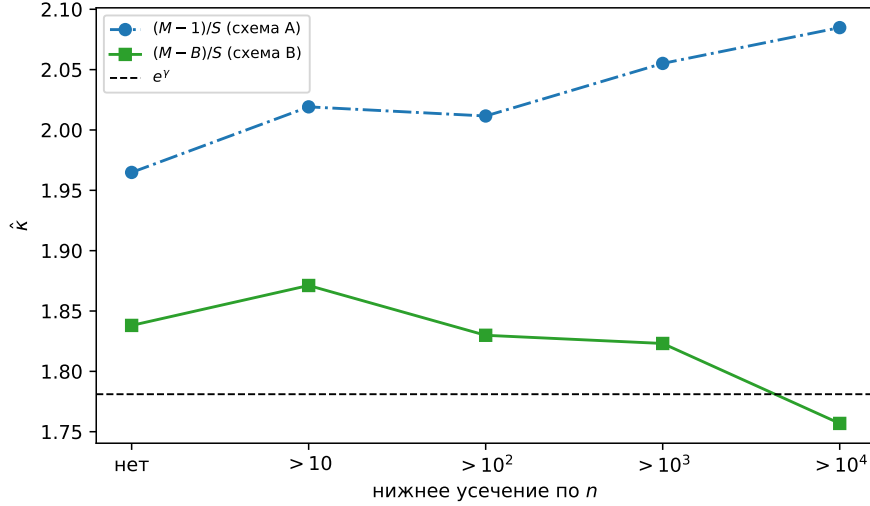


Рис. 2. Объединённая оценка при нижнем усечении: $(M-1)/S$ (схема А) и $(M-B)/S$ (схема В). Тренд оценки схемы А при переходе к схеме В исчезает.

Figure 2. The pooled estimate under lower truncation: $(M-1)/S$ (scheme A) and $(M-B)/S$ (scheme B). The trend of the scheme A estimate disappears under scheme B.

7 Та же ошибка в ином обличье

Счётная функция Мерсенна провоцирует родственную ошибку, которую мы приводим как разобранный пример. Регрессия $\pi_2(t)$ на t в точках событий по 50 дважды проверенным показателям (нумерация $0, \dots, N-1$: наименьший показатель есть начало отсчёта, а не событие) даёт наклон 2,6391 и свободный член $-2,9627$ при стандартной ошибке МНК 0,4469, на вид значимый и наводящий на мысль о вторичном члене в (2). Ничего подобного.

Складываются два дефекта. Остатки кумулятивного счёта сильно автокоррелированы, здесь $\rho_1 = 0,825$; ковариационная оценка Ньюи — Уэста с восемью лагами увеличивает стандартную ошибку до 0,7315. Существеннее то, что регрессия использует только точки событий и тем самым отбрасывает пустой интервал между последним показателем и фронтом поиска. Корректная нулевая модель удерживает интервал $[t_0, T]$ фиксированным, где $T = \ln X_{\text{ver}}$, и обуславливается ровно $N-1 = 49$ событиями строго правее t_0 , что по предложению 1 означает 49 независимых равномерных точек на $(t_0, T]$. По 20 000 таким реализациям свободный член имеет медиану $-1,498$ и 5–95% диапазон $[-5,99; 2,20]$, что даёт $p = 0,562$ для наблюдаемого значения. Вторичный член есть артефакт обуславливания.

7.1 Три следствия одного и того же обуславливания

(i) **Бутстрэп не спасает.** Естественная реакция на подозрительно малую стандартную ошибку МНК — бутстрэп по точкам событий. На данных основания 2 бутстрэп по 20 000 ресемплам даёт медиану $-2,949$, стандартное отклонение 0,387 и 95% интервал $[-3,822; -2,300]$, целиком лежащий ниже нуля; доля отрицательных значений равна 100%. Это не подтверждение, а повторение той же ошибки: ресемплинг наблюдаемых точек воспроизводит изменчивость внутри реализованной конфигурации и не может восстановить изменчивость самого процесса, породившего эту конфигурацию. Корректное нулевое распределение примерно в шесть с половиной раз шире бутстрэпного.

(ii) **Мнимая недодисперсия.** Сравнение наблюдаемого $\max_i |r_i| = 6,347$, где $r_i = i - \hat{\lambda}(t_i - t_0)$, с симуляцией *необусловленного* пуассоновского процесса наводит на вывод, что

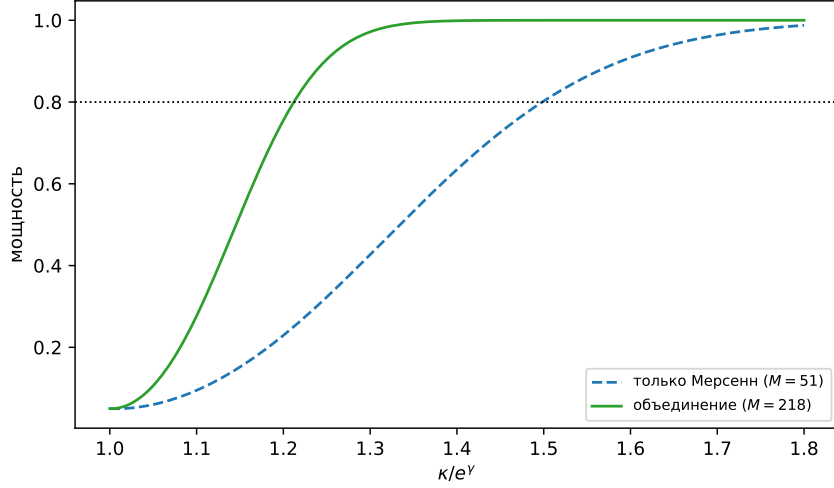


Рис. 3. Мощность отвержения $\kappa = e^\gamma$ на уровне $\alpha = 0,05$. Горизонтальная линия отмечает мощность 80%.

Figure 3. Power of rejecting $\kappa = e^\gamma$ at level $\alpha = 0.05$. The horizontal line marks 80% power.

счётная функция «глаже пуассоновской». Против корректного нулевого распределения — с обусловливанием на $N - 1$ событий и оценкой λ по последнему из них — медиана равна 5,134, а двусторонний уровень значимости составляет 0,539. Наблюдение совершенно рядовое.

(iii) «Серединный дефицит». Оценивание λ по последнему событию обращает остаток r в нуль на обоих концах ($r(t_0) = r(t_N) = 0$ при правильной нумерации), превращая его траекторию в аналог броуновского моста, для которого отрицательная экскурсия в середине диапазона возникает сама собой. Наблюдённая средняя экскурсия на средней половине диапазона равна $-3,13$ при медиане симуляций $-0,001$ и $p = 0,280$; доля реализаций с отрицательной средней экскурсией составляет 0,500, то есть систематического дефицита нет. Сама траектория остаточного процесса вместе с полосой симуляций приведена на рис. 4.

7.2 Основание 2 на известном фронте

Основание 2 — единственное, где фронт опубликован, и потому единственное, где возможен анализ по схеме В без всяких предположений. С $T = \ln X_{\text{ver}}$ получаем $\hat{\lambda} = (N - 1)/(T - t_0) = 2,796$ против $e^\gamma / \ln 2 = 2,570$, то есть $\hat{\kappa}_2 = 1,938$ при точном 95% интервале Гарвуда $[1,434; 2,562]$ и пуассоновском $p = 0,59$ (удвоенный хвост; при mid- p -конвенции 0,54 — конвенцию здесь необходимо оговаривать, поскольку различие ощутимо). Условная оценка *того же среза данных* — те же 50 дважды проверенных показателей — даёт $\tilde{\kappa}_2 = 1,905$; различие невелико, поскольку последний показатель этого среза 77 232 917 случайно оказался очень близко к фронту 81 648 221. (Для сравнения, условная оценка по всем 52 известным показателям, приведённая в таблице 5, равна 1,921; сопоставлять её с $\hat{\kappa}_2$ нельзя — это другая выборка.) Это совпадение одной реализации, а не свойство метода: смещение §4 относится к среднему по положению последнего события относительно фронта.

7.3 Теоретический вторичный член имеет противоположный знак

Существует независимый довод против содержательной трактовки свободного члена C_1 . Если вторичный член в (2) происходит из постоянной Мертенса $\mathfrak{M} = 0,26150\dots$, то естественная его величина есть $(e^\gamma / \ln 2)\mathfrak{M} = +0,672$: знак положительный, тогда как наблюдается $-2,963$. Ближайшие теоретические кандидаты не просто не воспроизводят наблюдаемую

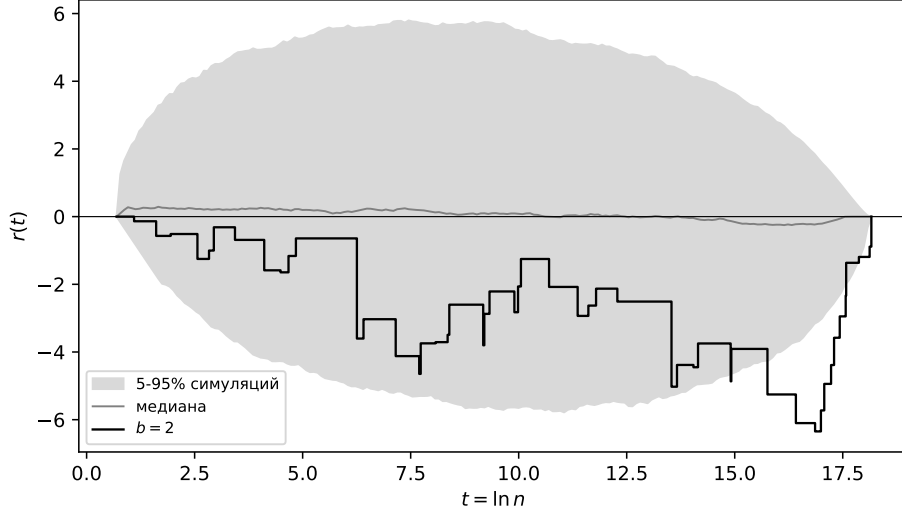


Рис. 4. Остаточный процесс $r(t)$ для основания $b = 2$ вместе с полосой 5–95% квантилей 20 000 симуляций и медианой симуляций. Траектория лежит внутри полосы.

Figure 4. The residual process $r(t)$ for base $b = 2$ together with the 5–95% quantile band of 20 000 simulations and the simulation median. The trajectory stays inside the band.

величину, а предсказывают противоположный знак. Это независимо от предыдущего подтверждает, что C_1 — параметр аппроксимации, а не структуры.

8 Структурные поправки

Рассмотрим более общую параметризацию интенсивности $\lambda_b = (\kappa / \ln b) C_b$ и четыре модели множителя:

$$A: C_b = 1;$$

$$B: C_b = \prod_{p|b-1, p \neq 2} \left(\frac{p}{p-1}\right)^\alpha \prod_{p|b+1, p \neq 2} \left(\frac{p}{p-2}\right)^\beta;$$

$$C: C_b = \prod_{p|b^2-1} \left(\frac{p}{p-1}\right)^\delta;$$

$$D: C_b = \exp(\theta_1 \omega(b-1) + \theta_2 \omega(b+1) + \theta_3 \ln b).$$

Показатель в модели C обозначен через δ , а не γ , чтобы не смешивать его с постоянной Эйлера. Результаты в таблице 8. Ни одна параметризация не даёт значимого улучшения; байесовские факторы по ВИС при $n = M = 218$ подавляюще поддерживают базовую модель.

Замечание 5 (Чувствительность ВИС). Выбор эффективного объёма выборки для ВИС неочевиден: правдоподобие (6) имеет $B = 15$ независимых слагаемых, но информация растёт как $M = 218$. При $n = 15$ апостериорные вероятности составляют 0,624 / 0,079 / 0,261 / 0,036, при $n = 218$ — 0,893 / 0,008 / 0,098 / 0,001. Вывод в пользу модели A при обоих выборах, но при $n = 218$ он существенно сильнее. Мы отчитываемся по $n = M$ как соответствующему числу независимых событий.

Фиксированная арифметическая поправка. Отдельно рассмотрена модель с *фиксированным* (не оцениваемым) множителем $C_b^{\text{fix}} = \prod_{p|b-1, p \neq 2} \frac{p}{p-1} \prod_{p|b+1, p \neq 2} \frac{p}{p-2}$, для которого

Таблица 8. Сравнение структурных моделей. Правдоподобие — условное (6) с множителем C_b ; LR и p даны относительно модели A; BIC вычислен при $n = M = 218$.

Table 8. Comparison of structural models. The likelihood is the conditional one (6) with factor C_b ; LR and p are relative to model A; BIC is computed with $n = M = 218$.

Модель	параметров	$\ln L$	LR	p	AIC	BIC	$P(\text{модель} \mid \text{данные})$
A	1	-176,129	—	—	354,26	357,64	0,893
B	3	-175,494	1,27	0,530	356,99	367,14	0,008
C	2	-175,647	0,96	0,326	355,29	362,06	0,098
D	4	-174,925	2,41	0,492	357,85	371,39	0,001

$\overline{C_b} = 2,46$. Она даёт $\hat{\kappa} = 0,815$. Подчеркнём, что сравнивать это значение с e^γ бессмысленно: в перепараметризованной модели κ имеет иной масштаб, и такой «критерий согласия» проверял бы лишь равенство среднего C_b единице. Поскольку модели A и C^{fix} ненестированы и имеют одинаковое число свободных параметров, корректное сравнение — прямо по правдоподобию: $\ln L = -193,55$ против $-176,13$, разность $-17,42$. Фиксированная поправка решительно отвергается.

Логарифмические поправки. Модель $\lambda_b(t) = (\kappa / \ln b)(1 + c_1/t + c_2/t^2)$ оценивается полным правдоподобием точечного процесса $\sum_i \ln \lambda(t_i) - \int \lambda$ (правдоподобие одного лишь счёта здесь недопустимо: оно отбрасывает положения событий, которыми только и определяются c_1, c_2). Получаем $\hat{\kappa} = 2,049$, $\hat{c}_1 = +0,108$, $\hat{c}_2 = -0,826$, LR = 3,53 при двух степенях свободы, $p = 0,171$. Незначимо.

9 Заключение

1. Употребительные оценки нормированной частоты обобщённых репьюнитных простых не смещены схемой подгонки: и концевая форма, и наклон МНК несмещены точно. Смещена лишь обратная величина, и это следствие выпуклости. Ходовое объяснение «медленной сходимости снизу» через цензурирование несостоятельно.
2. Настоящий дефект употребительной практики — в том, что различные формы оценки расходятся до 29,5%, а точечные значения публикуются без доверительных интервалов при том, что стандартные ошибки МНК в этой задаче занижены примерно в 1,6 раза. Классификация оснований на «удачливые» и «неудачливые» переворачивается от смены формы оценки на неизменных данных.
3. Объединение $B = 15$ оснований даёт $M = 218$ событий и точный пивот $\kappa S \sim \text{Gamma}(M, 1)$, но этот пивот откалиброван под схему наблюдения «до N -го события», тогда как данные получены при фиксированном фронте поиска. При реальной схеме номинальный 5% критерий отвергает в 16,2% случаев, а правильной объединённой оценкой оказывается $(M - B)/S$: условное правдоподобие стоит одного события на каждое основание, а не одного события в сумме. Различение таких схем восходит к теории надёжности; новым здесь является случай недокументированного фронта, когда экспозицию нельзя взять из протокола и её приходится восстанавливать из находок (замечание 3).
4. Это даёт $\kappa = 1,838$ при 95% интервале $[1,61; 2,13]$ и $p = 0,639$ против e^γ . Сообщавшееся десятипроцентное превышение над ЛПВ, включая наше собственное в более ранней редакции этой работы, есть артефакт схемы наблюдения. Переход к схеме В независимо устраняет и систематический тренд объединённой оценки при усечении по $n_{\min}$.

5. Выбор между $(M-1)/S$ и $(M-B)/S$ не решается данными: обе оценки суть функции одних и тех же достаточных статистик и различаются на 7%. Практическое следствие — необходимость публиковать фронты поиска L_b , как это делает GIMPS для $b = 2$. До тех пор любой объединённый анализ этих последовательностей несёт неустранимую неопределённость порядка 7% — вдвое больше остаточного разрыва с ЛПВ.
6. Гипотеза ЛПВ имеющимися данными не отвергается, а базозависимые поправки не требуются. Но и то и другое — утверждения о низкой чувствительности критериев: критерий однородности различает лишь разброс κ_b порядка $\pm 34\%$, а объединённый критерий — отклонения константы не менее 21%. Достижение чувствительности в 10% потребовало бы роста фронтов поиска примерно в $3 \cdot 10^{20}$ раз.

А Верификация исходных данных

Все двадцать последовательностей (пятнадцать основного набора и пять из проверки границы отбора) сверены с записями OEIS 27 августа 2026 г. Поскольку в объединённый анализ входят только тройки $(N_b, n_{\min}, n_{\max})$, в таблице 9 приведены число известных простых, из которого N_b получается вычитанием единицы, и оба крайних индекса; полные списки индексов содержатся в скрипте `analysis.py`.

Таблица 9. Сверка с OEIS. Столбец «последнее пополнение» указывает происхождение наибольшего известного индекса.

Table 9. Cross-check against OEIS. The column “last addition” gives the provenance of the largest known index.

b	OEIS	простых	$n_{\min}$	$n_{\max}$	последнее пополнение
2	A000043	52	2	136 279 841	GIMPS, окт. 2024
3	A028491	23	3	8 530 117	P. Bourdelais
5	A004061	19	3	3 300 593	P. Bourdelais
6	A004062	17	2	3 360 347	P. Bourdelais
7	A004063	10	5	1 264 699	P. Bourdelais
10	A004023	11	2	8 177 207	Propper и Batalov, май 2021
11	A005808	13	17	1 868 983	P. Bourdelais
12	A004064	14	2	769 543	P. Bourdelais, дек. 2014
13	A016054	13	5	1 503 503	P. Bourdelais
14	A006032	11	3	1 724 417	P. Bourdelais, 13.07.2026
15	A006033	10	3	639 833	P. Bourdelais, 22.04.2019
17	A006034	12	3	1 990 523	P. Bourdelais, 03.08.2020
18	A133857	8	2	1 270 141	P. Bourdelais
19	A006035	11	19	209 359	P. Bourdelais, 27.08.2010
20	A127995	9	3	984 349	P. Bourdelais

Отдельно предупредим читателя, сверяющего данные по вторичным источникам: сводные таблицы (страница «Repunit primes» в OEIS Wiki, статья «List of repunit primes» в Википедии) обновляются с запаздыванием и на момент написания работы отставали от самих записей OEIS на один член у оснований $b = 14, 15, 17, 18, 20$. Авторитетным источником следует считать записи OEIS.

Независимый пересчёт префиксов

Сверка с OEIS подтверждает, что перечисленные индексы дают простое, но не гарантирует *полноты*: пропущенный член сдвинул бы N_b , а с ним и обе объединённые оценки. Этот пробел мы закрыли прямым пересчётом. Для каждого из двадцати оснований $2 \leq b \leq 26$, не

являющихся точными степенями, независимой реализацией² проверены все индексы $n < 10^4$ подряд, а не только перечисленные в OEIS. Каждый отрицательный вердикт пересчитан вторым, независимым бэкендом (сплошной double-check, как в GIMPS), чтобы исключить потерянную находку.

Результат: 153 члена подтверждены, лишних нет, пропущенных нет, расхождений между бэкендами нет — по всем двадцати основаниям. Покрытие по основаниям неравномерно (от одного члена при $b = 18$ до двадцати двух при $b = 2$): на основной набор $b \leq 20$ приходится 128 подтверждённых индексов из 233 известных. Выше 10^4 полный пересчёт вычислительно недоступен, и там мы по-прежнему опираемся на OEIS.

Отметим, что этот пересчёт не был формальностью: в первом прогоне независимая реализация объявила $R_{3181}(23)$ составным, разойдясь с A204940. Разбор показал ошибку в самой реализации — всплеск ошибки округления FFT на последней итерации, после последней периодической проверки, — а не в данных OEIS. После исправления расхождений не осталось. Мы приводим этот эпизод как иллюстрацию к тезису §4: ложное «составное» невидимо без повторного счёта, и именно поэтому фронты и протоколы проверки должны публиковаться.

Доступность данных и кода

Все использованные последовательности приведены в таблице 1.

Данные. Скрипт `fetch_data.sh` загружает b-файлы OEIS для всех пятнадцати последовательностей основного набора, `fetch_extra.sh` — для пяти оснований $21 \leq b \leq 26$, использованных в проверке границы отбора (§2.2). Загруженные файлы включены в репозиторий, так что анализ воспроизводится без обращения к сети.

Анализ. Один самодостаточный скрипт `analysis.py` (numpy, scipy, matplotlib); каждое число настоящей работы помечено в его выводе (`results.txt`) тегом соответствующей таблицы или раздела и воспроизводится одним запуском. Генератор случайных чисел инициализирован фиксированным зерном, поэтому все величины Монте-Карло воспроизводятся побитово. Скрипт также строит все четыре рисунка. Полный прогон занимает несколько минут.

Независимый пересчёт последовательностей. `verify_sequences.sh` запускает поисквик по всем индексам $n < 10^4$ для каждого основания, `compare_verify.py` сверяет результат с b-файлами OEIS и возвращает ненулевой код при любом расхождении (приложение A).

Оговорка о величинах Монте-Карло. Концы интервала (15) зависят от процедуры инверсии, а таблицы 2, 3 и 4 — от правил расположения фронта. И то и другое описано в тексте и реализовано в `analysis.py`; все приведённые в работе значения — в точности вывод этого скрипта при зерне, зафиксированном в нём. Точность симуляций: для уровня значимости в таблице 4 около $\pm 0,003$, для средних в таблице 3 — около $\pm 0,3\%$.

Репозиторий: <https://github.com/Wilps93/repunit-hunt> — каталог `paper/`. Дерево файлов и порядок запуска описаны в `paper/README.md`.

Список источников

- [1] Wagstaff S. S., Jr. Divisors of Mersenne numbers // Mathematics of Computation. 1983. Vol. 40, № 161. P. 385–397. DOI: 10.1090/S0025-5718-1983-0679454-X.
- [2] Pomerance C. On the distribution of pseudoprimes // Mathematics of Computation. 1981. Vol. 37, № 156. P. 587–593. DOI: 10.1090/S0025-5718-1981-0628717-0.

²Гибридный CPU/GPU поисковик: сегментное сито по малым делителям, trial factoring в арифметике Монтгомери, PRP через GMP и GWNUM/IBDWT. Исходный код и протокол прогонов — в том же репозитории, скрипты `verify_sequences.sh` и `compare_verify.py`.

- [3] Heuristics: deriving the Wagstaff Mersenne conjecture [Электронный ресурс] // The PrimePages: prime number research and records. URL: <https://t5k.org/merzenne/heuristic.html> (дата обращения: 27.08.2026).
- [4] Dubner H. Generalized repunit primes // Mathematics of Computation. 1993. Vol. 61, № 204. P. 927–930. DOI: 10.1090/S0025-5718-1993-1185243-9.
- [5] Bourdelais P. A generalized repunit conjecture [Электронный ресурс] // NMBRTHRY mailing list. 25 June 2009. URL: <https://listserv.nodak.edu/cgi-bin/wa.exe?A2=NMBRTHRY;417ab0d6.0906> (дата обращения: 25.08.2026).
- [6] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences [Электронный ресурс] / OEIS Foundation Inc. URL: <https://oeis.org> (дата обращения: 27.08.2026).
- [7] Wagstaff S. S., Jr. Two conjectures about Mersenne primes [Электронный ресурс] // Journal of Integer Sequences. 2025. Vol. 28. Article 25.7.2. URL: <https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL28/Wagstaff/wag3.html> (дата обращения: 25.08.2026).
- [8] Dominguez J. Arithmetic bias in the distribution of Mersenne prime exponents and the divisor structure of $p - 1$ [Электронный ресурс] // arXiv. 2026. arXiv:2603.08994. URL: <https://arxiv.org/abs/2603.08994> (дата обращения: 27.08.2026).
- [9] Jha A. The Poisson tail conjecture for primes in short intervals [Электронный ресурс] // arXiv. 2026. arXiv:2605.23014. URL: <https://arxiv.org/abs/2605.23014> (дата обращения: 27.08.2026).
- [10] PrimeNet [Электронный ресурс] / Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS). Программное обеспечение Prime95/MPrime, версия 30.8. URL: <https://www.mersenne.org/> (дата обращения: 27.08.2026; отчёт *Milestones* считан 27.08.2026 04:30 UTC).
- [11] Epstein B. Truncated life tests in the exponential case // The Annals of Mathematical Statistics. 1954. Vol. 25, № 3. P. 555–564. DOI: 10.1214/aoms/1177728723.
- [12] Epstein B., Sobel M. Some theorems relevant to life testing from an exponential distribution // The Annals of Mathematical Statistics. 1954. Vol. 25, № 2. P. 373–381. DOI: 10.1214/aoms/1177728793.
- [13] Bartholomew D. J. The sampling distribution of an estimate arising in life testing // Technometrics. 1963. Vol. 5, № 3. P. 361–374.
- [14] Basu A. P. Estimates of reliability for some distributions useful in life testing // Technometrics. 1964. Vol. 6, № 2. P. 215–219.
- [15] Kivelä M., Porter M. A. Estimating interevent time distributions from finite observation periods in communication networks // Physical Review E. 2015. Vol. 92, № 5. Article 052813. DOI: 10.1103/PhysRevE.92.052813.

References

1. Wagstaff S. S., Jr. Divisors of Mersenne numbers. *Mathematics of Computation*, 1983, vol. 40, no. 161, pp. 385–397. DOI: 10.1090/S0025-5718-1983-0679454-X
2. Pomerance C. On the distribution of pseudoprimes. *Mathematics of Computation*, 1981, vol. 37, no. 156, pp. 587–593. DOI: 10.1090/S0025-5718-1981-0628717-0

3. Heuristics: deriving the Wagstaff Mersenne conjecture. *The PrimePages: prime number research and records*. Available at: <https://t5k.org/merсенне/heuristic.html> (accessed 27.08.2026).
4. Dubner H. Generalized repunit primes. *Mathematics of Computation*, 1993, vol. 61, no. 204, pp. 927–930. DOI: 10.1090/S0025-5718-1993-1185243-9
5. Bourdelais P. A generalized repunit conjecture. *NMBRTHRY mailing list*, 25 June 2009. Available at: <https://listserv.nodak.edu/cgi-bin/wa.exe?A2=NMBRTHRY;417ab0d6.0906> (accessed 25.08.2026).
6. OEIS Foundation Inc. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. Available at: <https://oeis.org> (accessed 27.08.2026).
7. Wagstaff S. S., Jr. Two conjectures about Mersenne primes. *Journal of Integer Sequences*, 2025, vol. 28, article 25.7.2. Available at: <https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL28/Wagstaff/wag3.html> (accessed 25.08.2026).
8. Dominguez J. Arithmetic bias in the distribution of Mersenne prime exponents and the divisor structure of $p - 1$. *arXiv*, 2026, arXiv:2603.08994. Available at: <https://arxiv.org/abs/2603.08994> (accessed 27.08.2026).
9. Jha A. The Poisson tail conjecture for primes in short intervals. *arXiv*, 2026, arXiv:2605.23014. Available at: <https://arxiv.org/abs/2605.23014> (accessed 27.08.2026).
10. Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS). *PrimeNet*. Prime95/MPrime software, version 30.8. Available at: <https://www.mersenne.org/> (accessed 27.08.2026).
11. Epstein B. Truncated life tests in the exponential case. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1954, vol. 25, no. 3, pp. 555–564. DOI: 10.1214/aoms/1177728723
12. Epstein B., Sobel M. Some theorems relevant to life testing from an exponential distribution. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1954, vol. 25, no. 2, pp. 373–381. DOI: 10.1214/aoms/1177728793
13. Bartholomew D. J. The sampling distribution of an estimate arising in life testing. *Technometrics*, 1963, vol. 5, no. 3, pp. 361–374.
14. Basu A. P. Estimates of reliability for some distributions useful in life testing. *Technometrics*, 1964, vol. 6, no. 2, pp. 215–219.
15. Kivelä M., Porter M. A. Estimating interevent time distributions from finite observation periods in communication networks. *Physical Review E*, 2015, vol. 92, no. 5, article 052813. DOI: 10.1103/PhysRevE.92.052813

Информация об авторе

Тимофей Сергеевич Докучаев — независимый исследователь, Иркутск, Россия, timofei93@yandex.ru, <https://orcid.org/0009-0006-0510-5225>

Information about the author

Timofei Sergeevich Dokuchaev — independent researcher, Irkutsk, Russia, timofei93@yandex.ru, <https://orcid.org/0009-0006-0510-5225>

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.
The author declares no conflicts of interests.